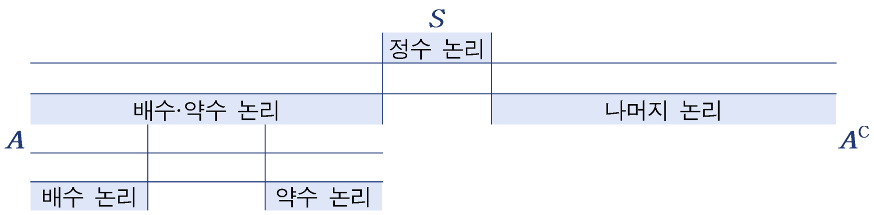
수열 [귀납]
Schema 5
정수 논리

[중요도 ★★★]

- 활용할 수 있는 정수 논리는 다음으로 분류된다.



예 $a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1}+a_n & (n \neq 3k) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (n = 3k) \end{cases}$

⇒ 약수와 배수 관점을 적절히 전환해가며 해석할 수 있다.

예 $a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{3} & (n = 3k) \\ \dfrac{a_n^2+5}{3} & (n \neq 3k) \end{cases}$

⇒ 3으로 나눈 나머지는 0, 1, 2로 분류됨

⇒ 3의 배수는 3, 그 외는 1, 2로 적절한 설정할 수 있다

- A의 경우 적절히 첫 번째 설정을 행할 수 있고 A^C의 경우 적절히 규칙 파악을 행할 수 있다.

예 $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+5}{3}$ ($a_n \neq 3k$, k는 자연수) 에서 a_n이 자연수라면, a_{n+1}도 자연수이다.

예

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 } a_n\text{의 약수인 경우}) \\ 3a_n+1 & (n\text{이 } a_n\text{의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 = 2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

수열 [귀납]
Schema 5
정수 논리

Sol)

$a_6=2$으로부터 a_1을 추적해가는 상황이므로

주어진 수열을 x와 y를 바꾼 역함수처럼 생각하면 다음과 같다.

A	S	A^C
	a_n	
na_{n+1}		$\dfrac{a_{n+1}-1}{3}$
(a_n이 n의 배수인 경우)		(a_n이 n의 배수가 아닌 경우)

(∵ 약수 ⇒ 배수)

따라서 $a_6=2$에서 A 루트로 쭉 추적해갈 수 있다.

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
A	2	10	40	120	240	240

도출된 y 값들을 기준으로 $3k+1$ 구조를 만족하는 조합은 다음이다.

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
A	2	10	40	120	240	240
		①				
			②			

따라서 조합 ①과 ②를 각각 생각하면 다음과 같다.

[조합 ①]

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
A	2	10	40	120	240	240
B		①	3	9	18	18

[조합 ②]

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
A	2	10	40	120	240	240
D			②	13	26	26

13은 $3k+1$에 해당하나 $k=4$는 2의 배수이므로 여집합 영역으로 뻗을 수 없다.

$\therefore\ \sum a_1=18+26+240=284$