https://gall.dcinside.com/mgallery/board/view/?id=hanmath&no=7894912

250921에 대해 괜찮은 풀이가 있길래 다시 편집해봄
가독성 진짜 개또라이새낀가 ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ

<25학년도 9월 모의평가 21번>

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

부등식 $A<B<C$는

$$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$$

와 같은 꼴로 변형하여 풀면 된다. 이에 주목하여 문제를 풀어보자.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$\frac{f(x+2)-f(x)}{2}$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로,
세 상수 a, b, c에 대하여 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 두면

$$\frac{f(x+2)-f(x)}{2}=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+4)$$

이고, 주어진 부등식을

$$\begin{cases} 2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \quad \Rightarrow \quad 3k^2+(2a+4)k+(2a+b+12) \ge 0 \\ \frac{f(x+2)-f(x)}{2} \le 4k^2+14k \quad \Rightarrow \quad k^2+(8-2a)k-(2a+b+4) \ge 0 \end{cases}$$

와 같이 변형할 수 있다.

이차함수 $y=3x^2+(2a+4)x+(2a+b+12)$는 $x=-\frac{a+2}{3}$에서 최솟값을 가지므로,

$$n-\frac{1}{2} \le -\frac{a+2}{3} \le n+\frac{1}{2}$$

를 만족시키는 정수 n에 대하여

$$3n^2+(2a+4)n+(2a+b+12) \ge 0 \quad \cdots \ (1)$$

이다.

x에 대한 이차방정식 $3x^2+(2a+4)x+(2a+b+12)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(2a+4)^2-12(2a+b+12)$$

이다.

이차함수 $y=x^2+(8-2a)x-(2a+b+4)$는 $x=a-4$에서 최솟값을 가지므로

$$m-\frac{1}{2} \le a-4 \le m+\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 정수 m에 대하여

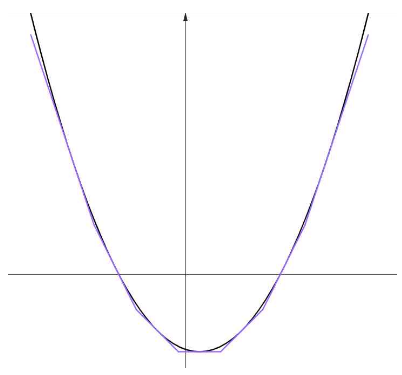
$$m^2+(8-2a)m-(2a+b+4) \ge 0$$

이다.
x에 대한 이차방정식 $x^2+(8-2a)x-(2a+b+4)=0$의 판별식을 D_2라 하면

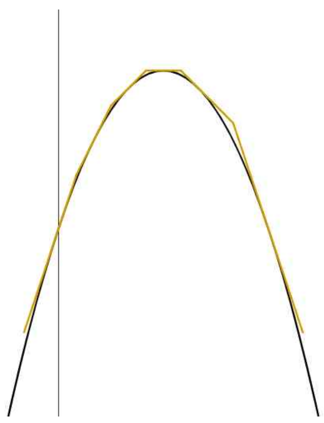
$$D_2=(8-2a)^2+4(2a+b+4)$$

이다.

(1)에 정수들을 대입하여 얻은 부등식과, 부등식 $D_1 \le 0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$를 그림으로 나타내면 다음과 같이 이차함수의 접선들이 이차함수를 둘러싸는 듯한 그림이 나온다.
(경계 포함 그래프들의 윗부분들의 교집합)



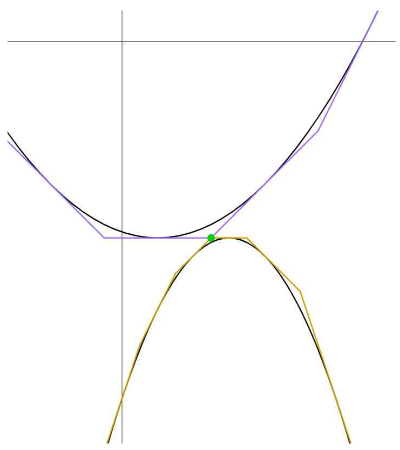
두번째 부등식에 대하여 같은 작업을 수행하면 또한 다음과 같이 이차함수의 접선들이 이차함수를 둘러싸는 듯한 그림이 나온다.
(경계 포함 그래프들의 아랫부분들의 교집합)



두 그림을 같이 나타내면

$(n,\ m)=(-1,\ -1),\ (-2,\ -2)$

인 두 정수 n, m에 대하여 한 점에서만 공통부분이 나타난다...!
(연두색 점)



따라서

$$-\frac{3}{2} \le a-4 \le -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2} \le a-4 \le \frac{1}{2}$$

에서 $a=\frac{5}{2}$이고,
((1) 써도 되긴 하는데 아무래도 이쪽이 계산이 좀 더 나아서...)
$n=-1,\ m=-1$일 때

$$3-(2a+4)+(2a+b+12) \ge 0,\quad 1-(8-2a)-(2a+b+4) \ge 0$$

에서 $b=-11$이다.

$$\therefore f'(3)=27+6a+b=31$$

원글에서는 $2a+4=p,\ 2a+b+12=q$로 두고
정수 k에 대한 두 부등식

$$3k^2+pk+q \ge 0,\quad k^2+(12-p)k+(8-q) \ge 0$$

의 공통부분이 $(p,\ q)=(9,\ 6)$에서만 나타난다... 이런 식으로 풀었다.