제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x} = 3\lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 3$$

24. $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1}\,dx$ 의 값은? [3점]

① $10+\ln 5$ ② $10+\ln 7$ ③ $10+2\ln 3$ ④ $10+\ln 11$ ⑤ $10+\ln 13$

$$\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int_0^{10} \frac{1}{x+1} + 1\,dx$$

$$= \left[\ln(x+1) + x\right]_0^{10} = \ln 11 + 10$$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+3}=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n}-a_n\right)$의 값은? [3점]

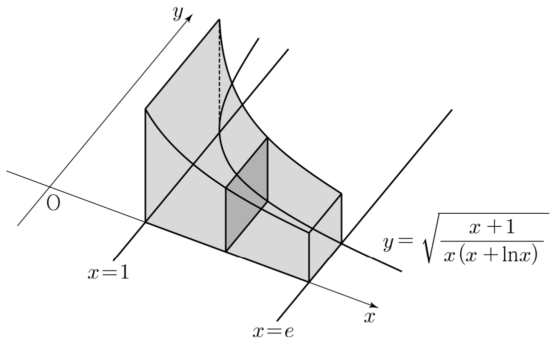
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2+n}-a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+n-a_n^2}{\sqrt{a_n^2+n}+a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{a_n^2+n}+a_n}=\frac{1}{2}$$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$ 과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

$$\int_1^e \frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx=\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x+\ln x}dx$$

Let $x+\ln x=k$ $\quad 1+\frac{1}{x}=\frac{dk}{dx}$

$$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x+\ln x}dx=\int_1^{e+1}\frac{1}{k}dk=\left[\ln k\right]_1^{e+1}$$

$$=\ln(e+1)$$

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

$g'(0)=0\quad g(0)=0\quad g''(0)=0$

넣어서 계산 (i)

Let $f(x)+x=k(x)$ $\quad g(x)=k(e^x)$

$\rightarrow k(1)=k'(1)=k''(1)=0$

$\therefore k(x)=(x-1)^3,\ k'(x)=3(x-1)^2$

$h'(8)=\frac{1}{g'(h(8))}=\frac{1}{g'(\ln 3)}=\frac{1}{3k'(3)}=\frac{1}{36}$

(i)

$g(x)=k(e^x)$

$g'(x)=k'(e^x)\times e^x$

$g''(x)=k''(e^x)\times e^{2x}+k'(e^x)$

$x=1$ 대입

$\rightarrow k(1)=k'(1)=k''(1)=0$

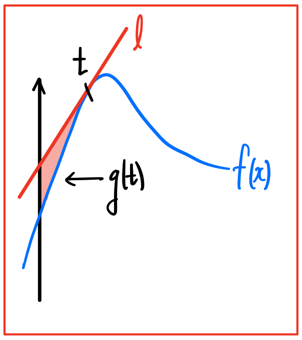
28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$

④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$



(i) 접선 l : $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$g(t)=\int_0^t f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\,dx$

$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+\left(tf(t)-\int_0^t f(x)\,dx\right)$

부분적분법

$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+\int_0^t xf'(x)\,dx$

$g'(t)=-tf'(t)-\frac{1}{2}t^2f''(t)+tf'(t)$

$=-\frac{1}{2}t^2f''(t)$

(ii) $g(1)=-\frac{1}{2}f'(1)+\int_0^1 xf'(x)\,dx$

$=0+\int_0^1 -x^2+xe^{1-x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1=-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e$

$g'(1)=-\frac{1}{2}f''(1)=\frac{3}{2}$ $\quad (f''(x)=-1-2xe^{1-x^2})$

$\therefore g(1)+g'(1)=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

① ②

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

i) ①번, ②번 연립

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{10}{3},\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=10$

$\rightarrow \frac{a}{1-r}=\frac{10}{3},\ \frac{|a|}{1-|r|}=\frac{a}{1+r}=10$

$\frac{1-r}{1+r}=3$ $r=-\frac{1}{2}$ $a=5$

ii) $\frac{k(k+1)}{2}$ → $(4n-4, 4n-3)$일때는 홀, $(4n-1, 4n-2)$일때는 짝 (n=자연수)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)=$$

$$-a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}+a_{m+4}-a_{m+5}-a_{m+6}+a_{m+7}\cdots$$

$$=-\underbrace{(a_{m+1}+a_{m+2})}_{(초항)}\times\underbrace{\frac{1}{1-(-r^2)}}_{공비}=-ar^m(r+1)\times\frac{1}{1-(-r^2)}$$

$$=-5\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{700},\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{1400}$$

$m=1,3,5,7,9$

합$=25$

30. 두 상수 $a\,(1\le a\le 2)$, b에 대하여 함수

$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

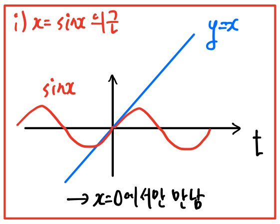
(가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
(나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

i) $f(0)=0\rightarrow \sin b=0$ $-$①

$f(2\pi)=\sin(2a\pi+b)=2a\pi+b=0$

$\rightarrow 2a\pi+b$를 t로 치환시 $\sin t=t\rightarrow t=0$



$b=-2a\pi$ $(1\le a\le 2)\rightarrow -4\pi\le b\le -2\pi$

① 에 의해 (a,b) 순서쌍은 $(1,-2\pi), (\frac{3}{2},-3\pi), (2,-4\pi)$

ii) $f'(x)=(a+\cos x)\cos(ax+b+\sin x)$

$f'(0)=(a+1)\times\cos b\neq f'(2\pi)=(a+1)\cos(2a\pi+b)$

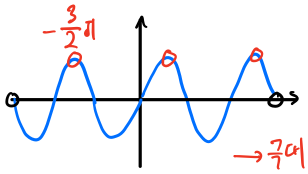
$\rightarrow \cos(2a\pi+b)\neq\cos b$ $\therefore (a,b)=(\frac{3}{2},-3\pi)$

$\therefore f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

iii) Let $g(x)=\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x$, $f(x)=\sin g(x)$

$\rightarrow g(0)=-3\pi, g(4\pi)=3\pi$인 증가함수

$g(\pi)=-\frac{3}{2}\pi$ $\therefore \alpha_1=\pi$



$3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$ $p+q=17$

∗ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.