제 2 교시

수학 영역

짝수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점] I-1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^3 - 8x + 7$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점] Ⅱ-2

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30$$

을 만족시킬 때, k 의 값은? [3점] I-3

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & (x < -2) \\ x^2 - a & (x \geq -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Ⅱ-1

5. 함수 $f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Ⅱ-2

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$의 값은? [3점]

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

Ⅰ-2

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점] Ⅱ-3

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

8. 두 실수 $a = 2\log\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20$, $b = \log 2$에 대하여 $a \times b$의 값은? [3점] Ⅰ-1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 함수 $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$$

일 때, 양수 a의 값은? [4점] Ⅱ-3

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 8x^2 - 20x = (x+2)x(x-10)$

$\int_0^a f(x)dx = 0$, $a>0$, $a=10$

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

Ⅰ-2

x=0에서 전체 함수의 최댓값 13을 가지므로, a=10

a+b의 최솟값, a는 고정이므로 b가 최소일 때를 찾자.

b가 감소할수록 주기가 증가하므로, 주기가 최대일 때 = $\frac{\pi}{3}$에서 주기를 처음 끝마칠 때.

b=6, a+b=16

라이트한 추론 보소 × 자연수조건 × 최솟값으로 절외기 변별

최대 point → 주기의 변동 성질, 주기 → 특정점 → max 순의 설계로

이전이었으면 충분히 킬러로 나올 소재인듯.

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점] Ⅱ-3

① 18 ② 15 ③ 12 ④ 9 ⑤ 6

$v = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t+1)(t-2)$

$a = 6t - 3$, $a(2) = 9$

좋은 문항.
t가 변수임을 강조하는 표현($x(t)$, $v(t)$...)에서
본성을 강조하는 표현으로 교체(x, v, ...)
별은 뭐 있는것같이 했는데 사실 똑같이..

12. $a_1 = 2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1 = 2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은? [4점] Ⅰ-3-1 $\boxed{\text{문제해결}}$

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

① 합과 일반항의 관계

$\frac{a_n}{b_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}} = n - \frac{1}{2}$

$a_n = b_{n+1} \times (n - \frac{1}{2}) = (dn+2)(n - \frac{1}{2})$

$a_1 = (d+2)\cdot\frac{1}{2} = 2$, $d = 2$, $a_n = (n+1)(2n-1) = 2n^2+n-1$

$\sum_{n=1}^{5} a_n = \frac{5\cdot6\cdot11}{3} + 15 - 5 = 120$

② $\frac{a_n}{b_{n+1}}$은 등차수열이므로 역추적하기

$\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2}$, $b_2 = 4$, $b_n = 2n$

$\frac{a_n}{b_{n+1}} = (n-1) + \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2}$, $a_n = (2n-1)(n+1)$

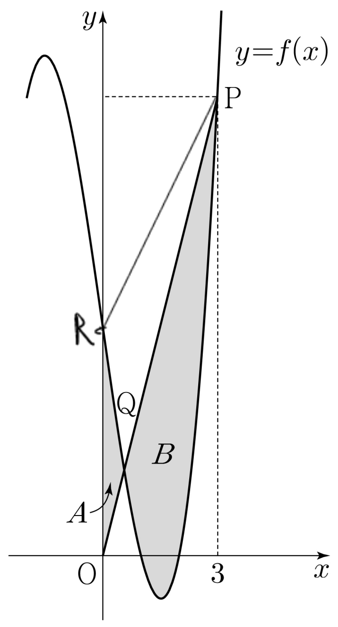
등차수열 문제이지만 수열의 합: 합과 일반항 사이의 관계 사용을 유도.
분모가 등차이므로 only 등차 조건만으로도 가능.
별로 차이 없는듯..

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 $\mathrm{P}(3,\ f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점] Ⅱ-3

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



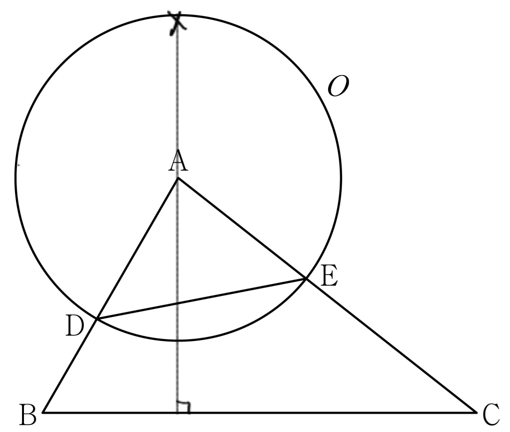
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-\alpha)$, $f'(0)=2\alpha+\alpha+2=-7$, $\alpha=-3$

$f(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$, 변곡점 $R(0,6)$

$B-A=\int_0^3 |f(x)-\overline{PR}|\,dx-\triangle OPR=\frac{1}{4}\cdot 3^4-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=\frac{45}{4}$

함수 찾기를 선제함으로써 난이도↑
B−A를 OP와의 차함수로 깡계산할 수도 있지만,
넓이관계·대특수 조사하면 계산량 극단적으로 ↓ (6, 9 때에)
무게감 있는 문항이 아니라면 특수case,,? (or 단순계산이 변별목적인 문제이면?)
단, 결과적으로 의미없어지는 특수case는 지양,,
(변별요소가 계산이므로 의미 0)
6, 9 연속 13번 배치

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.
$\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$) [4점] Ⅰ-2



① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$ ③ $30+25\sqrt{3}$ ④ $36+30\sqrt{3}$ ⑤ $42+35\sqrt{3}$

소단원 ① sin, ② cos, ③ 넓이

① sin법칙, $\overline{AB}:\overline{BC}=5:8$

원의 정의(중등도): $\overline{AD}=\overline{AE}$

③ 넓이의 관점, $\overline{AD}\times\overline{AE}:\overline{AB}\times\overline{AC}=9:35$, $\overline{AD}:\overline{AB}:\overline{AC}=3:5:7$

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=5:8:7$.

② cos법칙, $\cos B=\frac{64+25-49}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{1}{2}$, $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

① sin법칙, $\overline{AC}=7\sqrt{3}$, $\overline{AD}=3\sqrt{3}$

넓이의 관점(고1), $\overline{BC}$에 대한 높이 $=5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}$

넓이 max $=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times$(높이+반지름) $=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{3}\times\left(\frac{15}{2}+3\sqrt{3}\right)=36+30\sqrt{3}$

중등도형(원 정의) 해금, 최댓값→고1·2 마무리
기하 대상은 많음이 추가 되는 고난도 > 많은 사용이 (지나치게) 유리한 상황
sin, cos법칙이 필수적이게끔 > 최적이게끔 세팅
240613 비판 의식?: 문제를 위한 문제 탈피 (원의 sin법칙만을 위한 과다배치)
삼각 활용 소단원을 전부 사용 (①, ②, ③)
2번 연속 특수각 사용
6, 9 10번 배치에 비해 강화
$\overline{AB}<\overline{AC}$는 "그림과 같이" 때문?

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5}\,)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2) + g(2)$의 값은? [4점] Ⅱ-2

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

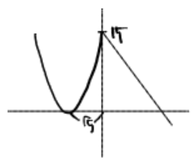
미분가능, $f(0)=7$, $f'(0)=15$

$g'(x)$에 대한 조건이므로, $g'(x) = \begin{cases} 3x^2+2ax+15 & (x \leq 0) \\ f'(x) & (x>0) \end{cases}$, $g'(x)$는 연속

$g'(x) \times g'(x-4)=0$ 서로 다른 실근 4개, 2개 or 3개+겹침

① 근 2개 → 이차 쪽에서 중근

$a=3\sqrt{5} \leftrightarrow a \neq 3\sqrt{5}$ (X)

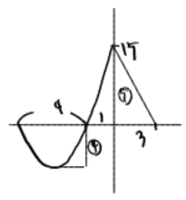


② 근 3개 → 4칸 간격으로 배치

$f'(0)=15$, 이차함수 근 간격 4이므로 대칭축 기준 2칸

최솟값 -12, y축 기준 거리비 $4:5$, $\sqrt{4+5}=3$칸 차이,

이차 $= 3(x+1)(x+5)$, $a=9$, $f'(x)=-5x$



$g(x) = \begin{cases} x^3+9x^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ -\frac{5}{2}x^2+7 & (x>0) \end{cases}$, $g(-2)+g(2)=32$

방정식 실근 개수: 삼차와 직선 비교가 아닌 이차+일차의 근 간격 결정 → 교점값으로 위치 결정 미분가능 ↔ 도함수 연속까지 사용되는 극값, 계산량↓ (230622초) 이차함수 계산은 대칭으로 빠르게 했음, 도형적 관점 또한 염두에 축으로 특정값 부정 해결, (다) 추가 지양을 위해선 가능하면 만드는걸로.. 수2 변별력 미적↓로 클래임 의식로

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3) = \log_4(3x-5)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

Ⅰ-1

$\boxed{7}$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 9x^2 + 4x$이고 $f(1) = 6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] Ⅲ-3

$\boxed{33}$

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+4} = 12$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

Ⅰ-3

$\boxed{96}$

19. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점] Ⅱ-2

$\boxed{33}$

20. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x > k$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x)) = 3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점] Ⅰ-1

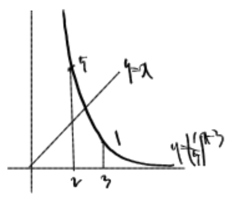
$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$, $\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}} = \frac{1}{5^{9-3k} \times 5^{3k}} = \frac{1}{5^9}$

① 구하는 값에 주목

$f\left(\frac{1}{5^9}\right) = f(f(12)) = 36$

$2 < k < 3$,

$12 > k$



② 합성함수와 역함수

$* f(f(x)) = x$, $f(x) = f^{-1}(x)$

$f(f(x)) = 3x$, $f(x) = 3f^{-1}(x)$

$f(x) = -3\log_5 x + 9$

$f\left(\frac{1}{5^9}\right) = 27 + 9 = 36$

평가원식 "구하는 값 집중" 문항
구하는 값을 변형, 범위 확인 후 대입 (241113(약))
k 범위 확인 과정에서 그림을 그릴 수 밖에 없으므로
평가원 측에서 지도함 고려한 문항이라고 주장해도 무방하다.
합성·역함수 풀이를 응용해 출제할 경우 교육과정 외 부적합 판정일 수도..
해당 문항처럼 빠져나갈 틈이 확실하지 않은 이상 변형에 주의.
(교육과정 내 풀이가 최적인 경우)

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 α에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

Ⅱ-1-1 $\boxed{\text{추론}}$

모든 실수 α에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$ → $f(\alpha)=0$인 경우에 대해 조사

① $2\alpha+1=\alpha$인 경우: always 1, 성립

② $2\alpha+1\neq\alpha$인 경우: $f(2\alpha+1)=f(\alpha)=0$, 값이 양방향으로 발산하므로 $y=0$ only (X)

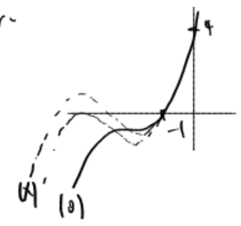
$2\alpha+1=\alpha$, $\alpha=-1$ → $f(x)$의 근은 -1이 유일.

$f(x)=(x+1)(x^2+px+4)$,

a, b가 정수이므로 p도 정수

$x^2+px+4=0$: $D<0$, $p<4$

$2\times(5+p)$의 최댓값, $p=3$, max $\boxed{16}$



> 극한 모든실수 성립 조건 → 분모=0부터
> 조건이 -1의 발산으로 생겼게, 계산량 정상화
> 정수조건 & 최댓값도 큰 영향 X
> 과하면, 최고 쓸 나은 사실에 비해 굉장히 약. (<250621)
> 발문구조: 20, 11과의 유사 구조 회피 가능성?

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0\ \text{또는}\ |a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

Ⅱ-3-4 $\boxed{\text{추론}}$

(절댓값) 2칸 반복이므로 홀짝 번갈아가며 반복, 홀배하면 홀수이므로 4의 배수 X.

① $a_m\neq0$

홀수 앞에 무조건 2배의 수가 나열, 홀수의 첫 번째 수록 항 바로 앞칸도 주목해야 하는 항.

짝 짝 홀 짝 홀 …
×2 ×2

즉, 홀수번째 항이 최솟값이 아니게 되므로 짝수항일 때만 고려하면 된다.

$|a_3|=|\frac{1}{2}a_3-3|$, $a_3=-6$ or 2

② $a_m=0$

a_3이 첫번째 0이면 된다.

1	2	3
-24	-12	-6
-9		
(m=1) ~~X~~	-3	
8	4	2
7		
10	5	
6	3	0

$\boxed{64}$

> 무턱대고 홀, 짝 경우 나눠 시작하면, 반복 최소점 계산가 힘들었을 수 있음.
> 반복의 최소=시작점이므로 각 경우가 겹치는 점까지 확인해야 함.
> 앞서 홀수 전은 무조건 짝수임을 파악, 2배관계이므로
> 홀수의 최소반복점 앞에서 2배관계의 동일패턴이 일어남을 찾아내는 것이 좋다.
> 0 기준으로도 생각해야 해서 어려울 것이 많다. 조건의 '$a_n=0$인 경우'가 힌트.
> 좋은 케이스 걸러내기 하여다고 찾는 난이도 < 실수 point
> 주관식에 수열을 배치함으로써 흔히 이야기하는 발견의 난이도가 높은 문제가 아닌,
> 케이스를 늘림으로써 실수를 변별 point로 적용시키는 것에 성공
> 동시에 생각에 대한 보상도 확실한 편 → 평가원 수열(평가원 취지)의 특징?
> (220915의 시각화, 230615의 개수 파악 …)

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

짝수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

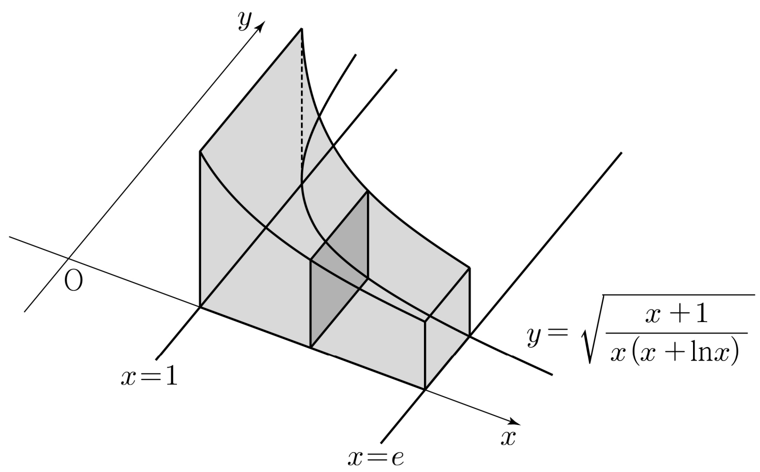
24. $\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx$ 의 값은? [3점]

① $10+\ln 5$ ② $10+\ln 7$ ③ $10+2\ln 3$
④ $10+\ln 11$ ⑤ $10+\ln 13$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2+3} = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n} - a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

26. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$ 과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

2

$e^x=t$, $g(x)=f(t)+t$

$e^x=1$, 함수 $f(x)+x$는 $(1, f(1)+1)$에서의 접선이 x축, 1에서 접함

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 역함수를 가지므로, $f(x)+1\ge0$,

정리하면 $f(x)+x=(x-1)^3$, $g(x)=(e^x-1)^3$

$g(\ln 3)=8$, $h'(8)=\frac{1}{g'(\ln 3)}=\frac{1}{12\times e^{\ln 3}}=\frac{1}{36}$

28, 30번 보다는 3점에 배치,
발상적인 장치 없어 쉬워 난이도 낮지
25111과 같은 느낌의 문항.

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

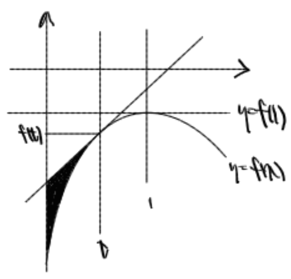
이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$

④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

3

$f'(1)=0$ 이므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다. ($f(1)$ 임의)



색칠한 부분을 구하려면

적분구간 넓이 − 삼각형부분 − x축까지의 부분

$\int_0^t |f(x)|dx - |\frac12\times t\times f'(t)\times t| - |f(t)\times t|$

$=-\int_0^t f(x)dx-\frac12 t^2f'(t)+tf(t)$,

부분적분 활용,

$g(t)=\underline{tf(t)-\int_0^t f(x)dx}-\frac12 t^2f'(t)=\underline{\int_0^t xf'(x)dx-\frac12 t^2f'(t)}$

$=-\int_0^t \frac12 x^2f''(x)dx$, $g(1)=\int_0^1 xf'(x)dx-0=\frac{e}{2}-\frac56$

$g'(t)=-\frac12 t^2f''(t)=\frac12 t^2+t^3e^{1-t^2}$, $g'(1)=\frac32$, 합 $\frac{e}{2}+\frac23$

$\int_0^t \{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$의 계산으로 처리도 가능하나,
개인적으로는 도형적으로 처리 = 처음부터 분리했을 때 부분적분 point 발견이 쉬움.
y축과 곡선, 접선 사이 넓이이므로 $f(1)=0$ 가정해도 문제X
해당 접선의 기울기는 $\lim_{t\to1} f''(1)t=3$으로 근사,
$g'(1)$은 증가하는 해당 넓이 $=\frac12\times1\times3=\frac32$으로 추해,
$g(1)$은 $0\times f(0)=0$임을 이용해 특수 case에서의 부분적분으로 구할 수 있다.
241128과 다르게 계산식 부분적분을 변별점으로 내세움

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

1-2 [illegible]

양수항 $\frac{20}{3}$, 음수항 $-\frac{10}{3}$, 전체항 $\frac{10}{3}$으로 수렴

홀수항 전부 $\times -\frac{1}{2}$, 공비 $-\frac{1}{2}$, $\frac{a_1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$, $a_1=5$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$,

$\frac{k(k+1)}{2}$에 의해 4의 배수 기준 $--++$ 반복,

$b_n=(-1)^n\times\frac{1}{2}a_{m+2n-1}$ → 공비 $-\frac{1}{4}$ 등비수열

$\frac{-\frac{1}{2}a_{m+1}}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{2}{5}a_{m+1}>\frac{1}{700}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{1400}$, $m=1,3,5,7,9$ → $\boxed{25}$

극한 요소로 등비 조사 약화,
이후 세심하게 정의된 수열+마지막 대소비교로 변별력 확보
역시 수열을 찾는 것이 어려운 것이 아닌,
조건을 계속 보여.

30. 두 상수 $a\,(1\le a\le 2)$, b에 대하여 함수
$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
(나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0,4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면,

$n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2-2 추론

(가): $\sin b=0$, $\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$
$\sin x=x$의 근이 $2\pi a+b$, $2\pi a+b=0$
$\sin b=\sin(2\pi a+b)=0$이므로, $2\pi a=n\pi$, $a=1$ or $\frac{3}{2}$ or 2

(나): $f'(x)=\cos(ax+b+\sin x)\times(a+\cos x)$
$1\le a\le 2$이므로, $ax+b+\sin x$는 극값을 갖지 않음
$a+\cos x$의 주기가 2π이므로, $\cos(ax+b+\sin x)$의 주기가 4π
$2\pi a$의 간격이 주기$(2n\pi)$와 다르므로, $a=\frac{3}{2}$, $b=-3\pi$

$f'(x)=\cos\left(\frac{3}{2}(x-2\pi)+\sin x\right)\times\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)$
$\frac{3}{2}+\cos x>0$, α는 $\cos\left(\frac{3}{2}(x-2\pi)+\sin x\right)=\cos g(x)$의 값으로
$0<x<4\pi$, $-3\pi<g(x)<3\pi$, $g(\alpha)=-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$, $\alpha_1=-\pi$, $n=3$
$3\cdot\pi-\frac{3}{2}\cdot(-3\pi)=\frac{15}{2}\pi$ $\boxed{17}$

담백하지만 꼼꼼한, 곳곳 숨어있는 조사 문항,
(가)에서 $\sin x=x$의 근임을 이용해서 관계식 하나,
첫 조건과 이어져 $2\pi a$가 반주기의 배수임을 확인
a의 범위에 의해 속이 항상 증가 확인,
내부미분의 주기와 비교, 겉미분의 주기가 $4\pi=2\pi a$가 아니다
반주기 배수, 범위와 결합해서 특정 가능
조사 → 풀이 순서가 정확히 조건 제시 순서인 연쇄적 문항.
조건 하나를 숨기는 것이 전부가 아닌, 쏙쏙 곱어먹어야 해결 가능.
완벽히 모르더라도 a의 값이 3개, 2개는 대칭이기에 적기 가능성 열어둠
벗나가더라도 α의 특정값을 물어봄으로써 제절점 방향 open
2411Z8의 역할 제1라 주관식이 수행, 킬러로 작용

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

짝수형

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에 대하여 $\vec{a}+3\vec{b}=(6,\ 9)$일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고, 준선이 $x=-1$인 포물선이 점 $(3,\ a)$를 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a, b, 6)$, $\mathrm{B}(-4, -2, c)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이 z축 위에 있고, 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 xy평면 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

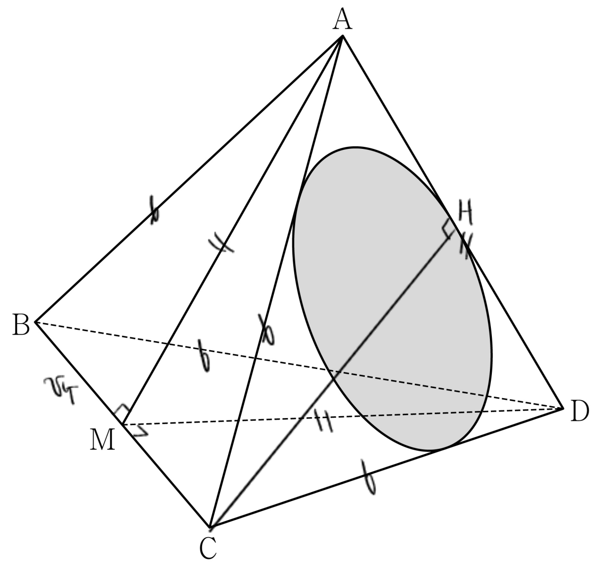
26. 자연수 $n\,(n \geq 2)$에 대하여 직선 $x = \dfrac{1}{n}$이 두 타원

$$C_1 : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad C_2 : 2x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

과 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P, Q라 하자.
타원 C_1 위의 점 P에서의 접선의 x절편을 α,
타원 C_2 위의 점 Q에서의 접선의 x절편을 β라 할 때,
$6 \leq \alpha - \beta \leq 15$가 되도록 하는 모든 n의 개수는? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4\sqrt{5}$ 인 사면체 ABCD에 대하여 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 삼각형 AMD가 정삼각형이고 직선 BC는 평면 AMD와 수직일 때, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



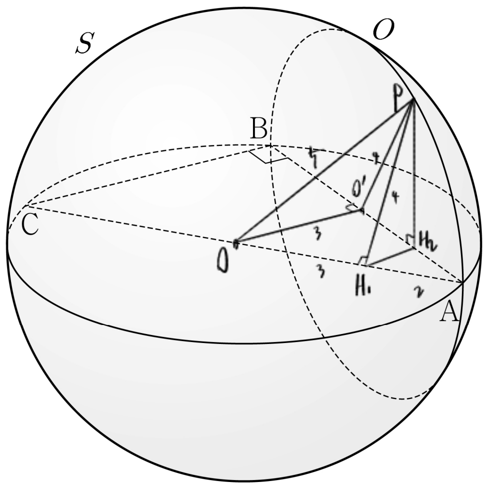
① $\dfrac{\sqrt{10}}{4}\pi$　② $\dfrac{\sqrt{10}}{6}\pi$　③ $\dfrac{\sqrt{10}}{8}\pi$　④ $\dfrac{\sqrt{10}}{10}\pi$　⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{12}\pi$

삼수선, $\overline{BC}\perp AMD$
$\overline{AM}=\overline{AD}=4$, $\overline{CH}=2\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}\cdot$둘레$\cdot r=$넓이, $r=\frac{8\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}$
$\triangle ACD=8\sqrt{2}$, 정사영넓이$=\frac{1}{4}\triangle BCD=2\sqrt{5}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}$
$2\pi\times\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{8}\pi$

계산과정 늘리며로 + 정사영 원초용으로 내접원 사용
이면각 정의 써도 되지만
빗변 구하기 위해 삼각비+피타 계산
> 차라리 내접원용으로 구한 넓이+정사영넓이: 전체 $\frac{1}{4}$
이므로 정사영 채택.

28. 좌표공간에 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 구 S가 있다. 직선 AB를 포함하고 평면 ABC에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 중에서 직선 AC까지의 거리가 4인 서로 다른 두 점을 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [4점]

① $\sqrt{43}$　② $\sqrt{47}$　③ $\sqrt{51}$　④ $\sqrt{55}$　⑤ $\sqrt{59}$

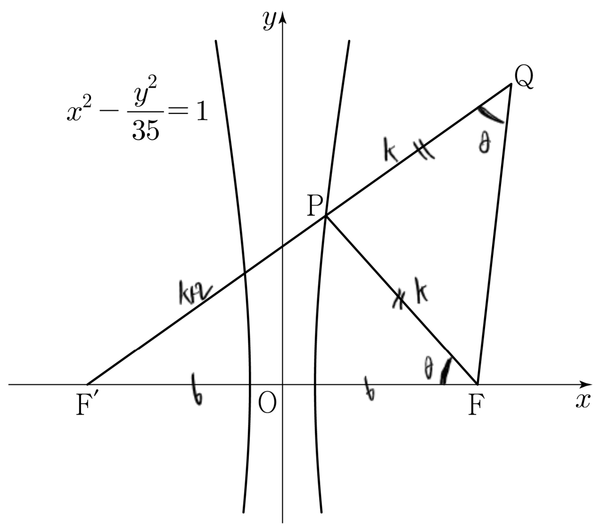


$r=\overline{OP}=5$, $\overline{OO'}=3$, $\overline{O'P}=\overline{O'A}=4$
$\overline{H_1P}=4$, $\overline{OH_1}=3$, $\overline{H_1A}=2$
$3:4:5$ 직각$\triangle$, $\overline{H_2A}=\frac{5}{2}$, $\overline{O'H_2}=\frac{3}{2}$
$\overline{PQ}^2=8^2-3^2=55$

구 성질 피타 & 닮음비 반..
$\overline{O'H_2}=\overline{H_1H_2}$이므로 거기서부터 닮음비 사용하는 곳.
이래28...

단답형

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{35}=1$이 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF′ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 점 Q를 잡자.
삼각형 QF′F와 삼각형 FF′P가 서로 닮음일 때, 삼각형 PFQ의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{QF'}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\cos\theta=\frac{2}{7}$, $p+q=\boxed{107}$

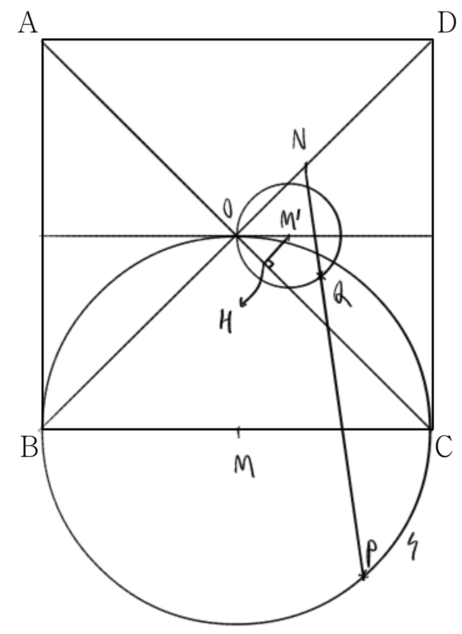
30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{XB}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{XB}}-\overrightarrow{\mathrm{XC}}|$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 S라 하자.
도형 S 위의 점 P에 대하여

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

를 만족시키는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]



$2|\overrightarrow{\mathrm{XM}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|$

$4\times(81-1)=320-4=\boxed{316}$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

공통

빈출 조건

	수I	수II
자연수·정수	1	2
최대·최소	3	2

수I

1. 지수함수와 로그함수
   1) 지수 : 1
   2) 로그 : 1
   3) 지수함수와 로그함수 : 1
   4) 지수·로그함수 활용 : 1

2. 삼각함수
   1) 삼각함수 : 1
   2) 삼각함수의 그래프 : 1
   3) 삼각함수의 활용 : 1

3. 수열
   1) 등차수열 : 0(+1)
   2) 등비수열 : 1
   3) 수열의 합 : 2
   4) 수학적 귀납법 : 1(+1)

수II

1. 함수의 극한과 연속
   1) 극한 : 1
   2) 연속 : 1

2. 미분
   1) 미분계수 : 1
   2) 도함수 : 1
   3) 도함수의 활용 : 접선 : 0
   4) 〃 : 증감과 극값 : 1
   5) 〃 : 그래프 : 0
   6) 〃 : 방정식·부등식 : 1

3. 적분 * 없어질까
   1) 부정적분 : 1
   2) 정적분 : 1
   3) 정적분으로 정의된 함수 * : 1
   4) 정적분의 활용 : 넓이 : 1
   5) 〃 : 속도·거리 : 1

정부 클레임을 적극 반영한 시험지.
24수능과 여러 의미로 대척점에 있는 듯.
6·9월 경향성을 그대로 가져감

추론, 접근 자체의 난이도는 급격히 하향시킴
발산적인 작업량, 특히 도구를 찾은 이후의 과정이 크게 증가
실수 요소 또한 눈에 띄게 증가
→ 정수·자연수 + 최대·최소 조건 문항을 복수 수록
일단 돌려보고 판단해도 무리 없게 설계하여 한 듯
허나, 생각(발상, 연상…)에 대한 보상 : 계산량 압축은 여전히 보임
아마 실질적인 계산량은 24와 비슷한 수준.

전형적인 킬러 유형은 약화시키거나, 초반에 하나씩 배치 (10, 15, 21)
중반쯤 신유형 배치로 뇌정지 유도 (14, 20)

발문의 경향성 변경, 준킬 일부 발전
비슷한 구조의 발문 반복 회피한 가능성 있음

미적

빈출 조건

합성·역함수 2

1. 수열의 극한
   1) 수열의 극한 : 1
   2) 급수 : 1

2. 미분법
   1) 여러 가지 함수의 미분 : 1
   2) 여러 가지 미분법 : 1
   3) 도함수의 활용 : 접선 : 1
   4) 〃 : 그래프 : 0
   5) 〃 : 방·부등식 : 0

3. 적분법
   1) 여러 가지 적분법 1
   2) 정적분의 활용 : 적분과 급수 : 0
   3) 〃 : 넓이 1
   4) 〃 : 부피 1
   5) 〃 : 거리와 속도 : 0

평가원이 유일하게 설계하는 선택과목
역시 24수능과 여러 의미로 대척점에 있는 듯.

30번의 경향은 공통과 동일한 듯.
수식적 접근이 (24에 비해) 매우 유리해짐
3점에 전형적 킬러 주제 약화시켜 배치
4점 문항에 계산쪽만 유지, 계산 역시 변별요소
15, 22의 역할은 30번이 대체, 통합 중 최고난이도일 듯
성적에 따른 선택과목 분산 의도.

1. 이차곡선
   1) 포물선 : 1
   2) 타원 : 1
   3) 쌍곡선 : 1

2. 평면벡터
   1) 벡터의 연산 : 0(+1)
   2) 벡터의 성분과 내적 : 2

3. 공간도형과 공간좌표
   1) 공간도형 : 1
   2) 공간좌표와 구 : 2

30번은 의견이 갈릴 수 있겠지만,
역시 틀을 벗어나지 않는 유형이다.
발문에 닮음을 직접 제시, 공통과 차별
기하는 역시 닮음에 주의.
풀이 방향성은 세밀하되, 돌아가도 풀리게끔 제작.