우일신 又日新

매일
조금씩
새로워지기를
바라며

파본형
월간
N제

thinkers' Group for better thinking

25년 1월호

공통/수학1

지수 / 로그 30제

정답 및 해설지

우일신又日新

매일 조금씩 새로워지기를 바라며

파본형 월간 N제

25년 1월호

공통/수학1

지수/로그 30제

※ 정답 및 해설은 문제 하단에 적힌
넘버링 기준으로 작업되어 있습니다.

▶ **1회 정답**

01 (9번)	02 (10번)	03 (11번)	04 (12번)	05 (13번)	06 (14번)	07 (15번)	08 (20번)	09 (21번)	10 (22번)
③	①	④	④	③	③	③	11	4	65

▶ **2회 정답**

11 (9번)	12 (10번)	13 (11번)	14 (12번)	15 (13번)	16 (14번)	17 (15번)	18 (20번)	19 (21번)	20 (22번)
③	④	②	⑤	⑤	③	③	28	100	18

▶ **3회 정답**

21 (9번)	22 (10번)	23 (11번)	24 (12번)	25 (13번)	26 (14번)	27 (15번)	28 (20번)	29 (21번)	30 (22번)
②	③	②	③	④	①	③	83	27	46

01

정답 ③

주어진 값을 유리수 지수로 표현하면

$$(\sqrt{2})^{a+b}=2^{\frac{b+a}{2}},\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{a-b}=2^{\frac{b-a}{2}}$$

이다. 이 값이 모두 4의 배수가 되려면

$$b+a=4,\ 6,\ 8,\ \cdots \qquad \cdots ㉠$$
$$b-a=4,\ 6,\ 8,\ \cdots \qquad \cdots ㉡$$

㉠에서 $a+b=4$이면
($a+b$의 최솟값을 찾으면 되므로 가장 작은 것부터 관찰)

$$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

이고 어떤 경우에도 ㉡을 만족시키지 않는다.

㉠에서 $a+b=6$이면 $a=1$, $b=5$인 경우 ㉡을 만족시킨다.
따라서 $a+b$의 최솟값은 6이다.

$\therefore\ 6$

02

정답 ①

이차방정식

$$(\log_b 2)x^2+(\log_3 a\times\log_2 27)x-1=0$$
$$\Leftrightarrow\ (\log_b 2)x^2+(3\log_2 a)x-1=0$$

의 서로 다른 두 실근이 각각 $\log_2\sqrt{a}$, $2\log_2 b$이므로
근과 계수와의 관계에 의해

$$(\text{합}) : \log_2\sqrt{a}+2\log_2 b=-\frac{3\log_2 a}{\log_b 2} \qquad \cdots ㉠$$

$$(\text{곱}) : \log_2\sqrt{a}\times 2\log_2 b=-\frac{1}{\log_b 2} \qquad \cdots ㉡$$

이때 $\log_2 a=A$, $\log_2 b=B$로 치환하면
(a, b는 모두 1이 아니므로 $A\neq 0$, $B\neq 0$)

$$\frac{1}{2}A+2B=-3AB,\quad AB=-B$$

이다. 연립해서 계산하면 $A=-1$, $B=-\frac{1}{2}$

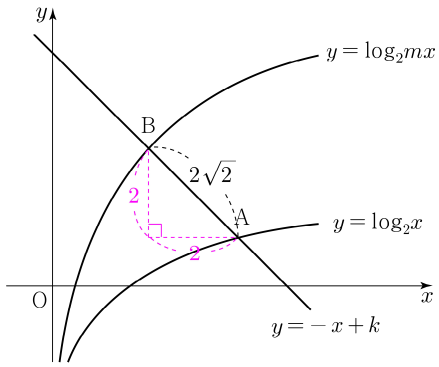
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $a\times b=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{4}$

03

정답 ④

주어진 상황을 그래프로 표현해보자.



직선 AB의 기울기가 -1이고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이므로 두 점 A, B의 x좌표의 차는 2이다. 즉, 두 점 A, B의 좌표를

$$\mathrm{A}(p,\ q),\quad \underbrace{\mathrm{B}(p-2,\ q+2)}_{x\text{좌표는 }-2,\ y\text{좌표는 }+2}$$

로 두면

$$q=\log_2 p \qquad \cdots ㉠$$
$$q+2=\log_2 m(p-2) \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 만족시키는 세 자연수 p, q, m이 존재해야 한다.
먼저 ㉠을 만족시키는 두 자연수 p, q의 순서쌍 (p,q)를 고려하면

$$(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (8,\ 3),\ (16,\ 4),\ \cdots$$

이때 ㉡을 만족시키는 자연수 m이 존재하는 경우는
$p=4$, $q=2$뿐이고, 이때 m, k의 값은 $m=8$, $k=6$이다.

$\therefore\ 14$

* Remark

숫자가 크지 않고, 계산이 복잡하지 않기에 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (p,q)를 하나씩 ㉡에 대입해보며 조건을 만족시키는 자연수 m을 찾는 과정도 꽤나 효율적이라고 볼 수 있다. 하지만, 대입하는 것이 아닌 논리적인 풀이를 원한다면 다음과 같은 사고 과정을 거쳐야 한다.

㉠ : $p=2^q$
㉡ : $m(p-2)=2^{q+2}$

㉠에서 p는 2의 거듭제곱 꼴이고,
㉡에서

$$\underline{m}\times\underline{(p-2)}=2^{q+2}$$: 2의 거듭제곱 꼴임!

각각 모두 2의 거듭제곱 꼴이어야 함!

이때

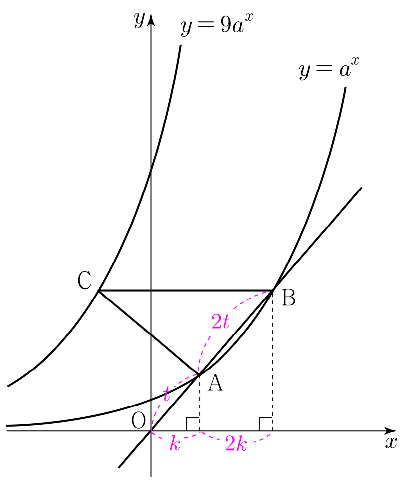
p도 2의 거듭제곱 꼴, $(p-2)$도 2의 거듭제곱 꼴

인 경우는 $p=4$가 유일!

04

정답 ④

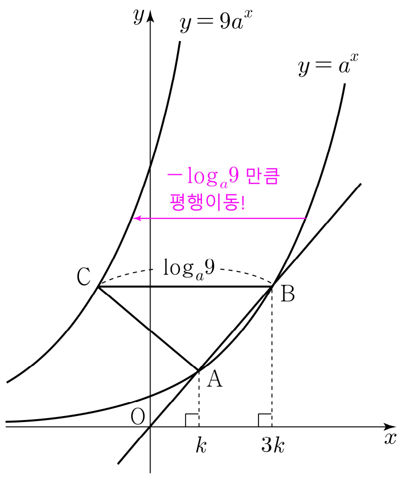
다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:2$에서 두 점 A, B의 x좌표의 크기는 $1:3$이다.



두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(k,\ a^k)$, $\mathrm{B}(3k,\ a^{3k})$로 두자. 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{a^k}{k}=\frac{a^{3k}}{3k}\ \rightarrow\ a^k=\sqrt{3}$$

이때 곡선 $y=9a^x$ 는 곡선 $y=a^x$ 를 x 축의 방향으로 $-\log_a 9$ 만큼 평행이동시킨 곡선이다. 즉, $\overline{\mathrm{BC}}=\log_a 9$ 이다.



따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\log_a 9\times\left(a^{3k}-a^k\right)=6\sqrt{3} \;\rightarrow\; \log_a 9=6$$

$(\because\ a^k=\sqrt{3})$

이므로 $a^6=9$ 이다.

$\therefore\ 9$

05

정답 ③

조건 (나)에 의해

$f(2)$ 의 제곱근 중 음의 실수인 것의 개수와
$f(3)$ 의 세제곱근 중 음의 실수인 것의 개수가 같고, $\cdots$ ㉠

$f(7)$ 의 일곱제곱근 중 음의 실수인 것의 개수와
$f(8)$ 의 여덟제곱근 중 음의 실수인 것의 개수가 같다. $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 상황을 찾기 위해 케이스를 분류하자.

Step 1 ㉠을 만족시키는 상황에 대한 케이스 분류

$f(2)$ 의 제곱근 중 음의 실수인 것의 개수를 a,
$f(3)$ 의 세제곱근 중 음의 실수인 것의 개수를 b 로 두면 $a=b$ 인 상황은 $a=b=1$ 이거나 $a=b=0$ 으로 2가지 경우가 있다.

(1) $a=b=1$ 인 경우

$a=b=1$ 이려면

$$f(2)>0,\quad f(3)<0$$

이어야 한다. 이때 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(2,3)$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 적어도 하나 존재하므로 조건 (가)에 모순!

(2) $a=b=0$ 인 경우

$a=b=0$ 이려면

$$f(2)\le 0,\quad f(3)\ge 0 \qquad \cdots ㉢$$

이면 된다.

Step 2 ㉡을 만족시키는 상황에 대한 케이스 분류

$f(7)$ 의 일곱제곱근 중 음의 실수인 것의 개수를 c,
$f(8)$ 의 여덟제곱근 중 음의 실수인 것의 개수를 d 로 두면 $c=d$ 인 상황은 $c=d=1$ 이거나 $c=d=0$ 으로 2가지 경우가 있다.

(1) $c=d=1$ 인 경우

$c=d=1$ 이려면

$$f(7)<0,\quad f(8)>0$$

이어야 한다. 이때 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(7,8)$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 적어도 하나 존재하므로 조건 (가)에 모순!

(2) $c=d=0$ 인 경우

$c=d=0$ 이려면

$$f(7)\ge 0,\quad f(8)\le 0 \qquad \cdots ㉣$$

이면 된다.

이때 조건 (가)와 ㉢, ㉣을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$ 는

$f(2)=0,\ f(7)=0$ 일 때 : $f(x)=-(x-2)(x-7)$
$f(2)=0,\ f(8)=0$ 일 때 : $f(x)=-(x-2)(x-8)$
$f(3)=0,\ f(7)=0$ 일 때 : $f(x)=-(x-3)(x-7)$
$f(3)=0,\ f(8)=0$ 일 때 : $f(x)=-(x-3)(x-8)$

이다. 따라서 $f(5)$ 의 최댓값은 9, 최솟값은 4 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 13 이다.

$\therefore\ 13$

06

정답 ③

Step 1 방정식 $\{f(x)\}^2-11|f(x)|+18=0$ 의 해석

함수 $f(x)=|2^x-n|-3$ 에 대하여 방정식

$$\{f(x)\}^2-11|f(x)|+18=0$$
$$\Leftrightarrow \ |f(x)|^2-11|f(x)|+18=0$$
$$\Leftrightarrow \ (|f(x)|-2)(|f(x)|-9)=0$$
$$\Leftrightarrow \ |f(x)|=2 \text{ 또는 } |f(x)|=9$$

의 서로 다른 실근의 개수는 방정식

$$|2^x-n|=1, \quad |2^x-n|=5,$$
$$|2^x-n|=12, \quad \cancel{|2^x-n|=-6}$$

절댓값이 음수가 될 수 없음!

의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

Step 2 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 홀수

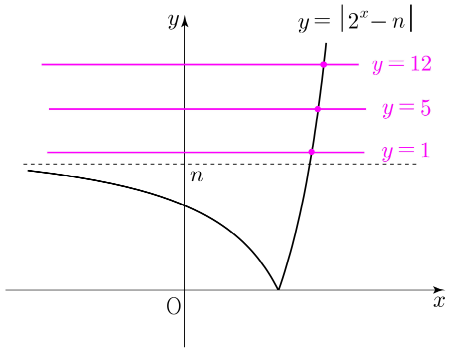
방정식

$$|2^x-n|=1, \quad |2^x-n|=5, \quad |2^x-n|=12$$

의 서로 다른 실근의 개수를 각각 α, β, γ 로 둘 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값이 홀수인 케이스는

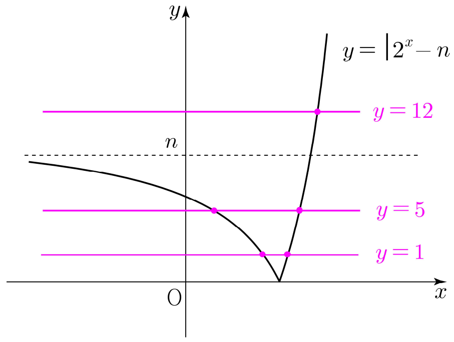
$$\alpha=\beta=\gamma=1 \quad \text{또는} \quad \alpha=\beta=2,\ \gamma=1$$

(1) $\alpha=\beta=\gamma=1$ 인 경우



이를 만족시키는 자연수 n의 값은 $n=1$뿐이다.

(2) $\alpha=\beta=2$, $\gamma=1$ 인 경우



이를 만족시키는 자연수 n의 값은 $6 \leq n \leq 12$

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은

$$n=1,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$$

이므로 그 합은 64 이다.

$\therefore\ 64$

07

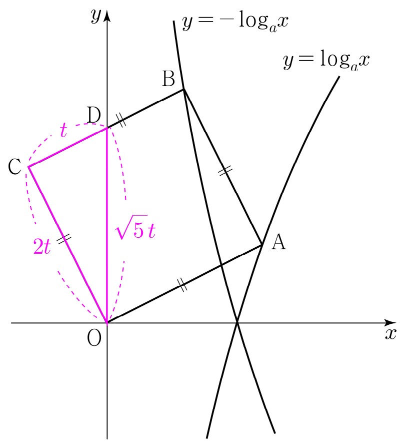
정답 ③

정사각형 OABC 에 대하여 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 이므로

$$\overline{OA}:\overline{OD}=2:\sqrt{5} \ \rightarrow \ \overline{OC}:\overline{OD}=2:\sqrt{5}$$

이다. 즉, 삼각형 OCD 에서 피타고라스 정리에 의해

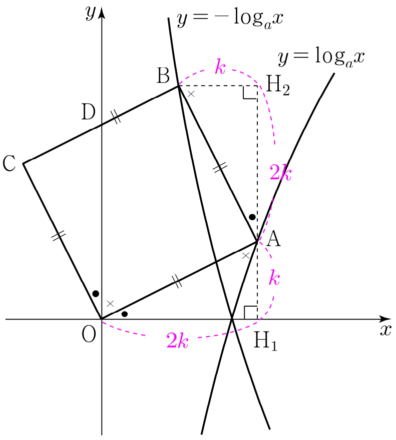
$\overline{OC}:\overline{CD}=2:1$ 이다.



이때 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_1, 점 B 에서 직선 AH_1 에 내린 수선의 발을 H_2 라 두면

$$\angle \mathrm{AOH}_1 = \angle \mathrm{DOC}$$

이므로 두 삼각형 OAH_1 과 ODC 는 닮음이고,
두 삼각형 OAH_1 과 ABH_2 는 합동이다.



$\overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{CD}} = 2:1$ 에서

$$\overline{\mathrm{OH}_1} : \overline{\mathrm{H}_1\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{AH}_2} : \overline{\mathrm{H}_2\mathrm{B}} = 2:1$$

이므로 두 점 A, B 의 좌표를 $\mathrm{A}(2k,\ k)$, $\mathrm{B}(k,\ 3k)$ 로 두자.

두 점 A, B 는 각각 $y=\log_a x$, $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$$k = \log_a 2k \quad \cdots ㉠$$
$$3k = -\log_a k \quad \cdots ㉡$$

이 성립한다. ㉠, ㉡을 연립하여 계산하면

$$k = 2^{-\frac{3}{4}},\quad \log_2 a = 2^{-\frac{5}{4}}$$

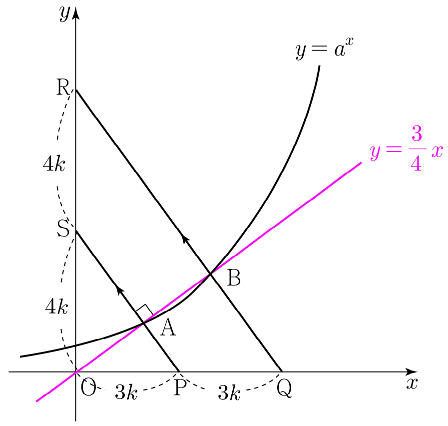
이다.

$\therefore\ 2^{-\frac{5}{4}}$

08

정답 11

사각형 PQRS 는 사다리꼴이므로 두 직선 PS 와 QR 은 서로 평행하고, $\overline{\mathrm{PS}} : \overline{\mathrm{RQ}} = 1:2$ 이므로 삼각형 OPS 와 삼각형 OQR 의 닮음비가 $1:2$ 이다. 즉, $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{OS}} = \overline{\mathrm{SR}}$



$\overline{\mathrm{RS}} : \overline{\mathrm{PQ}} = 4:3$ 이므로 $\overline{\mathrm{RS}} = 4k$, $\overline{\mathrm{PQ}} = 3k$ 로 두면 직선 PS 의 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 이므로 이 직선과 수직인 직선 OA 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다. 이때

$$\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{PQ}}_{(=1:1)} \quad \rightarrow \quad \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$$

이므로 두 점 A, B 의 좌표를 $\mathrm{A}(4t,\ 3t)$, $\mathrm{B}(8t,\ 6t)$ 로 두자.
두 점 A, B 는 모두 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$$3t = a^{4t} \quad \cdots ㉠$$
$$6t = a^{8t} \quad \cdots ㉡$$

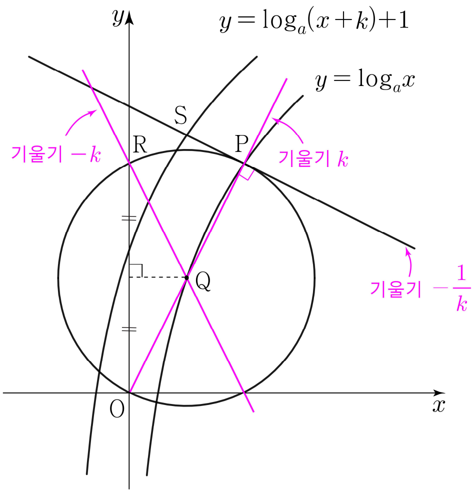
㉠, ㉡을 연립하여 계산하면 $t=\frac{2}{3}$, $a=2^{\frac{3}{8}}$ 이다.
따라서 $\log_2 a = \frac{3}{8}$ 이므로 $p+q=11$ 이다.

$\therefore\ 11$

09

정답 4

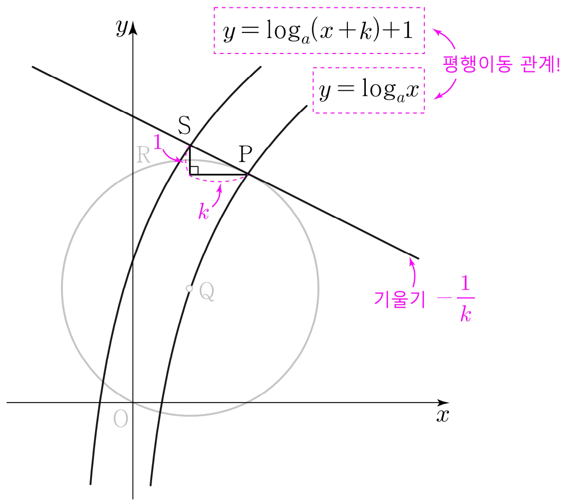
Step 1 **각 점들 사이의 관계 파악**



선분 OR은 중심이 Q인 원의 현이고,
두 점 O, R는 y축 위의 점이므로

(직선 QR의 기울기)=−(직선 OQ의 기울기)

즉, 직선 OQ의 기울기는 k이고, 이 직선과 수직인 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{k}$이다.



$y=\log_a x$

⤵ x축의 방향으로 $-k$, y축의 방향으로 1만큼 평행이동!

$y=\log_a(x+k)+1$

직선 PS의 기울기가 $-\frac{1}{k}$이므로 두 점 세 점 P, Q, S의 좌표를 각각

$\mathrm{P}(2p,\ 2pk)$: 직선 $y=kx$ 위의 점!

$\mathrm{Q}(p,\ pk)$: 선분 OP의 중점!

$\mathrm{S}(2p-k,\ 2pk+1)$: 점 P를 x축의 방향으로 $-k$, y축의 방향으로 1만큼 평행이동!

로 두자.

Step 2 **식에 대입하여 계산하기**

두 점 P, Q는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$$2pk=\log_a 2p \quad \cdots ㉠$$
$$pk=\log_a p \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $p=2$이다. 조건 (나)에서

$$\triangle \mathrm{ORS}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\times(\text{점 S의 } x\text{좌표})$$
$$=\frac{1}{2}\times 4k\times(4-k) \leftarrow p=2\text{이므로 } k\text{로만 표현 가능!}$$
$$=8$$

이므로 $2k(4-k)=8 \ \rightarrow \ k=2$

$p=2,\ k=2$를 다시 ㉡에 대입하면

$$4=\log_a 2 \ \rightarrow \ a^4=2$$

따라서 $a^4\times k=4$이다.

$\therefore$ 4

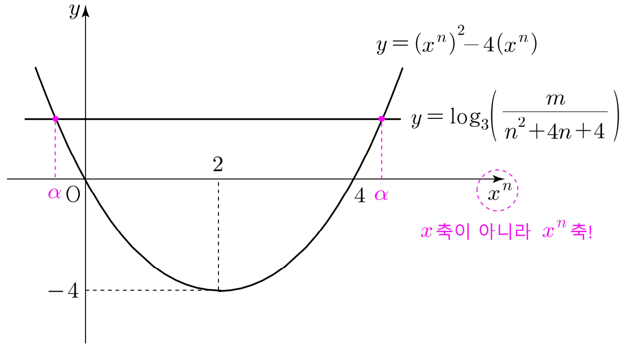
10

정답 65

Step 1 **주어진 방정식 해석**

$$(x^n)^2-4(x^n)=\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right) \quad \cdots ㉠$$

의 해를 관찰하기 위해 함수 $y=(x^n)^2-4(x^n)$의 그래프와 직선 $y=\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)$와 만나는 점의 x좌표를 관찰해보자.



교점이 $x^n=\alpha$에서 발생했다면, 방정식 ㉠은 α의 n제곱근 중 실수인 것을 해로 갖는다.

Step 2 **n의 홀/짝 여부에 따른 $f(n)$의 값**

방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 $f(n)$이므로 $f(n)$의 값을 판단하기 위해선

① α의 개수 → $\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)$과 -4의 대소

② α의 부호 → $\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)$과 -4, 0의 대소

③ n의 홀짝성

을 모두 고려해야 한다. 이때 α의 개수(①)와 부호(②)는 모두 $\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)$의 값이 속한 범위에 따라 달라지므로 n의 홀/짝 여부에 따라 케이스를 분류하자.

(1) n이 홀수일 때

α의 부호에 관계없이 α의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 1이다. 즉, α의 개수만 고려하면 되므로

$$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right) \text{ vs } -4$$

의 대소 관계만 고려해도 충분하다.

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)>-4$인 경우 : $f(n)=2$

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)=-4$인 경우 : $f(n)=1$

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)<-4$인 경우 : $f(n)=0$

(2) n이 짝수일 때

α의 부호에 따라 α의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 달라진다. 즉, $\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)$와 -4, 0의 대소 관계를 모두 고려해야 하므로

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)>0$인 경우 : $f(n)=2$ $(=0+2)$

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)=0$인 경우 : $f(n)=3$ $(=1+2)$

$-4<\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)<0$인 경우 : $f(n)=4$ $(=2+2)$

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)=-4$인 경우 : $f(n)=2$

$\log_3\left(\frac{m}{n^2+4n+4}\right)<-4$인 경우 : $f(n)=0$

Step 3 **$f(5)+f(6)+f(7)$이 되도록 하는 m의 값**

$f(5)$와 $f(7)$의 값은 각각 0, 1, 2중 하나이고,
$f(6)$의 값은 0, 2, 3, 4중 하나이므로

$$f(5)+f(6)+f(7)=7$$

에서 $f(5)+f(7)$의 최댓값은 4이므로
$f(6)$의 값은 3 이상이어야 한다.

(1) $f(6)=3$인 경우

$f(6)=3$이면

$$\log_3\left(\frac{m}{6^2+4\times6+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{6^2+4\times6+4}=1$$

$$\Leftrightarrow m=64$$

* Remark

사실 엄밀하게 풀자면, $f(6)=3$을 만족시키는 $m=64$에 대하여

$$f(5)=f(7)=2$$

를 만족시키는지도 판단해봐야 한다. 이때

$$\log_3\left(\frac{64}{5^2+4\times5+4}\right)>\log_3\left(\frac{64}{7^2+4\times7+4}\right)>-4$$

임을 확인해보면 성립하므로 $m=64$는 조건을 만족시키는 m의 값으로 결론 내릴 수 있다!

(2) $f(6)=4$ 인 경우

$f(6)=4$ 이면 $f(5)+f(7)=3$ 이어야 하므로

$$f(5)=2,\ f(7)=1 \quad \text{또는} \quad f(5)=1,\ f(7)=2$$

이때

$$\log_3\left(\frac{m}{5^2+4\times5+4}\right) > \log_3\left(\frac{m}{7^2+4\times7+4}\right)$$

이므로 $f(5)=2$, $f(7)=1$ 이어야 한다.
즉, $f(7)=1$ 에서

$$\log_3\left(\frac{m}{7^2+4\times7+4}\right)=-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{7^2+4\times7+4}=\frac{1}{81}$$

$$\Leftrightarrow m=1$$

* Remark
마찬가지로, $f(7)=1$ 을 만족시키는 $m=1$ 에 대하여

$$f(5)=2,\quad f(6)=4$$

를 만족시키는지도 판단해봐야 한다. 이때

$$\log_3\left(\frac{1}{5^2+4\times5+4}\right) > -4,$$

$$-4<\log_3\left(\frac{1}{6^2+4\times6+4}\right)<0$$

임을 확인해보면 성립하므로 $m=1$ 은 조건을 만족시키는 m 의 값으로 결론내릴 수 있다!

[Step 3]의 (1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 모든 실수 m 의 값의 합은 $64+1=65$ 이다.

$\therefore\ 65$

11

정답 ③

주어진 조건을 살펴보면

$$\log_2 a+\log_2 b=\frac{3}{4}$$

$$\log_{\sqrt{a}} 2+\log_{\sqrt{b}} 2=12 \qquad \cdots ㉠$$

이때 로그 계산의 편의성을 위해 ㉠의 형태를 변형하면

$$\log_{\sqrt{a}} 2+\log_{\sqrt{b}} 2=12 \Leftrightarrow \log_a 2+\log_b 2=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}=6$$

이다. 즉, 주어진 조건은

$$\log_2 a+\log_2 b=\frac{3}{4},\quad \frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}=6$$

이므로 $\log_2 a=A$, $\log_2 b=B$ 로 치환하면

$$A+B=\frac{3}{4},\quad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}=6$$

이므로 연립해서 계산하면 $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$a<b$ 이므로 $(\log_2 a=)A<B\ (=\log_2 b)$

$$\log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}$$

$$=\frac{B}{A}$$

$$=2$$

이다.

$\therefore\ 2$

12

정답 ④

함수 $g(n)$을 $g(n)=(n-a)(n-b)$로 두면

: n의 홀/짝 여부 및 $g(n)$의 부호에 따라 $f(n)$의 값이 달라짐!

$$\sum_{n=2}^{10} f(n)=12, \quad \sum_{n=2}^{20} f(n)=20 \quad \rightarrow \quad \sum_{n=11}^{20} f(n)=8$$

이고, $f(1)=f(3)= \cdots = f(19)=1$이므로

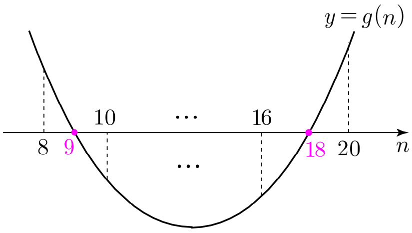
$g(n)$의 부호에 상관없이 n이 홀수이면 $f(n)=1$

$$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=8 \quad \cdots ㉠$$
$$f(12)+f(14)+f(16)+f(18)+f(20)=3 \quad \cdots ㉡$$

이어야 한다. ㉠, ㉡을 만족시키는 $g(n)$의 부호를 관찰해보면

㉠ : $g(2)$ $g(4)$ $g(6)$ $g(8)$ $g(10)$
$+$ $+$ $+$ $+$ $-$

㉡ : $g(12)$ $g(14)$ $g(16)$ $g(18)$ $g(20)$
$-$ $-$ $-$ 0 $+$



이때 a, b는 모두 정수이어야 하므로 $a=9$, $b=18$에서 $a+b=27$이다.

$\therefore\ 27$

13

정답 ②

조건 (나)에서

$$(\triangle \mathrm{OAC}) : (\triangle \mathrm{OBD}) = 4 : 9$$

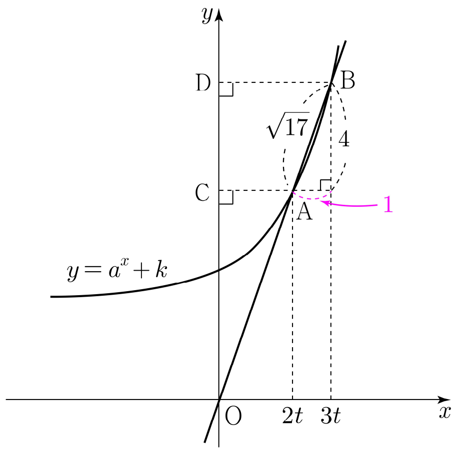
이고, 삼각형 OAC와 삼각형 OBD가 닮음이므로 닮음비는

$$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BD}} = 2 : 3$$

즉, 두 점 A, B의 좌표를 각각

$$\mathrm{A}\left(2t,\ a^{2t}+k\right),\ \mathrm{B}\left(3t,\ a^{3t}+k\right)$$

로 두자. 이때 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{17}$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$이므로 두 점 A, B의 x좌표의 차는 1이다. (그림 참고)



즉, $2t+1=3t$에서 $t=1$이므로

$$\left(a^3+k\right)-\left(a^2+k\right)=4 \quad \rightarrow \quad a=2$$

즉, 직선 AB의 방정식은 $y=4x$이므로 두 점 A, B의 좌표는

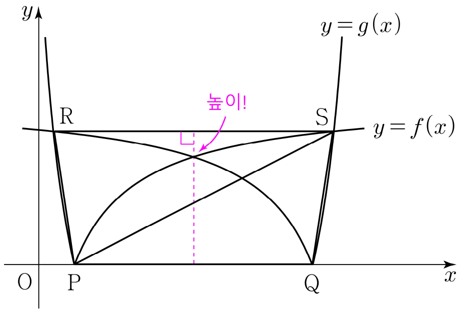
$$\mathrm{A}\left(2,\ \underbrace{4+k}_{=8}\right),\ \mathrm{B}\left(3,\ \underbrace{8+k}_{=12}\right)$$

에서 $k=4$이다. 따라서 $S_1=10$, $S_2=8$이므로 $k+S_1+S_2=22$이다.

$\therefore\ 22$

14

정답 ⑤



두 삼각형 PQS와 RPS의 밑변을 각각 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{RS}}$로 보면 두 삼각형의 높이가 같으므로

$$\triangle \mathrm{PQS} : \triangle \mathrm{RPS} = 1 : \sqrt{5} \;\rightarrow\; \overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{RS}} = 1 : \sqrt{5}$$

두 점 P, Q는 두 곡선이 x축과 만나는 점이므로

$$\mathrm{P}(1,0),\quad \mathrm{Q}(k-1,0) \;\rightarrow\; \overline{\mathrm{PQ}} = k-2$$
$$\rightarrow\; \overline{\mathrm{RS}} = \sqrt{5}(k-2)$$

이때 두 점 R, S는

$y=-\log_2 x$, $y=\log_2(-x+k)$의 교점 : R
$y=\log_2 x$, $y=-\log_2(-x+k)$의 교점 : S

이므로 방정식

$$\log_2(-x+k) = -\log_2 x \;\rightarrow\; x^2-kx+1=0$$

(단, $0<x<k$)

의 서로 다른 두 실근이 두 점 R, S의 x좌표이다. 근과 계수와의 관계에 의해 두 점 R, S의 x좌표를 각각 $\frac{1}{\alpha}$, α (단, $1<\alpha<k$)로 두면

두 근의 곱이 1이므로 역수 관계!

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = k$$

이다.

이때 선분 RS의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{RS}} &= \alpha - \frac{1}{\alpha} \\ &= \sqrt{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 4} \\ &= \sqrt{k^2-4}\end{aligned}$$

이므로

$$\sqrt{5}(k-2) = \sqrt{k^2-4} \;\Leftrightarrow\; 5(k-2)^2 = k^2-4$$

에서 $k=3$ ($\because\ k>2$)

$\therefore\ 3$

15

정답 ⑤

조건 (가)에서 가능한 정수 k의 값은

$$k=-1,\ -2,\ \cdots,\ -6$$

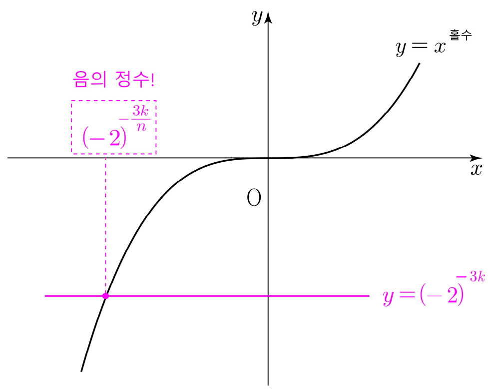
조건 (나)에서 방정식

$$x^n = \left(-\frac{1}{8}\right)^k \;\Leftrightarrow\; x^n = (-2)^{-3k}$$

: 이때 $3k$의 값은 $-3k=3,\ 6,\ \cdots,\ 18$

의 근 중 음의 정수가 존재하도록 하는 상황을 찾기 위해 n의 홀/짝 여부에 따라 케이스를 분류하자.

(1) n이 홀수인 경우



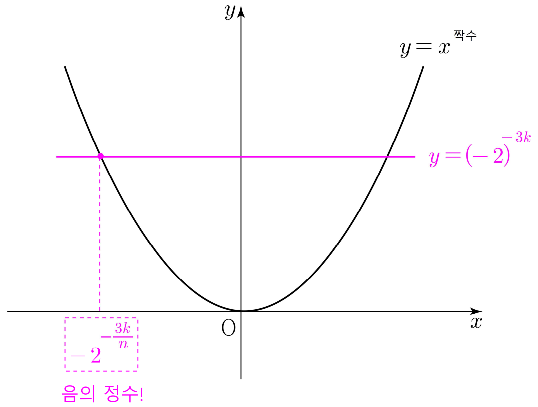
방정식 $x^n = (-2)^{-3k}$의 근 중 음의 정수가 존재하려면

$(-3k)$은 홀수, n은 $(-3k)$의 약수

이어야 하므로

① $-3k=3$일 때, $n=3$ (1개)
② $-3k=9$일 때, $n=3,\ 9$ (2개)
③ $-3k=15$일 때, $n=3,\ 5,\ 15$ (3개)

(2) n 이 짝수인 경우



방정식 $x^n=(-2)^{-3k}$ 의 근 중 음의 정수가 존재하려면

$(-3k)$ 은 짝수, n 은 $(-3k)$ 의 약수

이어야 하므로

① $-3k=6$ 일 때, $n=2,\ 6$ (2개)
② $-3k=12$ 일 때, $n=2,\ 4,\ 6,\ 12$ (4개)
③ $-3k=18$ 일 때, $n=2,\ 6,\ 18$ (3개)

(1), (2)에 의해 모든 순서쌍 (n, k) 의 개수는

$$1+2+3+2+4+3=15$$

이다.

$\therefore\ 15$

16

정답 ③

곡선 $y=2^{-x}$ 과 직선 $x=a$ 가 만나는 점이 P,
곡선 $y=-\log_4\left(x+\frac{k}{16}\right)$ 와 직선 $y=a$ 가 만나는 점이 Q 이므로
두 점 P, Q 의 좌표는

$$\mathrm{P}(a,\ 2^{-a}),\quad \mathrm{Q}\left(4^{-a}-\frac{k}{16},\ a\right)\ \rightarrow\ \underline{\mathrm{Q}'\left(a,\ 4^{-a}-\frac{k}{16}\right)}$$

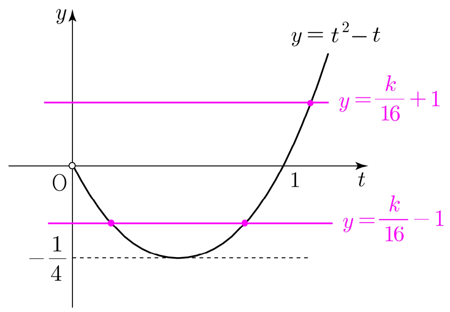
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점!

이때 $\overline{\mathrm{PQ}'}=1$ 이므로

$$\left|4^{-a}-2^{-a}-\frac{k}{16}\right|=1\ \Leftrightarrow\ \left|t^2-t-\frac{k}{16}\right|=1$$

$2^{-a}=t\ (t>0)$ 으로 치환! $\quad\Leftrightarrow\ t^2-t=\frac{k}{16}\pm1$

을 만족시키는 양수 t 의 개수가 3 이어야 하므로 곡선 $y=t^2-t$ 과 두 직선 $y=\frac{k}{16}+1$, $y=\frac{k}{16}-1$ 이 만나는 점의 개수가 3 이 되는 상황을 살펴보자.



$$\frac{k}{16}+1>0,\quad -\frac{1}{4}<\frac{k}{16}-1<0$$

을 만족시키는 k 의 값의 범위는 $12<k<16$ 이다.
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은

$$k=13,\ \ 14,\ \ 15$$

이므로 그 합은 42이다.

$\therefore\ 42$

17

정답 ③

함수 $g(n)$ 을

$$\begin{aligned} g(n)&=3n^2-(a+12)n+4a \\ &=(3n-a)(n-4) \end{aligned}$$

로 두고 x 에 대한 방정식

$$x^n=g(n) \qquad \cdots\ ㉠$$

의 서로 다른 실근의 개수를 관찰하자.
n 의 홀/짝 여부와 $g(n)$ 의 부호에 따라 케이스를 분류!

Step 1 **n 의 홀/짝 여부에 따라 케이스 분류**

(1) n 의 값이 홀수인 경우

n 의 값이 홀수이면 $g(n)$ 의 값에 관계없이 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 1 이므로 $f(n)=1$

(2) n 의 값이 짝수인 경우

n 의 값이 짝수이면 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는

① $g(n)>0$ 일 때 : $f(n)=2$
② $g(n)=0$ 일 때 : $f(n)=1$
③ $g(n)<0$ 일 때 : $f(n)=0$

이다. 따라서 (1), (2)에 의해

$$\sum_{n=2}^{20} f(n)$$

$$=\underbrace{\{f(2)+f(4)+\cdots+f(20)\}}_{n\text{이 짝수인 경우!}}+\underbrace{\{f(3)+f(5)+\cdots+f(19)\}}_{n\text{이 홀수인 경우!}}$$

$$=\{f(2)+f(4)+\cdots+f(20)\}+\underbrace{9}_{\text{홀수일 때의 합은 9로 확정!}}$$

$$=26$$

이므로 $f(2)+f(4)+\cdots+f(20)=17$ 이어야 한다.

Step 2 **$f(2)+f(4)+\cdots+f(20)=17$**

함수 $g(n)=(3n-a)(n-4)$ 에 대하여 2 이상 20 이하의 짝수 중에서

$g(n)>0$ 을 만족시키는 n 의 개수를 α,
$g(n)=0$ 을 만족시키는 n 의 개수를 β,
$g(n)<0$ 을 만족시키는 n 의 개수를 γ

로 두면

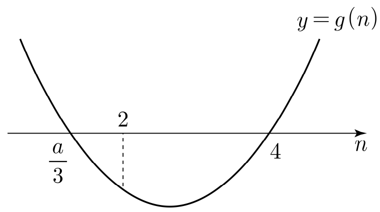
$$2\alpha+\beta=17,\quad \alpha+\beta+\gamma=10 \quad \cdots ㉡$$

를 만족시켜야 한다. 이때 α, β, γ 의 값은 모두 자연수이고, β 의 값은 1 또는 2 이므로 ㉡을 만족시키는 유일한 상황은

$$\alpha=8,\quad \beta=1,\quad \gamma=1$$

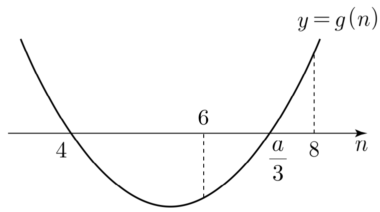
이다. 이를 만족시키는 상황은 다음과 같이 2가지 경우가 존재한다.

(1) $\frac{a}{3}<2$ 인 경우



이때 $\frac{a}{3}<2$ 에서 $a<6$ 이므로 가능한 자연수 a 의 값은 $a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이다.

(2) $6<\frac{a}{3}<8$ 인 경우



이때 $6<\frac{a}{3}<8$ 에서 $18<a<24$ 이므로 가능한 자연수 a 의 값은 $a=19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23$ 이다.

[Step 2]의 ①, ②에 의해 조건을 만족시키는 모든 자연수 a 의 값의 합은 120 이다.

$\therefore\ 120$

18

정답 28

두 함수

$$f(x)=-a^x+b,\quad g(x)=\log_a(x+b)$$

의 그래프가 y 축 위의 점 A 에서 만나므로

$$f(0)=g(0)\ \rightarrow\ b-1=\log_a b \quad \cdots ㉠$$

즉, 점 A 의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ b-1)$ 이다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 B, C 의 좌표를 각각 구해보면

$$\mathrm{B}(\log_a b,\ 0),\quad \mathrm{C}(1-b,\ 0)$$

즉, 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(\text{높이})\\&=\frac{1}{2}\times(2b-2)\times(b-1)\\&=(b-1)^2\end{aligned}$$

이므로 $(b-1)^2=4$ 에서 $b=3$ $(\because\ b>1)$
㉠에 $b=3$ 을 대입하면

$$\log_a 3=2 \ \rightarrow \ a=\sqrt{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}g(2b)-f(2b)=g(6)-f(6)&\\&=\log_{\sqrt{3}}9-\left(-(\sqrt{3})^6+3\right)\\&=28\end{aligned}$$

이다.

$\therefore$ 28

19

정답 100

$$\begin{aligned}2n\log_8 n-\frac{2}{3}\log_2 n^7&=\frac{2n}{3}\log_2 n-\frac{14}{3}\log_2 n\\&=\frac{2(n-7)}{3}\log_2 n\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{2(n-7)}{3}\log_2 n=k \ \rightarrow \ n^{\frac{2}{3}(n-7)}=2^k$$

을 만족시키는 1000 이하의 정수 k 가 존재하려면

$$\underline{n^{\frac{2}{3}(n-7)}}=2^k$$

(1) $n=7$ 이거나
(2) $n=2^{3p}$ 꼴이거나 (단, p 는 음이 아닌 정수)
(3) $n=2^q$ 꼴이고 $|n-7|$ 이 3 의 배수
(단, q 는 음이 아닌 정수)

(1) $n=7$ 인 경우

$n=7$ 이면

$$\begin{aligned}n^{\frac{2}{3}(n-7)}&=7^0(=1)\\&=2^k\end{aligned}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 $k=0$ 가 존재하므로 조건을 만족시킨다.

(2) $n=2^{3p}$ 꼴인 경우 (단, k 는 음이 아닌 정수)

$n=2^{3p}$ 꼴이면

$$\begin{aligned}n^{\frac{2}{3}(n-7)}&=\left(2^{3p}\right)^{\frac{2}{3}(2^{3p}-7)}\\&=2^{2p\left(2^{3p}-7\right)}\\&=2^k\end{aligned}$$

이므로 $k=2p\left(2^{3p}-7\right)\le 1000$ 에서

$$p=0,\ 1,\ 2 \ \rightarrow \ n=2^0,\ 2^3,\ 2^6$$

(3) $n=2^q$ 꼴이고 $|n-7|$ 이 3 의 배수인 경우 (단, q 는 음이 아닌 정수)

$n=2^q$ 꼴이면

$$\begin{aligned}n^{\frac{2}{3}(n-7)}&=\left(2^q\right)^{\frac{2}{3}(2^q-7)}\\&=2^{\frac{2}{3}q\left(2^q-7\right)}\\&=2^k\end{aligned}$$

이므로 $k=\frac{2}{3}q\left(2^q-7\right)\le 1000$ 에서

$$q=0,\ 2,\ 4,\ 6 \ \rightarrow \ n=2^0,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^6$$

(1), (2), (3)에 의해 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값은

$$n=1,\ 4,\ 7,\ 8,\ 16,\ 64$$

이므로 그 합은 100 이다.

$\therefore$ 100

20

정답 18

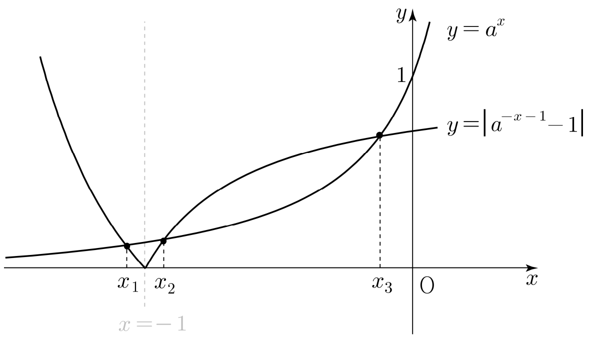
Step 1 문제 상황 판단

두 곡선

$$y=a^x,\quad \underline{y=\left|a^{-x-1}-1\right|}$$

항상 $(-1,\,0)$을 지난다!

이 서로 다른 세 점에서 만나는 상황은 다음과 같다.



만나는 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 $x_1,\ x_2,\ x_3$로 두면

$$x_1<-1,\quad -1<x_2<x_3$$

이때 우리는

$$\underline{a^{x_1}\times a^{x_2}\times a^{x_3}}>\frac{1}{8a}$$

세 점의 y좌표의 곱!

가 성립하는 상황을 찾아야 한다.

Step 2 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 구체적 관찰

(1) x_1에 대한 관찰

x_1은 $x<-1$에서 발생하는 교점의 x좌표이므로 방정식

$$a^x=a^{-x-1}-1$$

의 실근이다. 대입하면 $a^{2x_1}+a^{x_1}=\dfrac{1}{a}$ … ㉠

(2) $x_2,\ x_3$에 대한 관찰

$x_2,\ x_3$은 $x>-1$에서 발생하는 교점의 x좌표이므로 방정식

$$a^x=1-a^{-x-1}$$

의 서로 다른 두 실근이다.

$$a^x=1-a^{-x-1}\ \Leftrightarrow\ a^{2x}-a^x+\frac{1}{a}=0$$

$a^x=t\left(>\frac{1}{a}\right)$로 치환!

$$\Leftrightarrow\ t^2-t+\frac{1}{a}=0$$

이때 방정식 $t^2-t+\dfrac{1}{a}=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 판별식을 활용하면

$$D>0\ \rightarrow\ a>4 \qquad \cdots ㉡$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 곱은

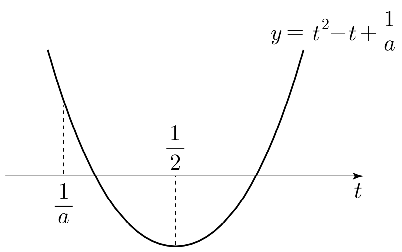
$$a^{x_2}\times a^{x_3}=\frac{1}{a} \qquad \cdots ㉢$$

* Remark

사실 방정식 $t^2-t+\dfrac{1}{a}=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 것이 아니라 $t>\dfrac{1}{a}$인 구간에서 서로 다른 두 양의 실근을 갖기 위해선 판별식만으로 충분하지 않다.

① 함숫값
② 판별식
③ 대칭축

을 모두 고려해야 하는데, 이 경우 이 3가지 사항을 모두 고려해보아도 결국 판별식만 사용해도 충분하기에 해설은 해당 부분을 생략한 것이지 고려하지 않아도 되는 것은 아니다.
(그림 참고)



(1), (2)에 의해

$$a^{x_1}\times a^{x_2}\times a^{x_3}>\frac{1}{8a}\ \rightarrow\ a^{x_1}>\frac{1}{8}\quad (\because ㉢)$$

이때 ㉠에서

$$a^{x_1}(a^{x_1}+1)=\frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{8}+1\right)$$
$$\rightarrow a<\frac{64}{9}$$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$$4<a<\frac{64}{9} \quad (\because ㉡)$$

이므로 자연수 a의 값은 $a=5,\ 6,\ 7$로 그 합은 18이다.

$\therefore\ 18$

21

정답 ②

a가 1보다 크므로 함수

$$f(x)=3\times\left(\frac{a}{a-1}\right)^x \leftarrow \text{밑이 } \frac{a}{a-1} \text{인 지수함수!}$$

의 밑은 1보다 크다! 즉, $-1\le x\le 2$일 때, $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$$f(2)=12 \rightarrow \left(\frac{a}{a-1}\right)^2=4$$
$$\rightarrow \frac{a}{a-1}=2 \quad \left(\because \frac{a}{a-1}>1\right)$$
$$\rightarrow a=2$$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=3\times 2^x$이므로 $-1\le x\le 2$일 때, $x=-1$에서 최솟값 $\frac{3}{2}$를 갖는다.

$\therefore\ \frac{3}{2}$

22

정답 ③

$$a^{\log_4 k}=n$$

을 만족시키는 실수 k의 값이 $f(n)$이므로

$$a^{\log_4 k}=n \Leftrightarrow \log_4 k=\log_a n$$
$$\Leftrightarrow k=4^{\log_a n}$$
$$\Leftrightarrow f(n)=4^{\log_a n}$$

이때 $f(27)=4^{\log_a 27}$, $f(3)=4^{\log_a 3}$이므로

$$f(27)-f(3)=6 \rightarrow 4^{3\log_a 3}-4^{\log_a 3}=6$$

$4^{\log_a 3}=X$로 치환하면 (단, $X>0$)

$$X^3-X=6 \rightarrow (X-2)(X^2+2X+3)=0$$
$$\rightarrow X=2$$

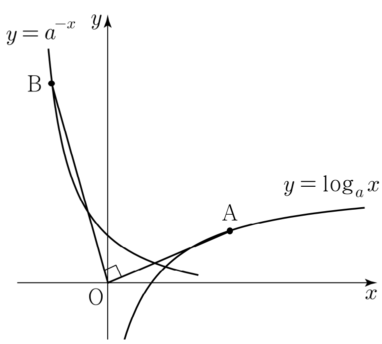
즉, $4^{\log_a 3}=2$이므로 $\log_a 3=\frac{1}{2} \rightarrow a=9$

따라서 $a+f(81)=25$ $(=9+16)$ 이다.

$\therefore\ 25$

23

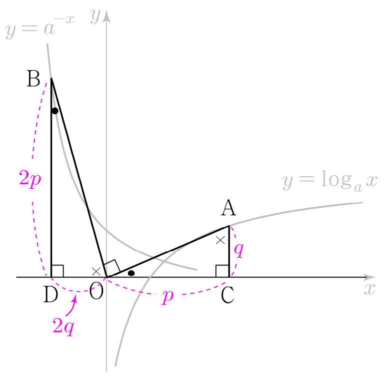
정답 ②



두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D로 두면 두 삼각형 OAC와 OBD는 AA 닮음이고 닮음비는

$$\overline{OA}:\overline{OB}=1:2 \leftarrow 2\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{17}$$

이다.



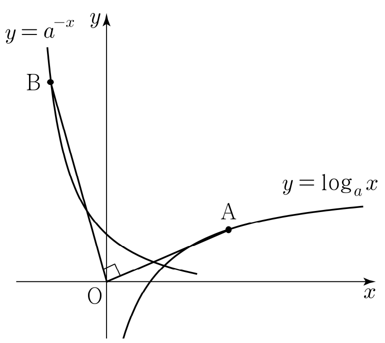
즉, 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(p,\,q)$로 두면
점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(-2q,\,2p)$이므로

$$q=\log_a p \quad \rightarrow \quad p=a^q \qquad \cdots ㉠$$
$$2p=a^{2q} \qquad \cdots ㉡$$
$$p^2+q^2=\frac{17}{4} \qquad \cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면 $p=2,\ q=\frac{1}{2},\ a=4$이다.

$\therefore\ 4$

* Remark



$y=\log_a x$

⤸ 직선 $y=x$에 대하여 대칭!

$y=a^x$

⤸ y축에 대하여 대칭!

$y=a^{-x}$

의 관계를 통해 두 그래프가 적당히 회전된 관계임을 파악하는 게 핵심이다. 특히, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$이므로 두 점 A, B에서 x축에 수선의 발을 내리고 싶단 생각이 반드시 들었어야 한다.
이를 발견하지 못하고,

$$\mathrm{A}(\alpha,\,\log_a\alpha),\quad \mathrm{B}(\beta,\,a^{-\beta})$$

로 두고 (가)와 (나)를 순수 계산으로 뚫으려 했다면 계산 지옥..
(2020학년도 9월 평가원 가형 15번에 출제된 아이디어를 변형한 문제이니 해당 기출 문제도 반드시 참고할 것!)

24

정답 ③

Step 1 방정식 $g(f(x))=0$의 해석

함수 $g(x)=\log_3(4x+3)$에 대하여

$$g(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{2}$$

이므로 방정식 $g(f(x))=0$은

$$g(f(x))=0 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=-\frac{1}{2}$$

과 같다. 즉, $\left\{x\,\middle|\,f(x)=-\frac{1}{2}\right\}=\{x\,|\,f(x-k)=0\}$

Step 2 $\left\{x\,\middle|\,f(x)=-\frac{1}{2}\right\}=\{x\,|\,f(x-k)=0\}$ 해석

(1) 방정식 $f(x-k)=0$ 관찰

함수 $f(x)=4^x-a\times2^x$에 대하여

$$f(x-k)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4^{x-k}-a\times2^{x-k}=0$$
$$\Leftrightarrow\quad 2^{x-k}=a \quad (\because\ 2^x>0)$$
$$\Leftrightarrow\quad x=k+\log_2 a \quad (\text{실근 1개!})$$

(2) 방정식 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 관찰

함수 $f(x)=4^x-a\times2^x$에 대하여

$$f(x)=-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 4^x-a\times2^x=-\frac{1}{2}$$

⤸ $2^x=t\,(>0)$로 치환

$$\Leftrightarrow\quad t^2-at+\frac{1}{2}=0 \quad \cdots ㉠$$

* Remark

이때 ㉠을 만족시키는 서로 다른 양수 t의 개수가 2라면 방정식 $f(x)=-\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 조건을 만족시킬 수 없다. 이때 문제에서 a가 양수라고 줬기에 방정식

$$\underbrace{t^2-at+\frac{1}{2}}_{\text{두 근의 합과 곱이 모두 양수!}}=0$$

의 두 근은 모두 양수이므로 중근을 가져야 한다.

(=양의 실근 1개, 음의 실근 1개가 나오는 상황이 발생되지 않는다.)

즉, ㉠에서 판별식을 활용하면

$$D=0 \iff a^2-2=0$$

에서 $a=\sqrt{2}$ 이다. 이를 대입해서 계산하면

$$f(x)=-\frac{1}{2} \iff x=-\frac{1}{2}$$

즉, $k+\log_2\sqrt{2}=-\frac{1}{2} \rightarrow k=-1$

따라서 $a^2+k^2=3\,(=2+1)$이다.

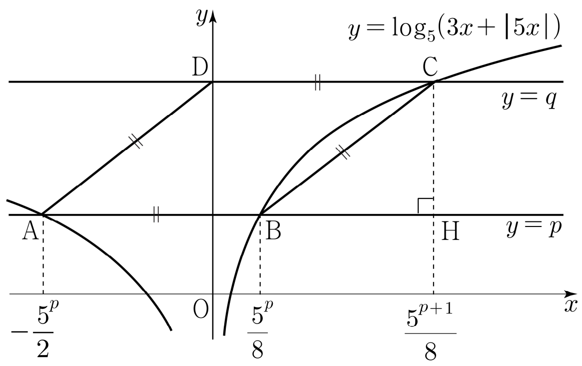
$\therefore\ 3$

25

정답 ④

$$y=\log_5(3x+5|x|)$$
$$=\begin{cases}\log_5(-2x) & (x<0)\\ \log_5 8x & (x>0)\end{cases}$$

이므로 곡선 $y=\log_5(3x+5|x|)$와 직선 $y=p$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $-\frac{5^p}{2}$, $\frac{5^p}{8}$이다.



선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\left(\frac{5^p}{8}\right)-\left(-\frac{5^p}{2}\right)$$
$$=\frac{5^{p+1}}{8}$$

이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\frac{5^{p+1}}{8}$ (= 마름모의 한 변의 길이)

즉, $\overline{CD}=\frac{5^{p+1}}{8}$이므로 점 C의 좌표는 $C\left(\frac{5^{p+1}}{8},\ q\right)$이고, 점 C는 곡선 $y=\log_5 8x$ 위의 점이므로 대입해서 계산하면

$$q=\log_5\left(8\times\frac{5^{p+1}}{8}\right) \rightarrow q-p=1\ (=\text{선분 CH의 길이})$$

삼각형 BCH에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{BH}^2+\overline{CH}^2$$
$$\iff \left(\frac{5^{p+1}}{8}\right)^2=\left\{\left(\frac{5^{p+1}}{8}\right)-\left(\frac{5^p}{8}\right)\right\}^2+1^2$$
$$=\left(\frac{5^p}{2}\right)^2+1$$

이므로 계산하면 $5^p=\frac{8}{3}$이다. 따라서 마름모 ABCD의 한 변의 길이가 $\frac{5^{p+1}}{8}=\frac{5}{3}$이므로 그 넓이는

$$\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{5}{3} \leftarrow \overline{AB}=\frac{5}{3},\ \overline{CH}=1$$

이다.

$\therefore\ \frac{5}{3}$

26

정답 ①

Step 1 **k 의 값 구하기**

$$\frac{m}{30}(2-n)+1$$

의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 $f(n)$ 이므로

$$f(n) \text{ 의 치역 : } \{0, 1, 2\}$$

이다. 이때 네 점

$$(-1, 7),\quad (k, f(k)),\quad (k+1, f(k+1)),\quad (k+2, f(k+2))$$

이 한 직선 위에 있으므로

$$f(k)=2\ ,\quad f(k+1)=1,\quad f(k+2)=0$$

일 수 밖에 없다. 네 점을 지나는 직선의 기울기는 -1 이므로

$$\frac{2-7}{k-(-1)}=-1 \quad \rightarrow \quad k=4$$

Step 2 **조건을 만족시키는 정수 m 의 값 구하기**

$k=4$ 이므로 $f(4)=2$, $f(5)=1$, $f(6)=0$ 이다. 즉,

$f(4)=2$: $-\frac{m}{15}+1$ 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2

$f(5)=1$: $-\frac{m}{10}+1$ 의 다섯제곱근 중 실수인 것의 개수는 1

$f(6)=0$: $-\frac{2m}{15}+1$ 의 여섯제곱근 중 실수인 것의 개수는 0

이때 각각의 조건에서 m 의 값의 범위를 구해보면

① $f(4)=2 \rightarrow -\frac{m}{15}+1>0$ … ㉠

② $f(5)=1 \rightarrow$ 항상 성립함!

③ $f(6)=0 \rightarrow -\frac{2m}{15}+1<0$ … ㉡

㉠, ㉡에 의해 m 의 값의 범위는 $\frac{15}{2}<m<15$ 이므로

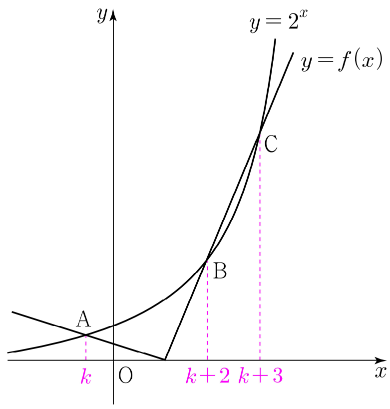
모든 정수 m 의 값의 합은 $8+9+\cdots+14=77$ 이다.

$\therefore\ 77$

27

정답 ③

Step 1 **세 점 A, B, C 의 좌표**



세 점 A, B, C 에서 x 축까지의 거리의 비가 $1:4:8$ 이므로

점 A 의 x 좌표를 k 로 두면 두 점 B, C 의 x 좌표는

$k+2$, $k+3$ 이다.

$$\underbrace{\mathrm{A}(k,\, 2^k),\quad \mathrm{B}(k+2,\, 4\times 2^k),\quad \mathrm{C}(k+3,\, 8\times 2^k)}_{y\text{좌표의 크기의 비가 } 1:4:8!}$$

Step 2 **주어진 조건을 활용하여 식 세우기**

세 점 A, B, C 는 모두 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2^k=(a-c)(k-b) \quad \cdots ㉠$$
$$4\times 2^k=(a+c)(k-b+2) \quad \cdots ㉡$$
$$8\times 2^k=(a+c)(k-b+3) \quad \cdots ㉢$$

이때 ㉡, ㉢을 연립하면

$$\frac{4\times 2^k}{8\times 2^k}=\frac{(a+c)(k-b+2)}{(a+c)(k-b+3)} \quad \rightarrow \quad b=k+1$$

이를 다시 ㉡에 대입하여 정리하면 $a+c=4\times 2^k$

또한, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$$\underbrace{4+(3\times 2^k)^2}_{=\overline{\mathrm{AB}}^2}=\underbrace{1+(4\times 2^k)^2}_{=\overline{\mathrm{BC}}^2} \quad \rightarrow \quad 4^k=\frac{3}{7}$$

Step 3 **구한 정보를 활용하여 $(a+c)\times 2^b$ 계산하기**

구한 정보를 종합하여 최종적으로 문제에서 묻고 있는

$(a+c)\times 2^b$: $a+c=$(k에 관한 식),
$b=$(k에 관한 식)으로 표현 가능!

의 값을 구할 수 있는지 살펴보기 위해 식 조작이 필요하다.

$$\begin{aligned}(a+c)\times 2^b &= 4\times 2^k \times 2^b && \leftarrow a+c=4\times 2^k\\ &= 4\times 2^k\times 2^{k+1} && \leftarrow b=k+1\\ &= 8\times 4^k && \leftarrow 4^k=\frac{3}{7}\\ &= \frac{24}{7}\end{aligned}$$

따라서 $(a+c)\times 2^b = \dfrac{24}{7}$ 이다.

$\therefore \dfrac{24}{7}$

* Remark

[Step 2]의 과정까지 무리 없이 따라왔다면, 이쯤에서

“혹시 a, b, c의 값을 직접 구하지 않아도

$(a+c)\times 2^b$

의 값을 구할 수 있으려나?”

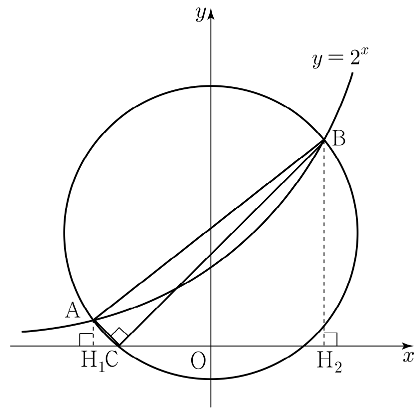
라는 생각이 들면 좋겠다. $(a+c)$와 b가 모두 k에 관한 식으로 표현되고 $4^k=\dfrac{3}{7}$임을 알고 있으므로 이를 활용해서 정답을 도출하는 구조도 하나 익혀두자. 예컨대, 이 문제처럼, 문제에서 최종적으로 구하라고 하는 값이

$a+b+c$: 보통 대부분의 문제들은 이렇게 물어본다!

가 아니라 $a+2b+3c$와 같이 한 번 더 꼬여있다면 a, b, c의 값을 직접 구하지 않아도 $a+2b+3c$는 구할 수 있는 구조일 수 있다.

28

정답 83



점 C는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$이다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

조건 (나)에서 직선 BC의 기울기가 1이므로

$$\angle H_2CB=\angle H_2BC=\angle H_1AC=\angle H_1CA=\frac{\pi}{4}$$

즉, 두 삼각형 AH_1C, BH_2C는 직각이등변삼각형이다.
조건 (가)에 의해 두 점 A, B의 좌표를

$$A(p,\ 2^p),\quad B(p+3,\ 2^{p+3})$$

x좌표의 차가 3!

으로 두면 두 삼각형 AH_1C, BH_2C는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AH_1}=\overline{CH_1},\ \overline{BH_2}=\overline{CH_2} \rightarrow 2^p+2^{p+3}=3\ (=\overline{H_1H_2})$$
$$\rightarrow 2^p=\frac{1}{3}$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{3^2+\left(2^{p+3}-2^p\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{130}}{3}\end{aligned}$$

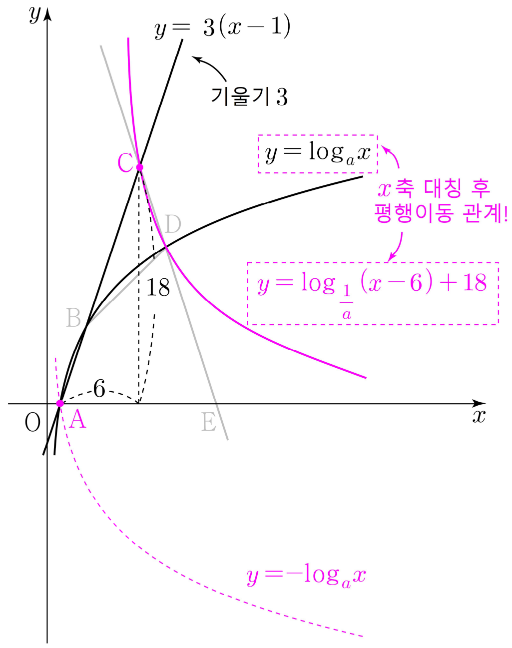
이므로 원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{130}}{6}\right)^2=\dfrac{65}{18}\pi$이다.

$\therefore p+q=83$

29

정답 27

Step 1 두 점 A, C 의 관계 파악



곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 A $(1, 0)$

⤸ x축 대칭

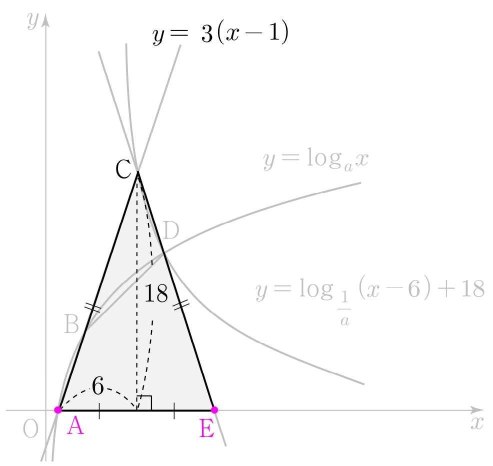
곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 A $(1, 0)$

⤸ x축으로 6, y축으로 18만큼 평행이동

곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}}(x-6)+18$ 위의 점 $(7, 18)$

이때, 직선 AC 의 기울기가 3 이므로 점 C 의 좌표가 $C(7, 18)$ 임을 알 수 있다.

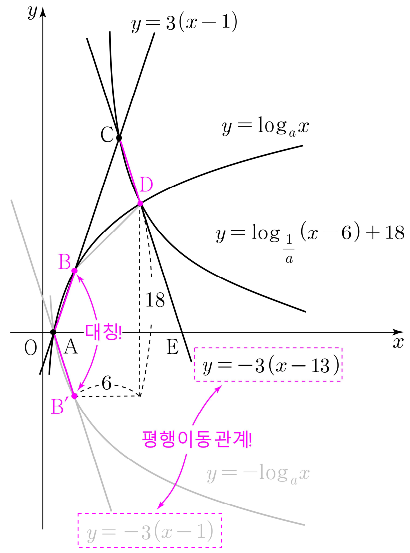
Step 2 두 점 B, D 의 관계 파악



삼각형 ACE 가 이등변삼각형이므로

$$\overline{AE}=12 \ \rightarrow \ E(13, 0)$$

즉, 직선 CE 의 방정식은 $y=-3(x-13)$이다.



$y=3(x-1)$

⤸ x축 대칭

$y=-3(x-1)$

⤸ x축 방향으로 6, y축 방향으로 18만큼 평행이동

$y=-3(x-13)$

즉, 점 B와 점 D 역시 대응 관계이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 이다. (∵ 두 점 A, C 도 대응 관계에 놓인 점!)

Step 3 삼각형 CBD 의 둘레는 $6\sqrt{2}+6\sqrt{10}$ 이다.

두 점 B, D 의 좌표를 다음과 같이 설정하자.

$B(p, 3p-3)$

⤸ x축 대칭

$B'(p, -3p+3)$

⤸ x축 방향으로 6, y축 방향으로 18만큼 평행이동

$D(p+6, -3p+21)$

삼각형 CBD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{10}+6\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{CB}+\overline{CD}+\overline{BD}=6\sqrt{10}+6\sqrt{2}$$

⤸ $\overline{CD}=\overline{AB}$

$$\rightarrow \ \overline{AC}+\overline{BD}=6\sqrt{10}+6\sqrt{2}$$

⤸ $\overline{AC}=\sqrt{6^2+18^2}=6\sqrt{10}$

$$\rightarrow \ \overline{BD}=6\sqrt{2}$$

이므로

$$(-3p+21)-(3p-3)=6 \ \rightarrow \ p=3$$

점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$$6=\log_a 3 \;\rightarrow\; a^6=3$$

따라서 $a^{18}=27$이다.

$\therefore\ 27$

29

정답 46

Step 1 $\log_2\left(\frac{ax}{9}\right)+\log_2\left(x-\frac{2}{x}+1\right)$ **변형 및 진수조건**

주어진 식

$$\log_2\left(\frac{ax}{9}\right)+\log_2\left(x-\frac{2}{x}+1\right) \quad \cdots ㉠$$

의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 개수가 3임을 해석하기 위해 식을 변형하면

$$\begin{aligned}&\log_2\left(\frac{ax}{9}\right)+\log_2\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\\ &=\log_2\left(\frac{a}{9}x^2+\frac{a}{9}x-\frac{2}{9}a\right)\\ &=\log_2\left\{\frac{a}{9}(x+2)(x-1)\right\}\end{aligned}$$

즉, ㉠의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 값은

$$\underline{\frac{a}{9}(x+2)(x-1)}=2,\ \ 2^2,\ \ 2^3,\ \cdots \quad \cdots ㉡$$

이차함수 꼴이므로 a의 부호가 중요!

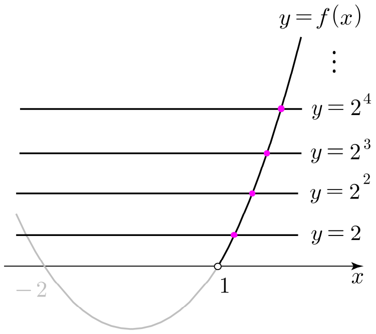
을 만족시키는 x의 값이다.
이때 ㉠에서 진수 조건을 체크해보면

① **$a>0$인 경우 : $x>1$**
② **$a<0$인 경우 : $-2<x<0$**

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{a}{9}(x+2)(x-1)$$

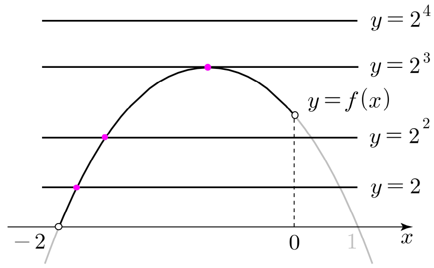
로 두자. 만약 최고차항의 계수가 양수라면($a>0$) 다음 그림과 같이 ㉡을 만족시키는 실수 x의 개수는 무수히 많다.



따라서 $a<0$이어야 한다.

Step 2 **구체적인 상황 판단**

$a<0$일 때, ㉡을 만족시키는 상황을 대략적으로 그려보면 다음과 같다.



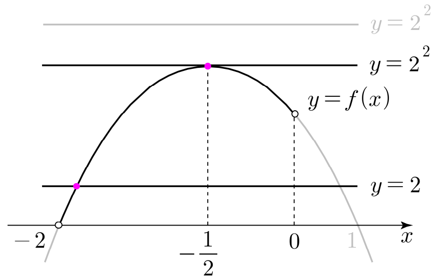
즉, 구체적인 상황 판단을 위해서는

$$\underline{f(0)=-\frac{2}{9}a},\quad \underline{f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}}$$

경계값! 최댓값!

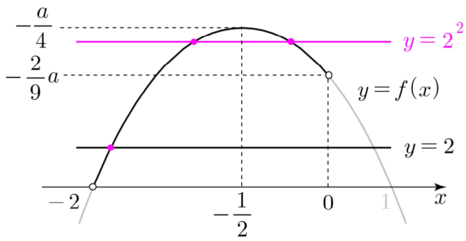
의 값을 기준으로 케이스를 분류해야 한다.

(1) $-\frac{a}{4}\le 2^2$인 경우 ($\Leftrightarrow$ $a\ge -16$)



㉡을 만족시키는 실수 x의 개수는 1 또는 2이므로 조건을 만족시키지 않는다.

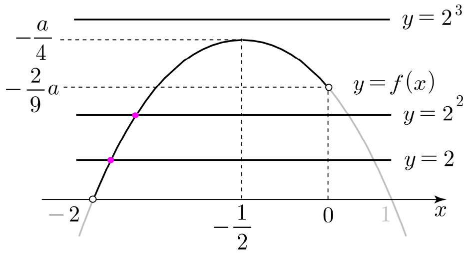
(2) $-\frac{2}{9}a < 2^2 < -\frac{a}{4}$ 인 경우 ($\Leftrightarrow\ -18 < a < -16$)



ⓛ을 만족시키는 실수 x의 개수는 3이므로 정수 a의 값은 $a=-17$이다.

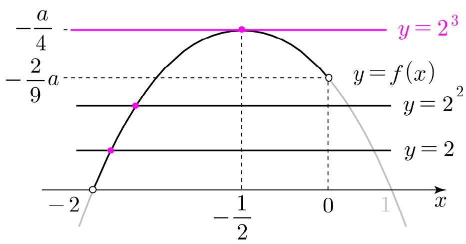
(3) $2^2 \le -\frac{2}{9}a$ 이고 $-\frac{a}{4} < 2^3$ 인 경우

($\Leftrightarrow\ -32 < a \le -18$)



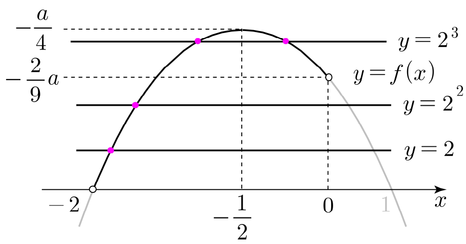
ⓛ을 만족시키는 실수 x의 개수는 2이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(4) $-\frac{a}{4}=2^3$ 인 경우 ($\Leftrightarrow\ a=-32$)



ⓛ을 만족시키는 실수 x의 개수는 3이므로 정수 a의 값은 $a=-32$이다.

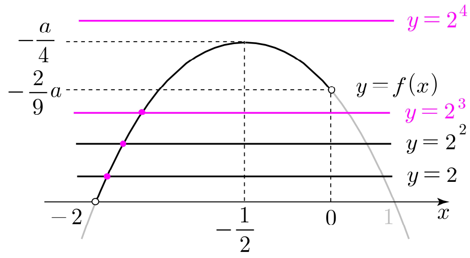
(5) $-\frac{2}{9}a < 2^3 < -\frac{a}{4}$ 인 경우 ($\Leftrightarrow\ -36 < a < -32$ 인 경우)



ⓛ을 만족시키는 실수 x의 개수는 4이므로 조건을 만족시키지 않는다.

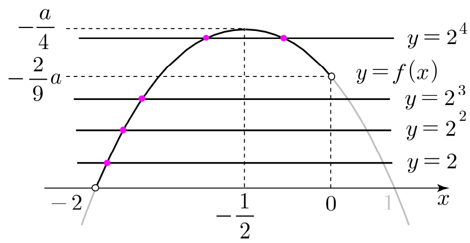
(6) $2^3 \le -\frac{2}{9}a$ 이고 $-\frac{a}{4} < 2^4$ 인 경우

($\Leftrightarrow\ -64 < a \le -36$)



ⓛ을 만족시키는 실수 x의 개수는 3이므로 정수 a의 값은 $a=-36,\ -37,\ \cdots,\ -63$이다.

(7) $-\frac{a}{4} \ge 2^4$ 인 경우 ($\Leftrightarrow\ a \le -64$ 인 경우)



ⓛ을 만족시키는 실수 x의 개수는 4 이상이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(1) ~ (7)에 의해 조건을 만족시키는 정수 a의 값은

$$a=-17\ /\ -32\ /\ -36,\ -37,\ \cdots,\ -63$$

이므로 최댓값은 $M=-17$, 최솟값은 $m=-63$이다.
따라서 $M-m=46$이다.

$\therefore\ 46$