제 2 교시

2019학년도 KMO 고등부 1차 문제지

수학 영역

오일러

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

너만 보인단 말이야

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

한국교육과정평가원

2019학년도 KMO 고등부 1차 문제지

제 2 교시

수학 영역

단답형

1. 두 이차식 $P(x)$와 $Q(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $P(Q(x)) = P(x)Q(x)$을 만족한다. $Q(2) = 200$일 때, $Q(5)$의 값을 구하시오. [4점]

2. 양의 정수 123456을 재배열하여 만든 여섯자리 정수 $\overline{abcdef}$ 중 다음 조건을 만족하는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하시오. (예를 들어, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$이다. [4점]

$\overline{ab}$는 2의 배수, $\overline{abc}$는 3의 배수, $\overline{abcd}$는 4의 배수, $\overline{abcde}$는 5의 배수, $\overline{abcdef}$는 6의 배수이다.

3. 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 만나고, 두 직선 BC와 AD가 점 F에서 만난다. $\overline{\mathrm{AD}}=84$, $\overline{\mathrm{BC}}=28$, $\overline{\mathrm{BE}}=42$, $\overline{\mathrm{CE}}=56$일 때, $\overline{\mathrm{EF}}^2$을 1000으로 나눈 나머지를 구하시오. [4점]

4. 학생 A와 B가 포함된 9명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하고 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명인 경우의 수를 구하시오. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.) [4점]

5. 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 세 점 A, B, C와 선분 BC의 중점 M이 다음 세 조건을 모두 만족한다.

> (가) $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$
> (나) 점 M의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같다.
> (다) 선분 AM의 중점의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같다.

점 A와 B의 x좌표를 각각 a, b라 할 때, $144a^2b^2$의 값을 구하시오. [5점]

6. $\dfrac{300}{2n+1}+\dfrac{935}{5n+1}$이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [5점]

7. 사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{AO}}=3$, $\overline{\mathrm{BO}}=5$, $\overline{\mathrm{CO}}=4$, $\overline{\mathrm{DO}}=3$이다. 두 점 A, C에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$, 두 점 B, D에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$이라 하고, 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{C_2}$, 두 점 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하자. 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 넓이를 S라 할 때, $64S$의 값을 구하시오. [5점]

8. $\dfrac{1}{11}\displaystyle\sum_{n=1}^{1000}\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]\right)$의 값을 구하시오. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.) [5점]

9. 자연수 n에 대하여 서로 다른 자연수 x, y, z가
$x+y+z=n$을 만족할 때, $xy+yz+zx$의 최댓값을 a_n라 하자.
$\sum_{k=1}^{8} a_{3k+4}$의 값을 구하시오. [5점]

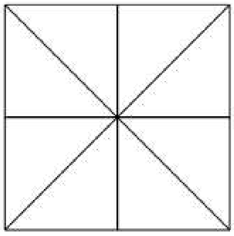
10. 60보다 작은 자연수 a, b, c, d, e에 대하여

$$\frac{11^7}{60^5}=\frac{a}{60}+\frac{b}{60^2}+\frac{c}{60^3}+\frac{d}{60^4}+\frac{e}{60^5}$$

일 때, $a+b+c+d+e$의 값을 구하시오. [5점]

11. 평행사변형 ABCD에서 $\angle ABD = 43^\circ$ 이다. 각 BAD의 이등분선과 직선 BC, CD와의 교점을 각각 E, F라 하고, 삼각형 CEF의 외심을 O라 하자. $\angle ECO = 31^\circ$, $\angle EBO = x^\circ$ 라 할 때, x의 값을 구하시오. (단, $0 \leq x \leq 180$이다.) [5점]

12. 다음과 같이 정사각형을 8등분한다. 각 칸을 빨간색 또는 파란색으로 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.) [5점]



13. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$\sum_{k=1}^{n}|x-k|=\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2+n-1$$

의 해를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. $2\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오. [5점]

14. 자연수 160401의 모든 소수인 약수의 합을 구하시오. [5점]

15. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{BC}}=11$, $\overline{\mathrm{CA}}=10$이다. 삼각형 ABC의 내접원 I가 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하고, 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 직선 EF와 만나는 점을 P, 직선 PD가 원 I와 만나는 점 중 D가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 DEQ의 넓이를 S라 할 때, $\left(\frac{11}{8}S\right)^2$의 값을 구하시오. [5점]

16. 카드 9장에 2부터 10까지의 정수가 하나씩 적혀 있으며 각 카드에 적힌 수는 모두 다르다. 이 카드를 상자 A, B, C에 각각 2장, 3장, 4장씩 넣을 때, 상자 A에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 a, 상자 B에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 b, 상자 C에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 c라 하자. a, b, c의 최대공약수가 1이 되도록 상자에 넣는 경우의 수를 구하시오. [5점]

17. 세 실수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=147$을 만족할 때, $x+y+z-xy-yz-zx$의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오. [6점]

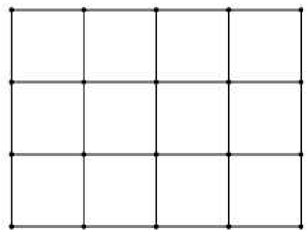
18. 사차방정식 $x^4-101^2x^2+n^2=0$이 정수해를 가지도록 하는 자연수 n을 1000으로 나눈 나머지를 구하시오. [6점]

19. 원 O에 내접하는 오각형 ABCDE가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

> (가) 변 BC와 DE가 평행하다.
> (나) $\angle \mathrm{BAC} = 2\angle \mathrm{CAD}$ (단, $\angle \mathrm{CAD} < 90^\circ$)
> (다) 점 C와 D에서의 원 O의 접선이 점 J에서 만나고 $\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{AJC}$이다.

$\overline{\mathrm{BC}} = 30$, $\overline{\mathrm{DE}} = 50$일 때, $\overline{\mathrm{CD}}$의 값을 구하시오. [6점]

20. 다음과 같이 1×1 정사각형 12개를 붙여서 직사각형을 만들었다. 이 도형의 20개의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 평행사변형의 개수를 구하시오. [6점]



※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.