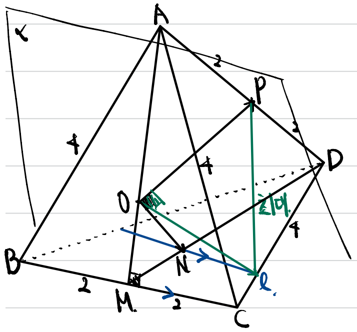
29. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

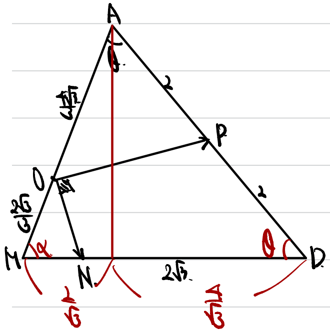


평면 BCD ×.

Q 자취. O 지나고 $\vec{OP}$와 수직인 평면 $\alpha \cap \triangle BCD$

$= l.$

MD. l 교점 N.



$\vec{AM}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, $\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{OP}=\frac{1}{2}\vec{b}$. ∴ $\vec{OP}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

$|\vec{OP}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}\cdot 12-\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\cdot 16$

$=4.$

$\vec{MD}=\vec{c}$. $\vec{MN}=k\vec{c}$ $(0<k<1)$.

$\vec{OP}\cdot\vec{ON}=\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+k\vec{c}\right)=-\frac{2}{9}|\vec{a}|^2-\frac{2}{3}k\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=-4$. $\vec{b}\cdot\vec{c}=8$.

$=k\cdot\left(+\frac{8}{3}+4\right)-\frac{2}{9}\cdot 12+\frac{1}{6}\cdot 8=0$. $k=\frac{1}{5}$

$|\vec{PQ}|$ 최대인 Q =: X. $\overline{NX}=2\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}$.

$\overline{ON}^2=|\vec{OM}-\vec{MN}|^2$

$=\frac{4}{3}+\frac{12}{25}-2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}+\frac{12}{25}-\frac{8}{15}=\frac{32}{25}$.

$|\vec{PX}|^2=\overline{OP}^2+\overline{OX}^2=\overline{OP}^2+(\overline{ON}^2+\overline{NX}^2)$.

$=4+\frac{32}{25}+\frac{64}{25}=\frac{196}{25}$. ∴ $|\vec{PQ}|\le\overline{PX}=\frac{14}{5}$. $p+q=19$