TH①. 삼각함수

TH②. 삼각함수의 그래프

STEP 0 Base

1. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi,\ 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은? [3점][2024년 5월 공통08]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

인수분해

2. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점][2022학년도 수능 07]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

통분

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점][2021년 9월 06]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

sin X cos = k

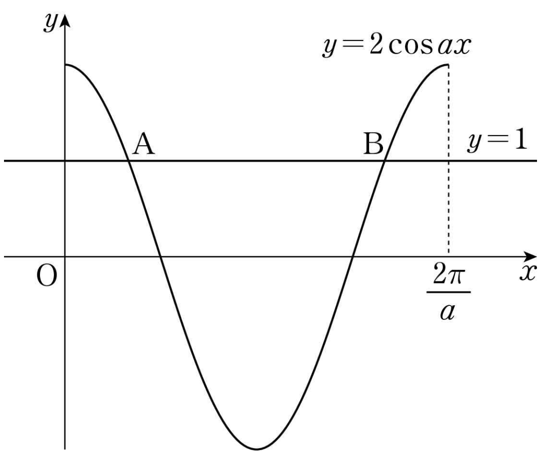
4. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$일 때, $30(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구하시오. [3점][2021년 4월 17]

5. 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점][2022년 6월 공통07]

① $\dfrac{1}{\pi}$　② $\dfrac{2}{\pi}$　③ $\dfrac{3}{\pi}$　④ $\dfrac{4}{\pi}$　⑤ $\dfrac{5}{\pi}$

2cosax = 1

6. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0\leq x\leq \dfrac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{3}$일 때, a의 값은? [3점][2022년 3월 공통08]



① $\dfrac{\pi}{3}$　② $\dfrac{5\pi}{12}$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $\dfrac{7\pi}{12}$　⑤ $\dfrac{2\pi}{3}$

각변환

7. $0\leq x<2\pi$일 때, 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은? [3점][2020년 10월 나07]

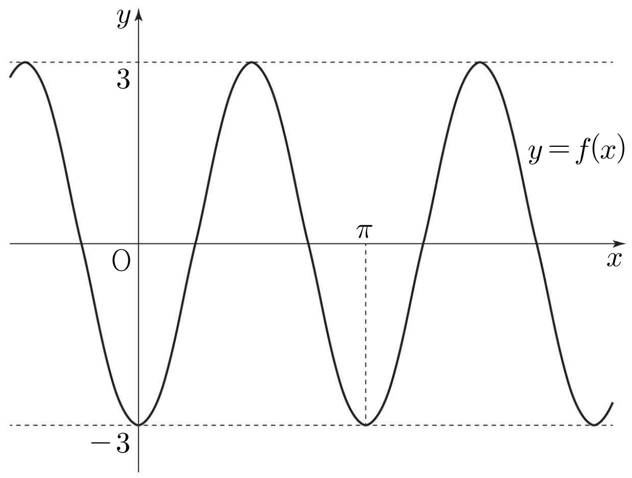
① $\dfrac{\pi}{2}$　② π　③ $\dfrac{3}{2}\pi$　④ 2π　⑤ $\dfrac{5}{2}\pi$

각변환

8. $0\leq x<2\pi$일 때, 두 곡선 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$와 $y=\sin 4x$가 만나는 점의 개수는? [3점][2020년 3월 나07]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

9. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x)=b\sin x+a$의 최댓값은? (단, $b>0$) [3점][2019년 4월 가10]



① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

STEP 1　Plains

10. 삼각방정식 $\sin(\pi\cos x)=0$ 의 해의 개수는? (단, $0 \leqq x < 2\pi$) [4점][2004년 4월 가27]

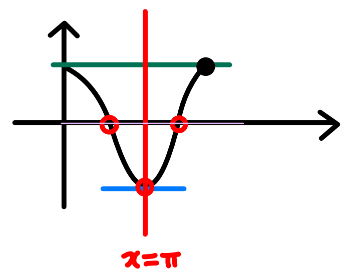
① 0　② 1
③ 2　④ 3
⑤ 4

$\sin(\boxed{\pi\cos x})=0$

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$

$\pi\cos x = -\pi, 0, \pi, -2\pi, 2\pi$

$\cos x = -1, 0, 1$



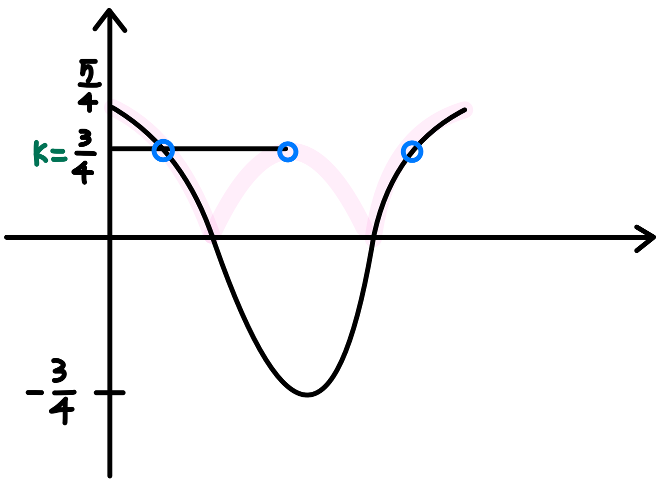
실근의 합: $\pi \times 3$

규칙성

11. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=0$ 이고
$a_{n+1}=(-1)^n a_n+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $(n \geq 1)$ 을 만족시킬 때, a_{50} 의 값은? [4점][2012년 5월 나18]

① -50
② -25
③ 0
④ 25
⑤ 50

12. x에 대한 방정식 $\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오. (단, $0 \leq x < 2\pi$) [4점][2016년 4월 가26]



13. 실수 k에 대하여 함수

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 m 이다. $k+m$의 값은? [4점][2018년 9월 가14]

① 2 ② $\frac{9}{4}$

③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$

⑤ 3

$$\frac{\pi}{2}+\square$$

$$f(x)=\cos^2\underbrace{\left(\boxed{x-\frac{3}{4}\pi}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+k$$

$$\triangle-\square=\frac{\pi}{2}$$

$$=\cos^2\square+\sin\square+k$$

$$=1-\sin^2\square \quad (-1\le \underbrace{\sin\square}_{x}\le 1)$$

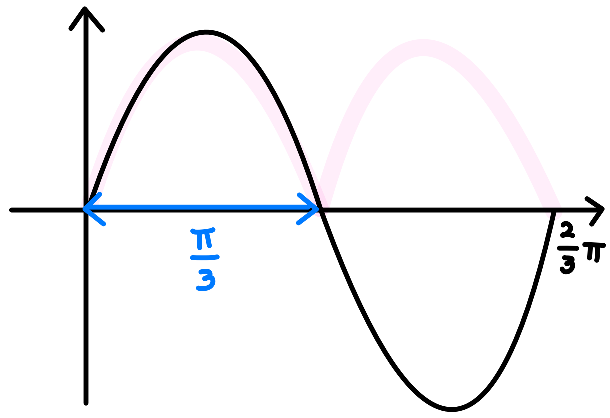
$$=-x^2+x+1+k$$

14. 두 함수 $f(x)=\cos(ax)+1$, $g(x)=|\sin 3x|$의 주기가 서로 같을 때, 양수 a의 값은? [4점][2020년 4월 나15]

① 5 ② 6

③ 7 ④ 8

⑤ 9



15. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은? [4점][2020년 6월 가14]

① 3π ② 4π
③ 5π ④ 6π
⑤ 7π

$D/4 \ge 0$

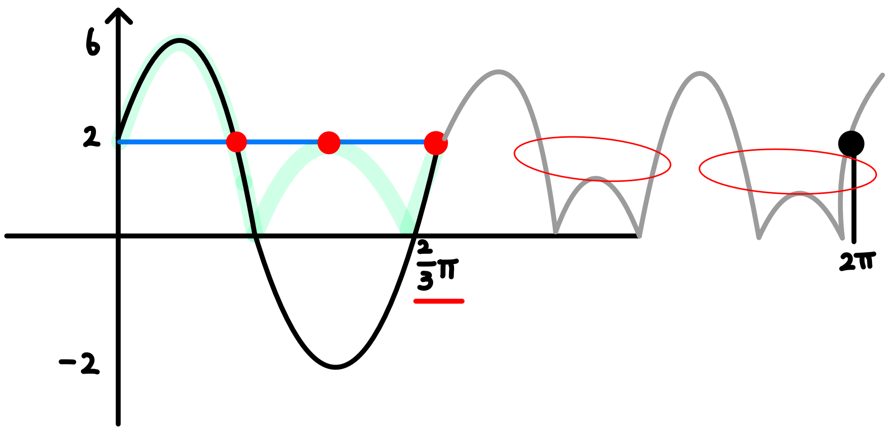
$\longrightarrow \sin^2\theta + 3\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta} + 5\sin\theta - 5 \ge 0$

16. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $3\cos^2 x+5\sin x-1=0$의 모든 해의 합은? [4점][2021년 7월 10]

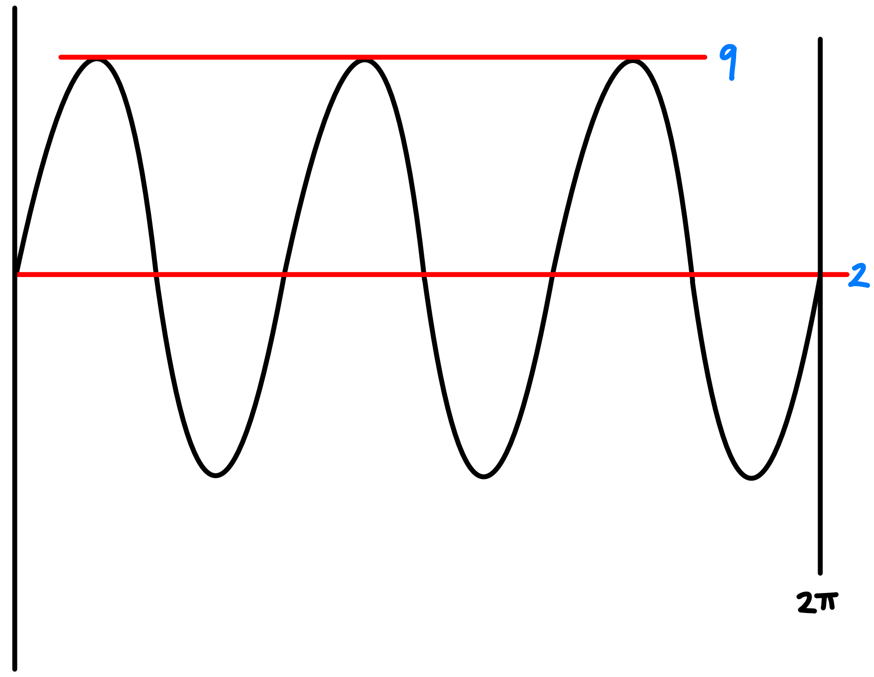
① π ② $\frac{3}{2}\pi$
③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$
⑤ 3π

17. $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$와 직선 $y = 2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점][2023년 7월 공통10]

① 3
② 6
③ 9
④ 12
⑤ 15



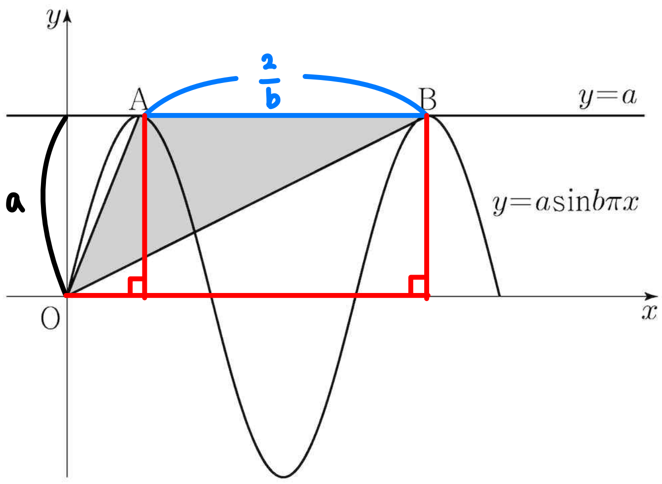
18. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y = a\sin 3x + b$의 그래프가 두 직선 $y = 9$, $y = 2$와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값을 구하시오.
[4점][2020년 4월 가26]



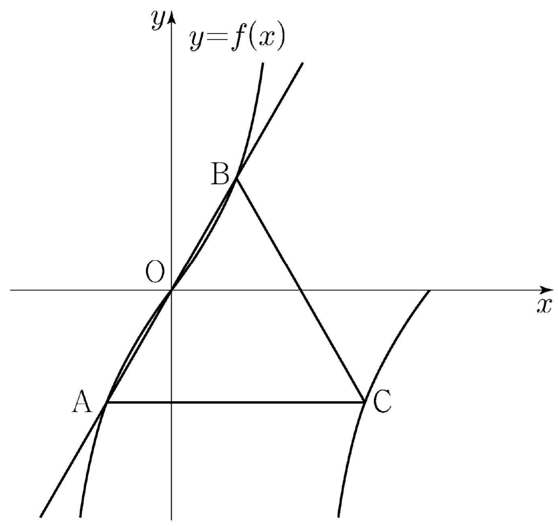
주기를 발견해야 한다

19. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x$ $\left(0\le x\le \dfrac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\dfrac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점][2021년 9월 10]

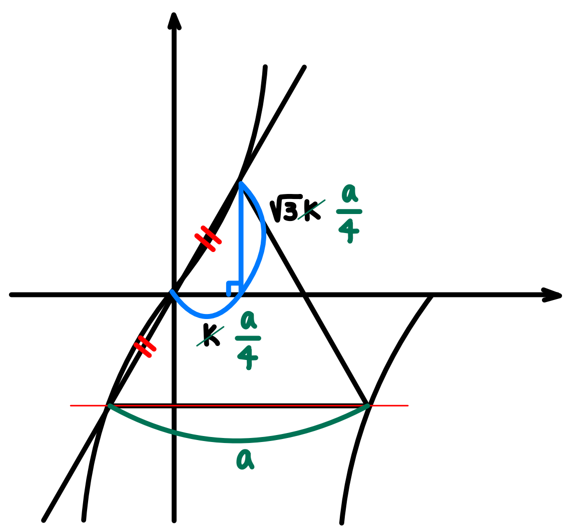
① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5



20. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{a}{2}<x\le a,\ x\ne \dfrac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\dfrac{\pi x}{a}$가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)[4점][2022학년도 수능 11]



① $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{17\sqrt{3}}{12}$
③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$
⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

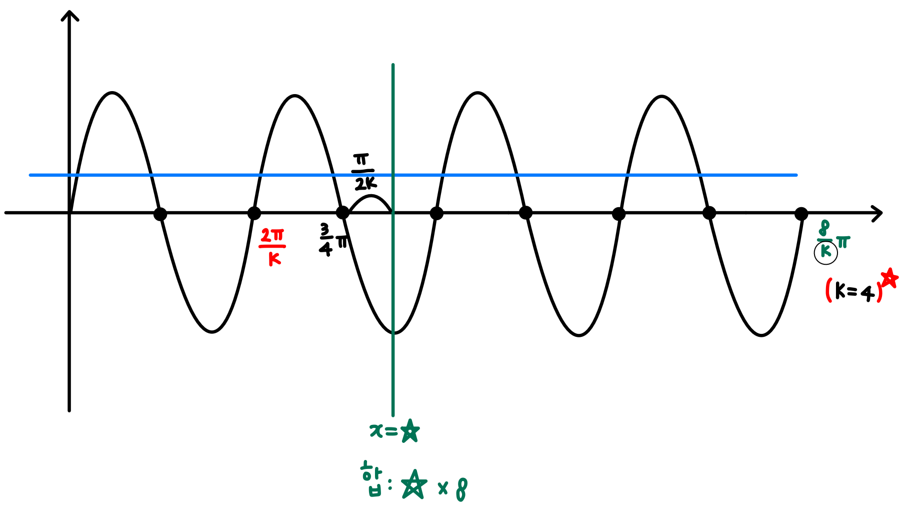


$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

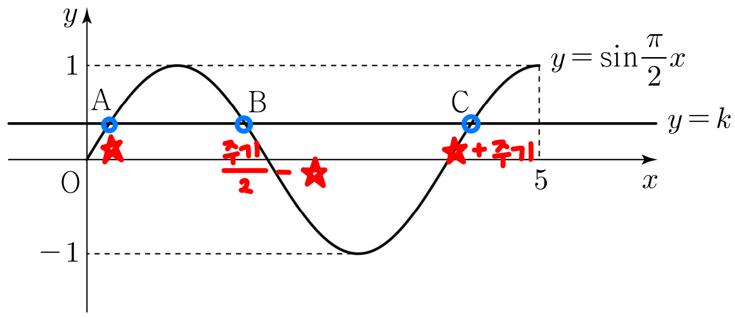
$\tan\frac{\pi}{4}$

21. 자연수 k에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다. $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? [4점][2022년 4월 공통11]

① 5π　　② 6π
③ 7π　　④ 8π
⑤ 9π



22. 곡선 $y = \sin\frac{\pi}{2}x\,(0 \leq x \leq 5)$가 직선 $y = k$ $(0 < k < 1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점][2022년 7월 공통10]

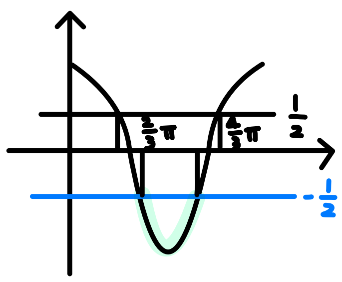


① $\frac{5}{4}$　　② $\frac{11}{8}$
③ $\frac{3}{2}$　　④ $\frac{13}{8}$
⑤ $\frac{7}{4}$

23. 자연수 n에 대하여 $0 \le x < 2^{n+1}$일 때, 부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오. [4점][2020년 7월 나27]

$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \le -\frac{1}{2}$

$0 \le X < 2\pi$



$\frac{2}{3}\pi \le \cancel{X} \le \frac{4}{3}\pi$

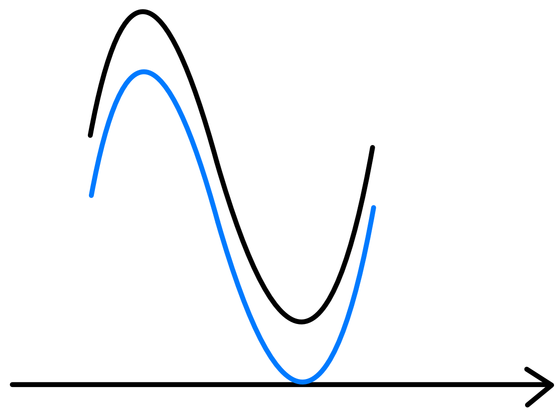
$\frac{\pi}{2^n}x$

$2^{n+1} \le x \le 2^{n+2}$

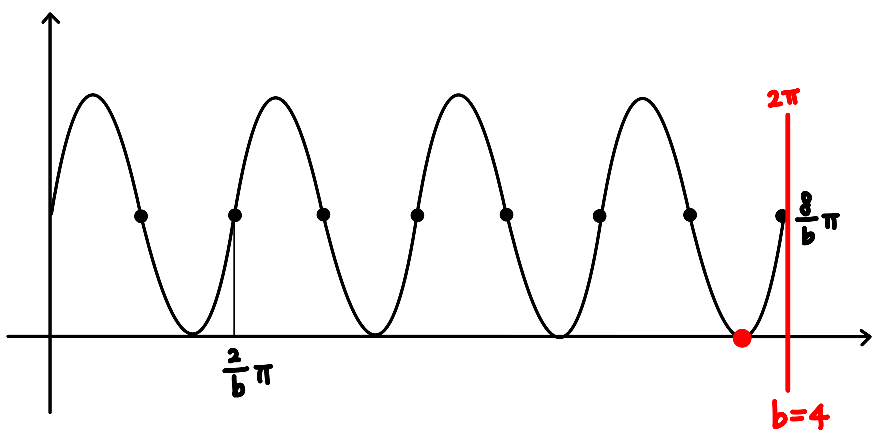
$2^{n+2} - 2^{n+1} - 1 = a_n$

24. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = a\sin bx + 8 - a$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점][2023년 6월 공통19]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이다.
> (나) $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

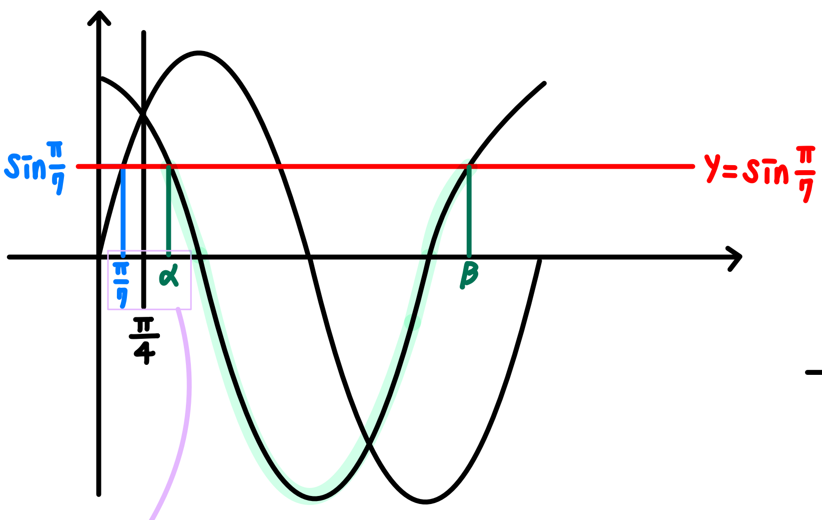


$\mathrm{Min} = -a + 8 - a = 0$, $a = 4$



25. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점][2023년 9월 공통09]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$
③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$
⑤ $\frac{10}{7}\pi$



$2\pi-\alpha$

$\beta-\alpha=?$

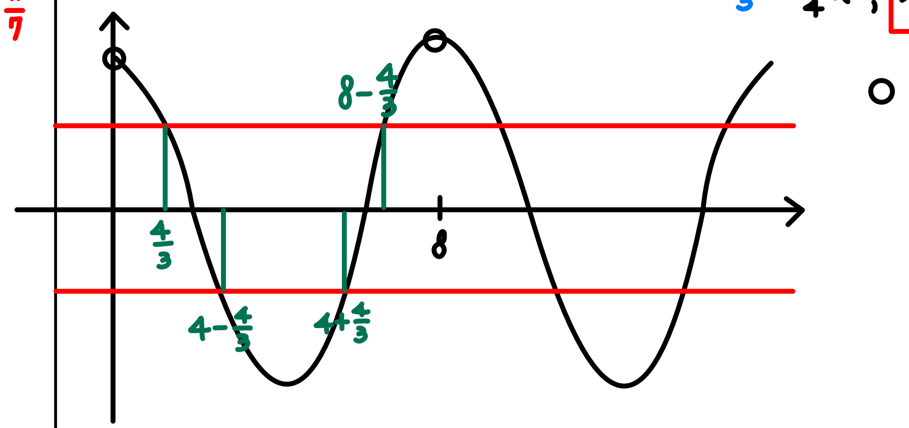
26. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식 $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점][2024학년도 수능 공통19]

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)$

$\cos^2\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} < \cos\boxed{\frac{\pi}{4}x} < \frac{1}{2}$ $\cos\boxed{} = \frac{1}{2}$

$60^\circ = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}x$, $\boxed{x=\frac{3}{4}}$



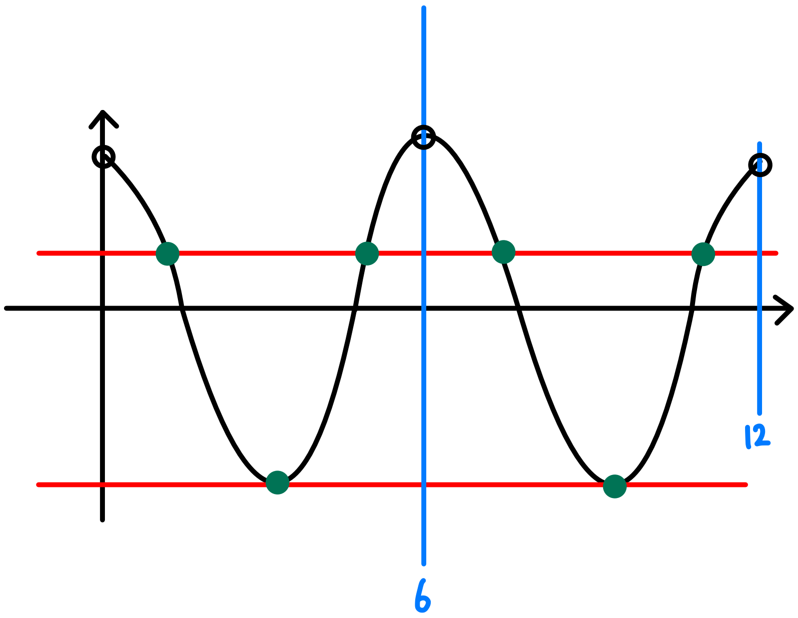
27. 두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$ 에 대하여 $0\leq x<12$ 에서 방정식 $f(g(x))=g(x)$ 를 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합을 구하시오. [4점][2024년 3월 공통20]

$$f(\underbrace{g(x)}_{X})=\underbrace{g(x)}_{X}$$

$$2X^2+2X-1=X$$

$$2X^2+X-1=0\ ,\ \cancel{X}=-1,\frac{1}{2}$$

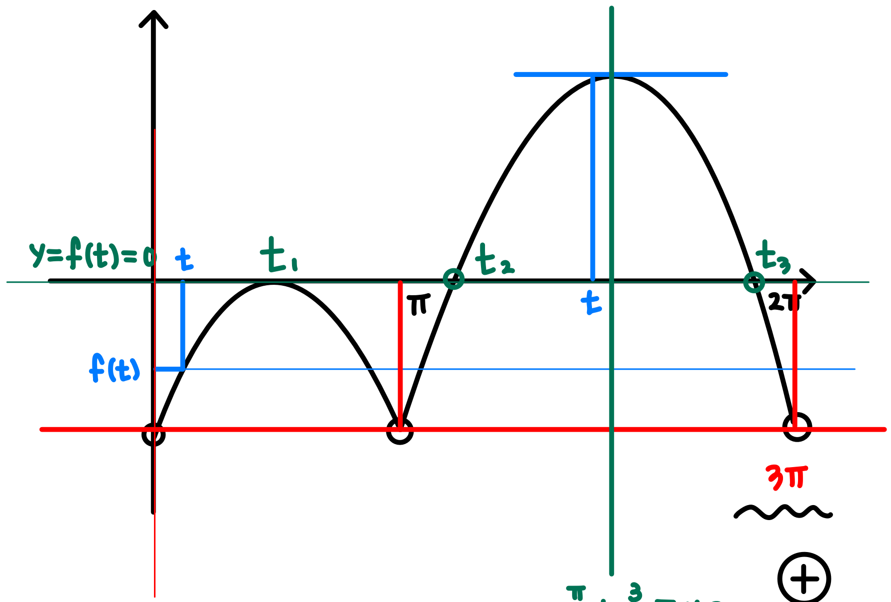
$\cos\frac{4}{3}\pi$



28. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\leq x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\leq x\leq 2\pi)\end{cases}$$

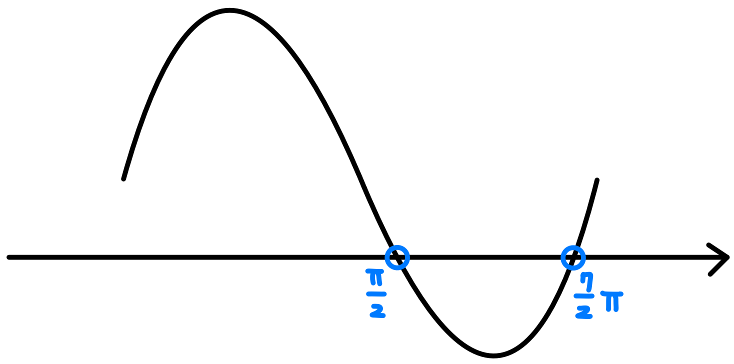
가 있다. $0\leq t\leq 2\pi$ 인 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t 의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점][2024년 9월 공통20]



$$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi\times 2$$

무리수는 안된다. 즉 루트는 안된다

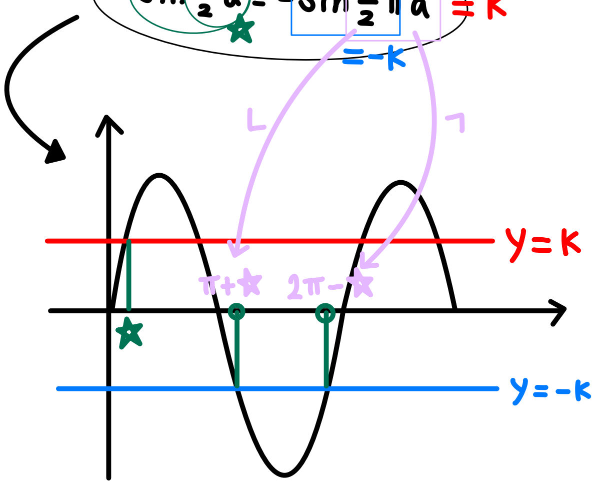
29. $0<a<\dfrac{4}{7}$ 인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a},\ \dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점][2020년 3월 가28]



① $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \longrightarrow 2\sin\frac{\pi}{2}a=\boxed{b}$

② $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0 \longrightarrow -2\sin\frac{7}{2}\pi a=\boxed{b}$

$\sin\frac{\pi}{2}a = \underbrace{-\sin\frac{7}{2}\pi a}_{=-k} = k$



ㄱ: $\frac{7}{2}\pi a=2\pi-\frac{\pi}{2}a,\ a=\frac{1}{2}$ (x) b가 무리수

ㄴ: $\frac{7}{2}\pi a=\pi+\frac{\pi}{2}a,\ a=\frac{1}{3}$ (o)

30. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

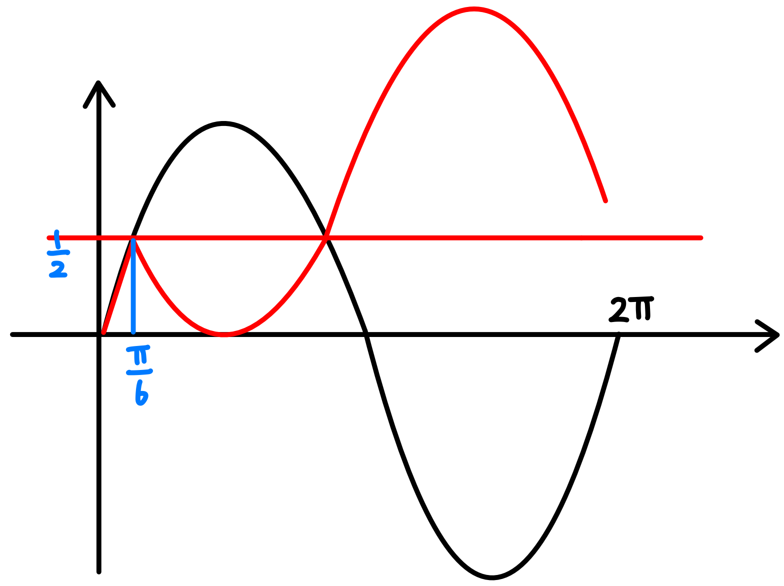
$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le \dfrac{k}{6}\pi\right)\\ 2\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\dfrac{k}{6}\pi<x\le 2\pi\right)\end{cases}$$
이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은? [4점][2021년 10월 11]

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

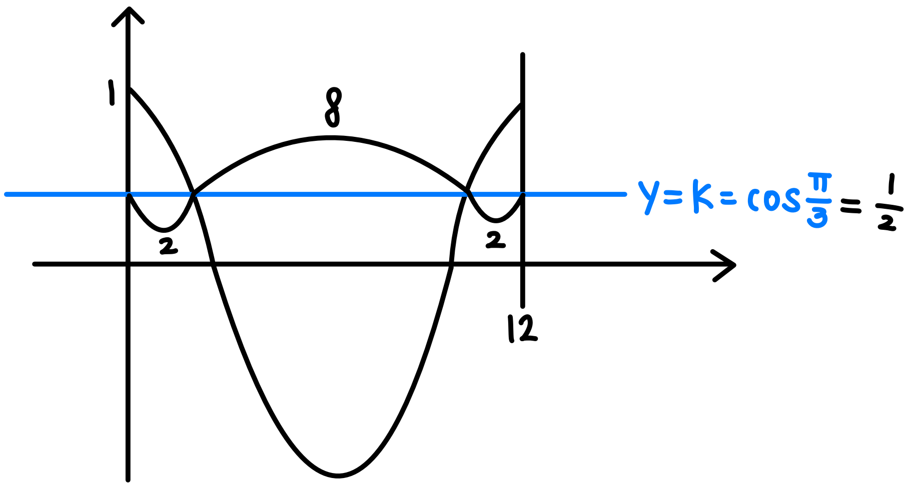
$f(x)=\begin{cases}\sin x\\ 2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x\end{cases}$

$y=\sin\frac{k}{6}\pi$



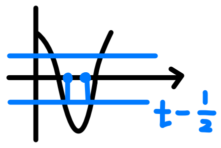
31. 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$, $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점][2022년 9월 공통09]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5



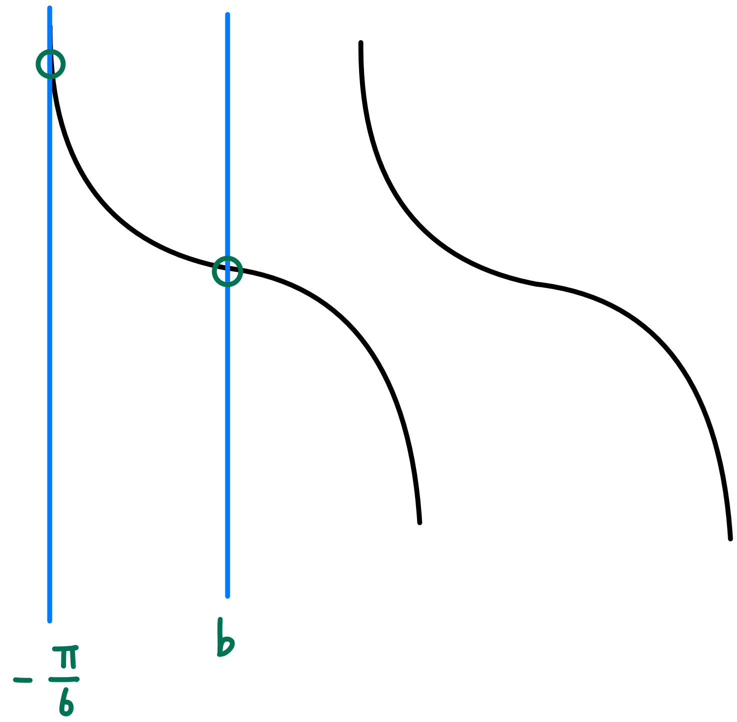
$g(x)=k \longrightarrow 3\cos\frac{\pi}{6}x-1=\frac{1}{2}$, $\cos\boxed{\frac{\pi}{6}x}=-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

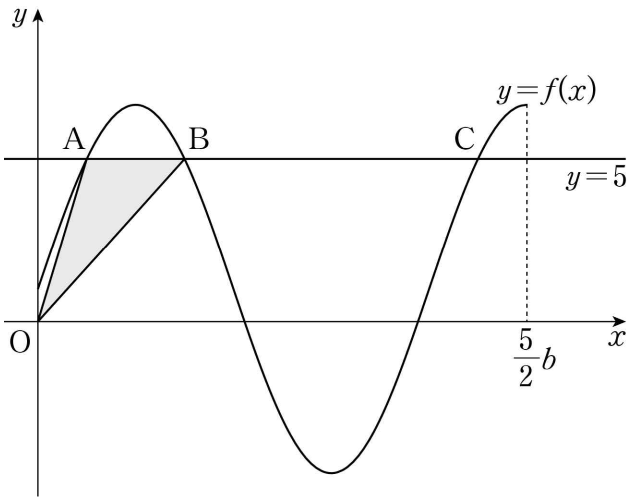


32. 함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점][2023학년도 수능 공통09]

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{5\pi}{12}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{4}$　⑤ $\frac{\pi}{6}$

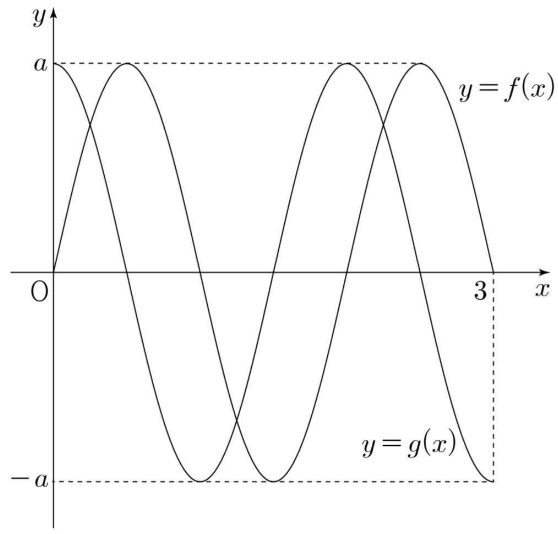


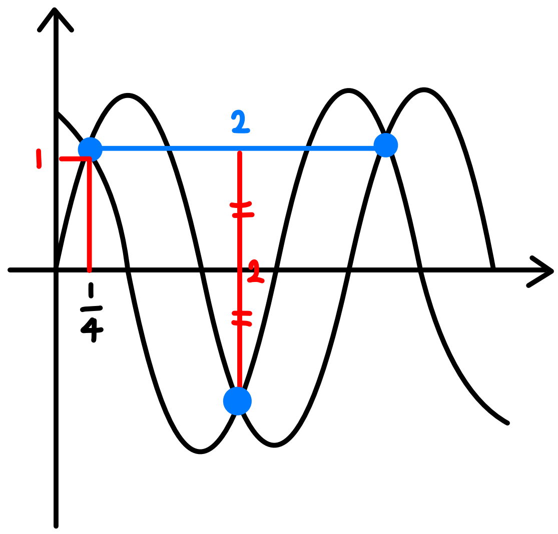
33. 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\left(0\leq x\leq \frac{5}{2}b\right)$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.)[4점][2023년 10월 공통11]



① 68 ② 70
③ 72 ④ 74
⑤ 76

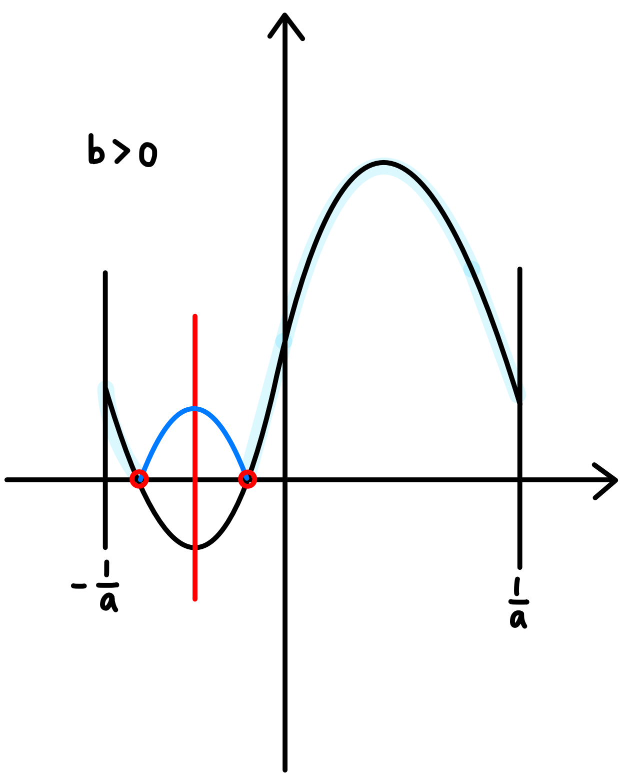
34. 양수 a에 대하여 $0\leq x\leq 3$에서 정의된 두 함수 $f(x)=a\sin\pi x$, $g(x)=a\cos\pi x$가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오.[3점][2024년 7월 공통19]



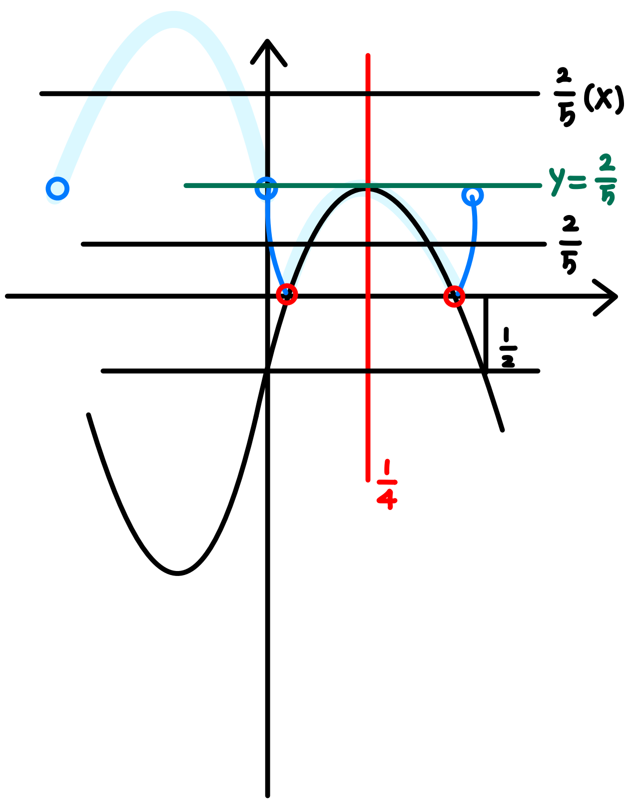


35. 두 상수 a, b $(a>0)$에 대하여 함수 $f(x)=|\sin a\pi x+b|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$의 값을 구하시오. [3점][2024년 10월 공통19]

(가) $f(x)=0$이고 $|x|\le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{1}{2}$이다. (나) $f(x)=\frac{2}{5}$이고 $|x|\le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}$이다.



(X)

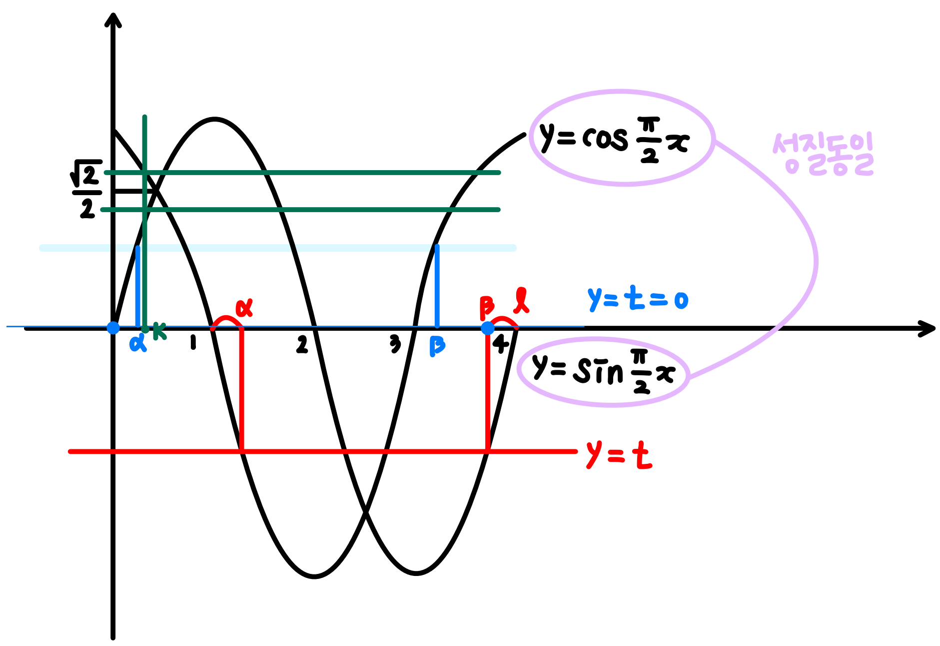


STEP 3 Mountains

36. $-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$의 실근 중에서 집합 $\{x\,|\,0\le x<4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점][2021년 6월 15]

보기
ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다. ㄴ. $\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\alpha+\beta=1+l+4-l$

ㄴ. $\{t\,|\,\underbrace{\beta(t)}_{3+l'}-\underbrace{\alpha(t)}_{l'}=\underbrace{\beta(0)}_{3}-\underbrace{\alpha(0)}_{0}\}=\{t\,|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

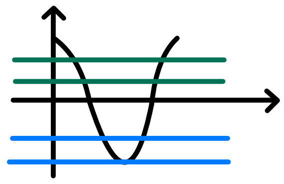
ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$, $\cos k=t_2$, $\sin k=t_1$

$\underbrace{\cos k}_{t_2}-\underbrace{\sin k}_{t_1}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{제곱}}1-2\underbrace{\sin k\cos k}_{t_1t_2}=\frac{1}{4}$

합성

37. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.)[4점][2023년 4월 공통 11]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

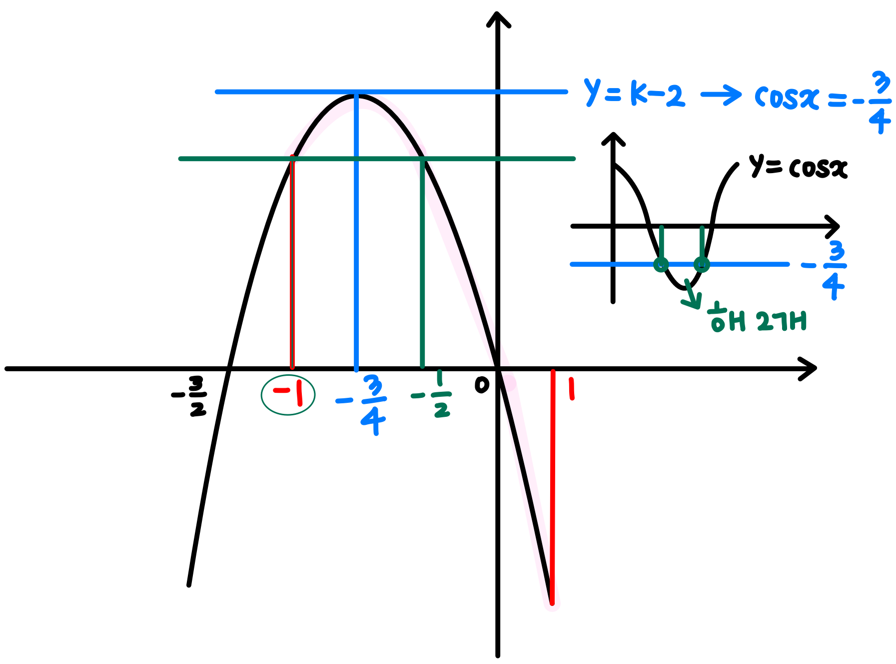


$2\cancel{\sin^2 x} - 3\cos x = k$

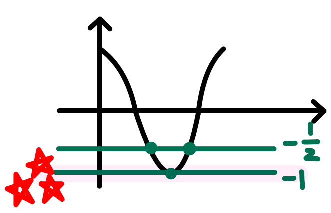
$1-\cos^2 x$

$\boxed{-2\cos^2 x - 3\cos x = k-2}$ $(-k \le \cos x \le 1)$

$-2\cos x(\cos x + \frac{3}{2})$



$\cos x = -1, -\frac{1}{2}$



38. 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = \sin x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.)[4점][2023년 3월 공통13]

> (가) $\{g(a\pi)\}^2 = 1$
>
> (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x)) = 0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

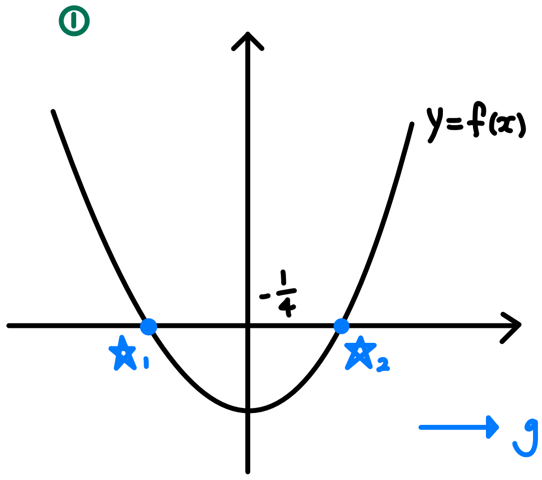
$f(x) = x^2 + ax + b$

(가) $g(a\pi) = 1$ or -1 $(0 \le a \le 2)$

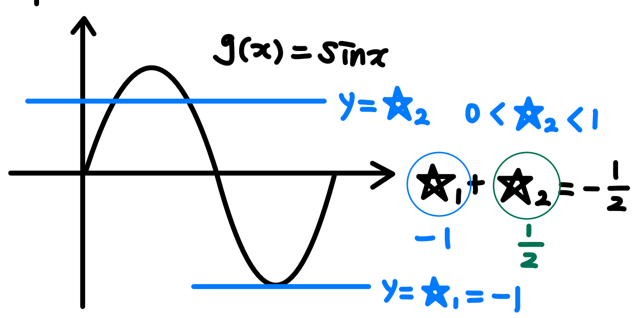
$a = \frac{1}{2}$ ① $a = \frac{3}{2}$

(나) $f(g(x)) = 0$ 해의 합 : $\frac{5}{2}\pi$

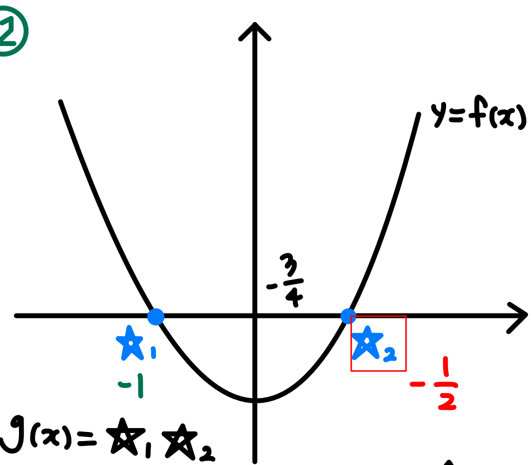
①



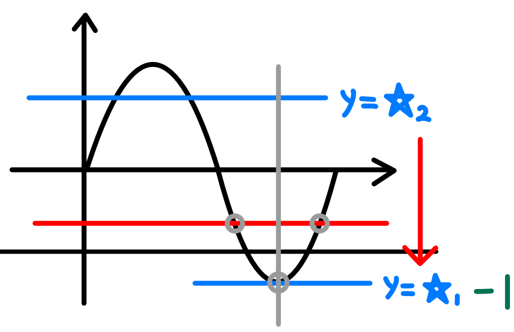
$\rightarrow g(x) = ★_1, ★_2$



②



$g(x) = ★_1, ★_2$



39. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|$ $\left(0\le x<\frac{4\pi}{a}\right)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은? [4점][2022년 10월 공통12]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

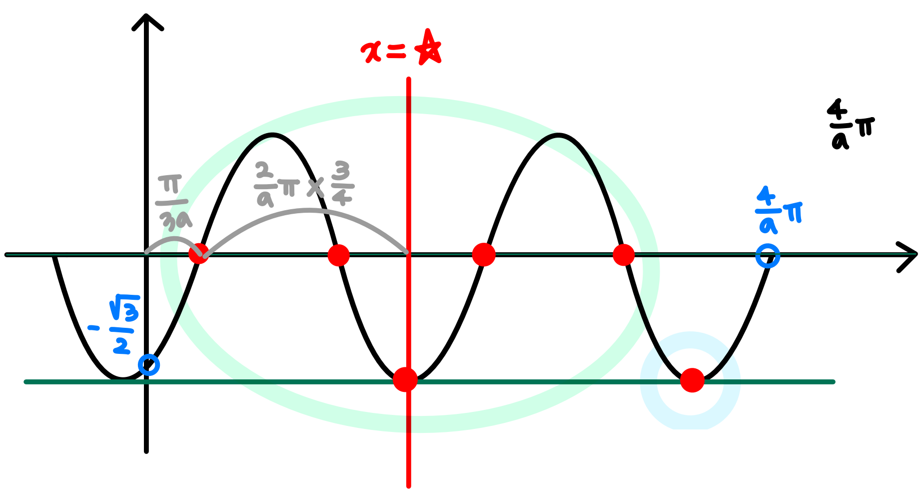
$f(x)=\left|\underbrace{4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2}_{=2 \text{ or } -2}\right|=2$

① | | Graph ② 방정식

② $\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{ or } -1$

$a\left(x-\frac{\pi}{3a}\right)$

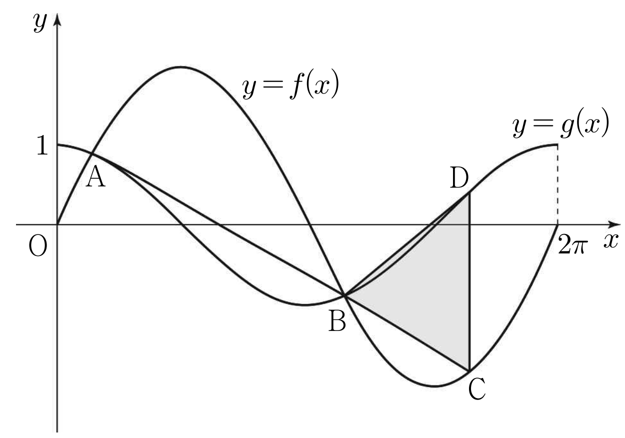
y절편: $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



합: $5\times★+★+$주기

$\frac{\pi}{3a}+\frac{2}{a}\pi\times\frac{3}{4}$ $\frac{2}{a}\pi$

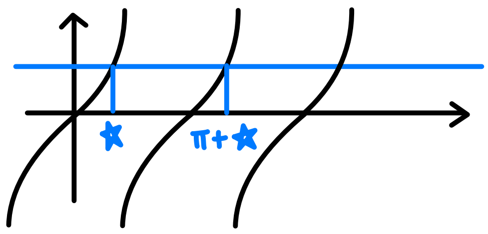
40. 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\,2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)[4점][2023년 4월 공통13]

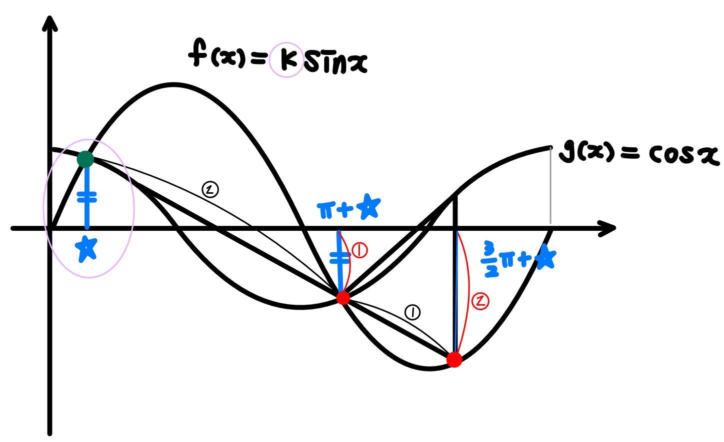


① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$ ④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

※ A, B

$f=g$, $k\sin x=\cos x$, $\tan x=\frac{1}{k}$





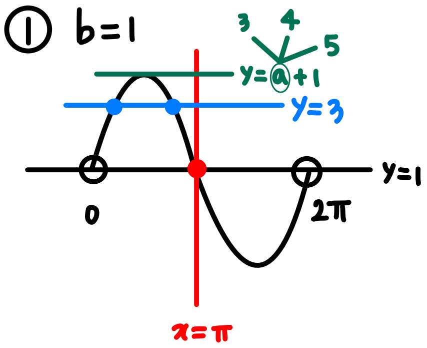
① $\cancel{k}\sin(\pi+★)\times2=\cancel{k}\sin\left(\frac{3}{2}\pi+★\right)$, $2\sin★=\cos★$
$-\cos★$
$\tan★=\frac{1}{2}$

② $k\sin★=\cos★$, $\tan★=\frac{1}{k}$

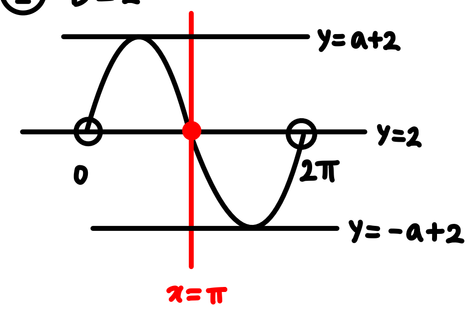
'b' 값을 움직인다 (명심해두기!!!)

41. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점][2024년 6월 공통20]

① b=1

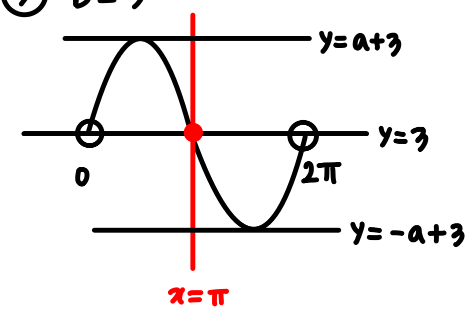


② b=2



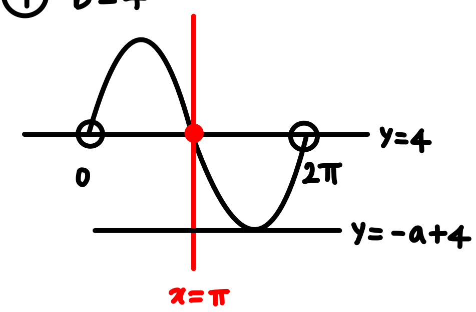
a=1, ~~2~~, ~~3~~

③ b=3



a=~~1~~, ~~2~~, 3, 4, 5

④ b=4



a=~~1~~, 2, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~

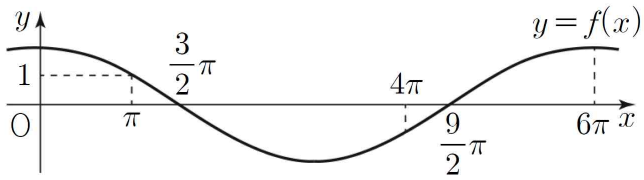
1. ⑤

[출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $f(x)=a\cos bx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}=6\pi$이므로

$b=\frac{1}{3}$, $f(x)=a\cos\frac{x}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[\pi,\ 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(\pi)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}=1$ 이므로 $a=2$

따라서 $a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

2. ①

[출제의도] 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta=3$

이때,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$,

$\sin\theta=3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$10\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ …… ㉠

이 값을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=1$

$\sin^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

3. ①

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$ 에서

$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$

$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$

$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$

$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$

따라서

$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 40

[출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\frac{7}{18}=\frac{16}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

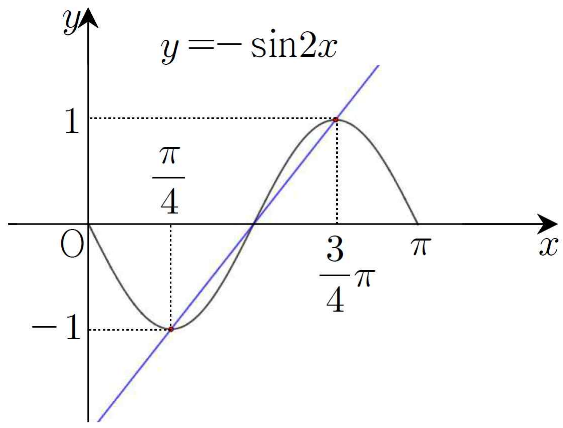
따라서 $30(\sin\theta+\cos\theta)=40$

5. ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$

따라서 $a=\frac{3}{4}\pi$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로

두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{-1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{2}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{4}{\pi}$

6. ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$0\leq x\leq\frac{2\pi}{a}$ 에서 $0\leq ax\leq 2\pi$ 이므로

$2\cos ax=1$, 즉 $\cos ax=\frac{1}{2}$ 에서

$ax=\frac{\pi}{3}$ 또는 $ax=\frac{5\pi}{3}$, 즉 $x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B 의 좌표가 각각 $\left(\frac{\pi}{3a},\ 1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3a},\ 1\right)$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$ 이므로

$\frac{5\pi}{3a}-\frac{\pi}{3a}=\frac{4\pi}{3a}=\frac{8}{3}$

$a=\frac{4\pi}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{\pi}{2}$

7. ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y좌표가 같으므로

$\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ 이므로 $2\sin x=1$

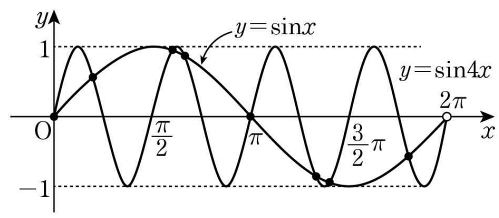
즉, $\sin x=\frac{1}{2}$, 그러므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 점의 x좌표의 합은 π

8. ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

함수 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고 함수 $y=\sin 4x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $0\leq x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

9. ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(0)=a=-3$

함수 $f(x)$의 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$, $b=2$

$\therefore\ g(x)=2\sin x-3$

$-1\leq\sin x\leq 1$이므로 $-5\leq 2\sin x-3\leq -1$

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 -1

10. ⑤

[출제의도] 삼각방정식 풀기

$\pi\cos x=n\pi$ (단, n은 정수)

$\cos x=n$

$0\leqq x<2\pi$이므로 $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

11. ④

점화식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 를 대입하면

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=-2,\ a_5=-2,\ a_6=3,\ \cdots$

이므로 $a_{2n}=\begin{cases} n & (n\text{이 홀수}) \\ -n & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$ 이다.

따라서 $a_{50}=a_{2\times 25}=25$ 이다.

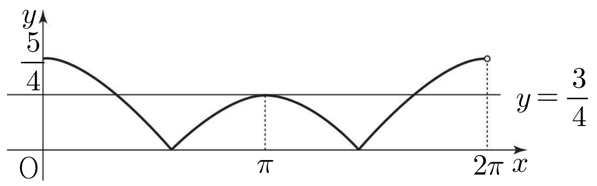
12. 30

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질 추론하기

$y=\cos x+\frac{1}{4}$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 그래프이므로 주기는 2π, 치역은 $\left\{y\ \middle|\ -\frac{3}{4}\leq y\leq\frac{5}{4}\right\}$이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프는 $y=\cos x+\frac{1}{4}$ 의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시켜 얻은 그래프이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프는 그림과 같다.



$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$ 의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 k의 값은 $\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}$이고 $40\alpha=30$

13. ③

$x=\theta+\frac{3}{4}\pi$라 하면

$f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=\cos^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+k$

$=\cos^2\theta+\sin\theta+k$

$=1-\sin^2\theta+\sin\theta+k$

$=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$

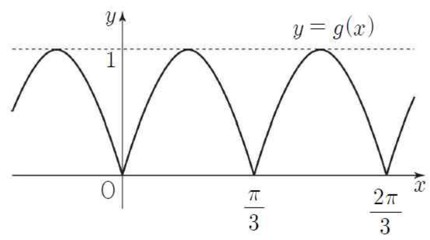
최댓값은 $k+\frac{5}{4}=3$, $k=\frac{7}{4}$

최솟값은 $\sin\theta=-1$일 때, $m=\frac{3}{4}$

$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

14. ②

함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 서로 같으므로 $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}$

a는 양수이므로 $a=6$

15. ①

[출제의도] 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

이차방정식 $x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$ 의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\geq 0$

이어야 한다.

즉, $\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\geq 0$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5\geq 0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\leq 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\leq 0$

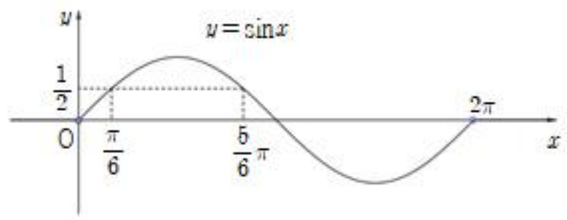
$\sin\theta-2<0$이므로

$2\sin\theta-1\geq 0$

$\sin\theta\geq\frac{1}{2}$

이때 $0\leq\theta<2\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\therefore\ 4\beta-2\alpha=4\times\frac{5}{6}\pi-2\times\frac{\pi}{6}=3\pi$

16. ⑤

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

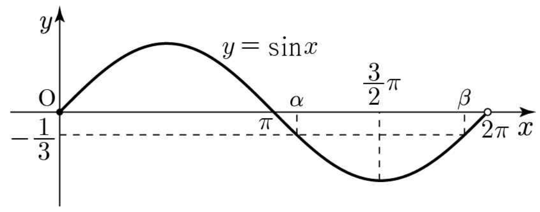
$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

$3(1-\sin^2x)+5\sin x-1=0$

$3\sin^2x-5\sin x-2=0$

$(3\sin x+1)(\sin x-2)=0$

$-1\leq\sin x\leq 1$이므로 $\sin x=-\frac{1}{3}$ …… ㉠



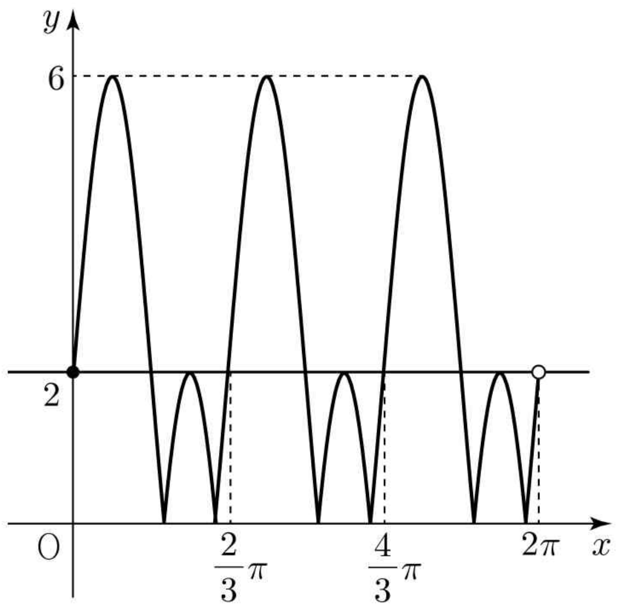
㉠을 만족시키는 x의 값을 $x=\alpha$, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\alpha+\beta=3\pi$

따라서 모든 해의 합은 3π

17. ③

삼각함수 $y=4\sin 3x+2$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로 $0\leq x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$는 다음과 같다.

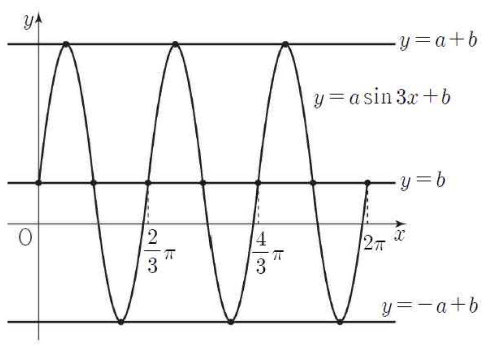


따라서 $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

18. 14

함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 개수는

$k=-a+b$ 또는 $k=a+b$일 때, 3

$k=b$일 때, 7이므로 $b=2$이고,

$-a+2=9$ 또는 $a+2=9$

a가 양수이므로 $a=7$

따라서 $a\times b=7\times 2=14$

19. ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이므로 두 점 A, B의 좌표는

$A\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $B\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b$ …… ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}$

$=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$, $ab=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=3$

20. ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로

양수 t에 대하여

$B(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면

$A(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,

$\overline{AB}=4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로

$\overline{AC}=4t=a$이고,

$C(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y=\tan\frac{\pi x}{a}=\tan\frac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{\pi\times 3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{3\pi}{4}$에서

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

21. ③

[출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는

$0 \le x < 2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 개수와 같다.

$1 \leq l \leq k$인 자연수 l에 대하여

$\frac{2(l-1)}{k}\pi \leq x < \frac{2l}{k}\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이

만나는 점의 개수는 2이고

$0 \leq x < 2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 개수가 8이므로

$2k=8$에서 $k=4$

$0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\frac{1}{3}$의 서로 다른 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_8$이라 하자.

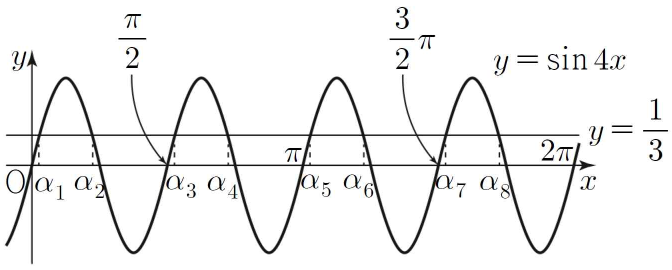
함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha_2=\frac{\pi}{4}-\alpha_1,\ \alpha_3=\frac{\pi}{2}+\alpha_1,\ \alpha_4=\frac{3}{4}\pi-\alpha_1,\ \alpha_5=\pi+\alpha_1,$

$\alpha_6=\frac{5}{4}\pi-\alpha_1,\ \alpha_7=\frac{3}{2}\pi+\alpha_1,\ \alpha_8=\frac{7}{4}\pi-\alpha_1$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

[참고]



22. ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1\ (0<x_1<1),\ x_2,\ x_3$이라 하면

삼각함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로

$x_2=2-x_1,\ x_3=x_1+4$

$x_1+x_2+x_3=x_1+(2-x_1)+(x_1+4)=x_1+6=\frac{25}{4}$

$x_1=\frac{1}{4},\ x_2=2-x_1=\frac{7}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=x_2-x_1=\frac{3}{2}$

23. 169

$0 \leq x < 2^{n+1}$일 때, $0 \leq \frac{\pi}{2^n}x < 2\pi$이므로

부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \leq -\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{2}{3}\pi \leq \frac{\pi}{2^n}x \leq \frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \frac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의

개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로

$\sum_{n=1}^{7} a_n$은 $\frac{2^2}{3} \leq x \leq \frac{2^9}{3}$인 자연수의 개수와 같다.

$\frac{2^2}{3}=1.333\cdots,\ \frac{2^9}{3}=170.666\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{7} a_n=170-1=169$

[참고]

$n=1$일 때, $\frac{2^2}{3} \leq x \leq \frac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, $\frac{2^3}{3} \leq x \leq \frac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로 $a_2=3$

$n=3$일 때, $\frac{2^4}{3} \leq x \leq \frac{2^5}{3}$인 자연수 x는 6, 7, 8, 9, 10이므로

$a_3=5$

$n=4$일 때, $\frac{2^5}{3} \leq x \leq \frac{2^6}{3}$인 자연수 x는 11, 12, 13, $\cdots$,

21이므로 $a_4=11$

$n=5$일 때, $\frac{2^6}{3} \leq x \leq \frac{2^7}{3}$인 자연수 x는 22, 23, 24, $\cdots$,

42이므로 $a_5=21$

$n=6$일 때, $\frac{2^7}{3} \leq x \leq \frac{2^8}{3}$인 자연수 x는 43, 44, 45, $\cdots$,

85이므로 $a_6=43$

$n=7$일 때, $\frac{2^8}{3} \leq x \leq \frac{2^9}{3}$인 자연수 x는 86, 87, 88, $\cdots$,

170이므로 $a_7=85$

24. 8

[출제의도] 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-a+8-a=8-2a$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면 $8-2a \geq 0$

즉, $a \leq 4$이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는

1이다.

그러므로 $0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$\frac{15\pi}{2b} < 2\pi \leq \frac{19\pi}{2b}$

이어야 한다.

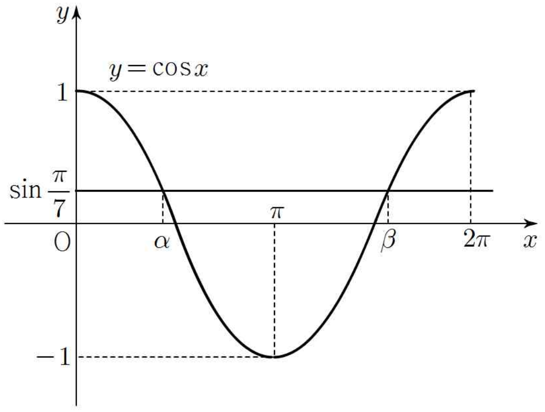
즉, $\frac{15}{4} < b \leq \frac{19}{4}$이고 b는 자연수이므로

$b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

25. ③

$0 \le x \le 2\pi$일 때 주어진 부등식 $\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$ 을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 다음 그림에서와 같이 $\alpha \le x \le \beta$이다.



이때 $\sin\frac{\pi}{7} > 0$이고 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta - \frac{3}{2}\pi = t$$

로 놓으면

$$\sin\frac{\pi}{7} = \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \qquad \therefore\ t = \frac{\pi}{7}$$

$$\therefore\ \beta - \alpha = \left(\frac{3}{2}\pi + t\right) - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{9}{7}\pi$$

[다른 풀이]

$\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{5}{14}\pi$ 이므로 부등식

$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$ 에서

$\cos x \le \cos\frac{5}{14}\pi$

$$\therefore\ \frac{5}{14}\pi \le x \le 2\pi - \frac{5}{14}\pi$$

$\alpha = \frac{5}{14}\pi,\ \beta = \frac{23}{14}\pi$이므로

$$\beta - \alpha = \frac{9}{7}\pi$$

26. 32

함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$의 주기가 $2\pi \div \frac{\pi}{4} = 8$이므로 정수 n에 대하여 함숫값 $f(n)$은 다음의 8개의 값이 차례로 반복된다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x) = f(2+x)f(2-x)$라 하면 함수 f의 주기가 8이므로 함수 g의 주기도 8이다.

$g(1) = f(3)f(1) = \frac{1}{2}$

$g(2) = f(4)f(0) = 0$

$g(3) = f(5)f(-1) = f(5)f(7) = \frac{1}{2}$

$g(4) = f(6)f(-2) = f(6)f(6) = 1$

$g(5) = f(7)f(-3) = f(7)f(5) = \frac{1}{2}$

$g(6) = f(8)f(-4) = f(0)f(4) = 0$

$g(7) = f(9)f(-5) = f(1)f(3) = \frac{1}{2}$

$g(8) = f(10)f(-6) = f(2)f(2) = 1$

이므로 $x = 1,\ 2,\ \cdots,\ 15$인 자연수 x에 대하여

$g(x) = f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$

인 자연수 x는 2, 6, 10, 14이다.

따라서 그 합은

$2+6+10+14 = 32$

27. 36

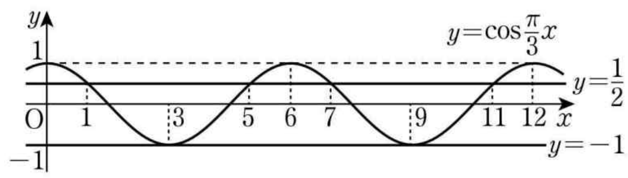
$f(g(x)) = g(x)$에서 $g(x) = t\ (-1 \le t \le 1)$이라 하면 $f(t) = t$에서

$2t^2 + 2t - 1 = t,\ (2t-1)(t+1) = 0$

$t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = -1$이므로 $g(x) = \frac{1}{2}$ 또는 $g(x) = -1$

함수 $g(x) = \cos\frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 6이고, $g(1) = g(5) = \frac{1}{2}$,

$g(3) = -1$이다.



그러므로 $0 \le x < 12$에서 $g(7) = g(11) = \frac{1}{2}$, $g(9) = -1$이다.

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

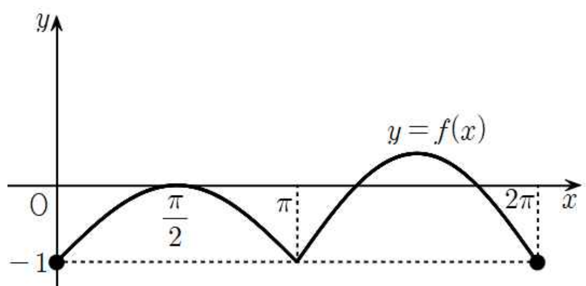
$1+3+5+7+9+11 = 36$

28. 15

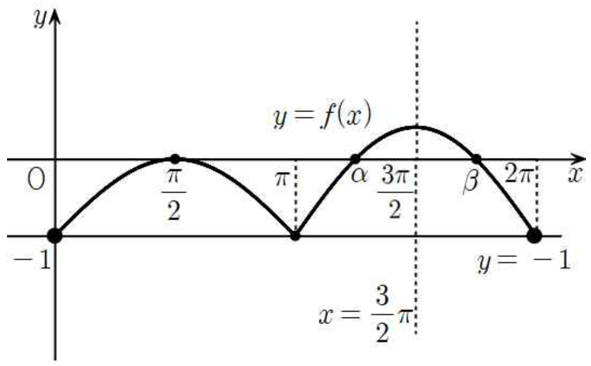
닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 $0 \le x < \pi$에서 $y = \sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고 $\pi \le x \le 2\pi$에서 $y = \sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근은 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = f(t)$의 교점의 x좌표이다.



교점의 개수가 3인 경우는 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=-1$

$f(t)=-1$에서 $t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

$\pi \leq x \leq 2\pi$에서 $-\sqrt{2}\sin x-1=0$을 만족시키는 두 근을 α, β라 하면 $f(t)=0$에서

$t=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$

이때 $\alpha+\beta=3\pi$이므로 모든 t의 값의 합은

$0+\dfrac{\pi}{2}+\pi+2\pi+3\pi=\dfrac{13}{2}\pi$

$\therefore\ p+q=2+13=15$

29. 40

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a}, \dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\dfrac{4}{7}$이므로

$-\dfrac{\pi}{a}<-\dfrac{7}{4}\pi$, $\dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{a}$이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지나므로

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)+b=0$

$f\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\dfrac{7a}{2}\pi\right)+b=0$

따라서 $\sin\left(\dfrac{7a}{2}\pi\right)=-\sin\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\dfrac{4}{7}$에서 $0<\dfrac{a}{2}\pi<\dfrac{2}{7}\pi$, $0<\dfrac{7a}{2}\pi<2\pi$ 이므로

$\dfrac{7a}{2}\pi=2\pi-\dfrac{a}{2}\pi$ 또는 $\dfrac{7a}{2}\pi=\pi+\dfrac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

(ⅰ) $a=\dfrac{1}{2}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)+b$에서

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+b=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+b=-\sqrt{2}+b=0$

이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=\dfrac{1}{3}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x\right)+b$에서

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+b=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+b=-1+b=0$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=1$이고

$30(a+b)=30\times\left(\dfrac{1}{3}+1\right)=40$

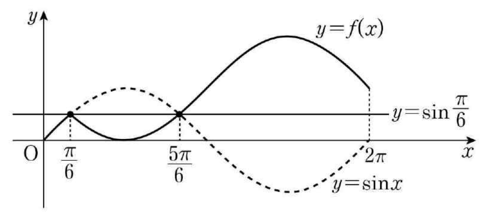
30. ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 문제를 해결한다.

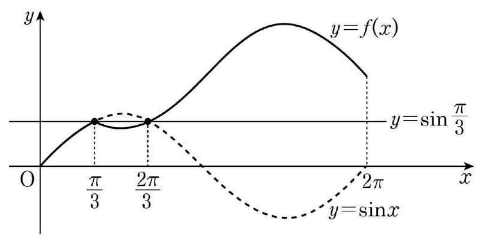
그림은 k의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

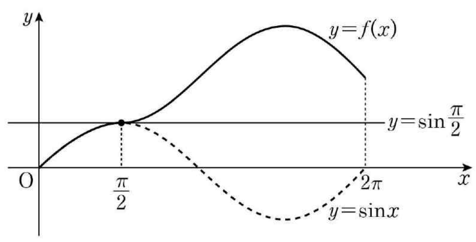
(ⅰ) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



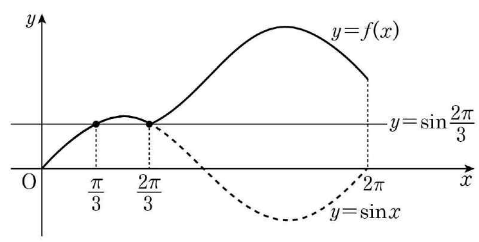
(ⅱ) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



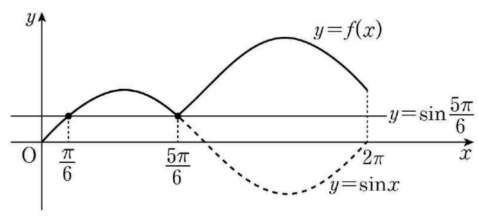
(ⅲ) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(ⅳ) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(ⅴ) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(ⅰ) $0 \le x \le \frac{k}{6}\pi$일 때, $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ⅱ) $\frac{k}{6}\pi < x \le 2\pi$일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) - \sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서

$\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 방정식

$\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1$, $k=5$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$이므로

$\sin x = \frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2$, $k=4$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = 1$이므로

$\sin x = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 1 이다.

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2+2+1+2+2 = 9$

31. ③

$12 - \alpha_1 = \alpha_2$이므로 $\alpha_2 - \alpha_1 = 12 - 2\alpha_1 = 8$, $\alpha_1 = 2$

$f(2) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = k$

$-3\cos\frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6} = \frac{2}{3}\pi$, $x = 4$,

$\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 12 - 4 = 8$이므로

$|\beta_1 - \beta_2| = 4$

32. ③

[출제의도] 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

함수 $f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$ 이다.

한편, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x = -\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = a - \sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7$에서

$a + \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3} = 7$

$a + 3 = 7$

$a = 4$

함수 $f(x)$는 $x = b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b) = 4 - \sqrt{3}\tan 2b = 3$에서

$\tan 2b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\frac{\pi}{3} < 2b < \frac{\pi}{2}$이므로

$2b = \frac{\pi}{6}$

$b = \frac{\pi}{12}$

따라서 $a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

33. ①

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 5 = \frac{15}{2}$이므로

$\overline{AB} = 3$, 이때 $\overline{BC} = \overline{AB} + 6 = 9$

함수 $y = f(x)$의 주기가 $2b$이므로

$2b = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 12$, $b = 6$

선분 AB의 중점의 x좌표가 3이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$이다.

점 A는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$에서 $a\sin\frac{\pi}{4} + 1 = 5$, $a = 4\sqrt{2}$

따라서 $a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 = 32 + 36 = 68$

34. 2

삼각함수 $y = a\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, 최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

삼각함수 $y = a\cos\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$,

최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

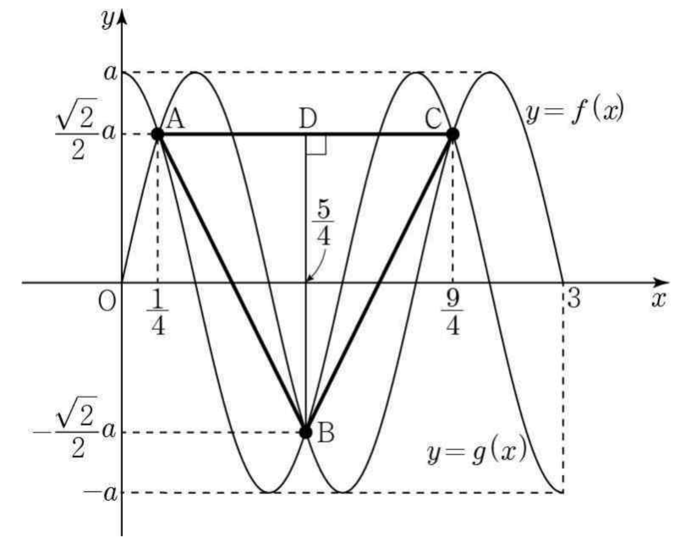
곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x) = g(x)$의 실근이므로

$a\sin\pi x = a\cos\pi x$,

$\tan\pi x = 1\pi x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi$ $(0 \le \pi x \le 3\pi)$

$x = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}$

곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 $A\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $C\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\sqrt{2}\,a$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}\,a=2$

$a=\sqrt{2}$

따라서 $a^2=2$

35. 84

(가)에서 $f(x)=0$ 이고 $-\frac{1}{a}\leq x\leq\frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x의 값의 합이 $\frac{1}{2}$ 이 되기 위해서는

$\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $a=1$ 또는 $a=2$이다.

$a=1$이면 $b=-1$이고 $-\frac{1}{a}\leq x\leq\frac{1}{a}$ 에서 $f(x)=\frac{2}{5}$ 인 모든 실수 x의 값의 합이 1이 되어 (나)를 만족시키지 않는다.

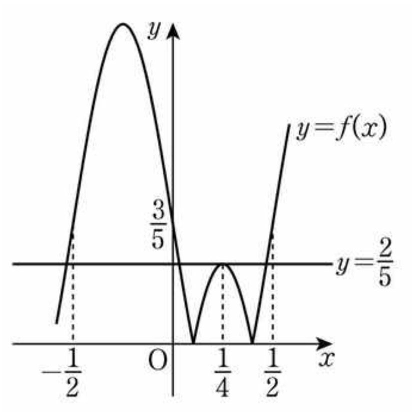
$a=2$이면 (나)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}$ 가 세 점에서 만나야 하므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{2}+b\right|=|1+b|=\frac{2}{5}$

$b=-\frac{7}{5}$ 이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나지 않으므로

$b=-\frac{3}{5}$

따라서 $60(a+b)=60\left(2-\frac{3}{5}\right)=60\times\frac{7}{5}=84$



36. ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

ㄱ. 방정식

$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$ 에서

$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$

이 방정식의 실근은 두 함수

$y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$ 의 그래프와 $y=t$와의 교점의 x좌표이다.

한편, 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$ 의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.

$-1\leq t<0$이면 직선 $y=t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.

이때, 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$ 의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x=1$, $x=3$에 대하여 대칭이고 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

그러므로

$\alpha(t)=1+k\ (0<k\leq 1)$

로 놓으면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

$\alpha(t)+\beta(t)=5$ <참>

ㄴ. 실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x\,|\,0\leq x<4\}$의 원소이므로

$\beta(0)=3$, $\alpha(0)=0$

그러므로 주어진 식은

$\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

(ⅰ) $0\leq t\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

$t=0$이면 $\beta(0)-\alpha(0)=3-0=3$

$t\neq 0$이면 다음 그림과 같다.

이때, $\alpha(t)=k\ \left(0<k\leq\ \dfrac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=3+k$

그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$

(ⅱ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,

이때, $\alpha(t)=k\ \left(0<k<\dfrac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ (0<2k<1)$

(ⅲ) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0,\ \beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(ⅳ) $-1\leq\ t<0$일 때,

$1<\alpha(t)\leq\ 2,\ 3\leq\ \beta(t)<4$이므로

$\beta(t)-\alpha(t)<3$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서

$\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=3\}=\left\{t\,\middle|\,0\leq\ t\leq\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ <참>

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는

$0<t_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t_2$

이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha,\ t_2=\cos\dfrac{\pi}{2}\alpha$

이때, $t_2=t_1+\dfrac{1}{2}$이므로

$\cos\dfrac{\pi}{2}\alpha=\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}$

이 식을 $\cos^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면

$2\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha+\dfrac{1}{4}=1$

$8\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+4\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha-3=0$

$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$

이때, $\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha>0$이므로

$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$

그러므로

$t_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$t_2=t_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서

$t_1\times t_2=\dfrac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\dfrac{3}{8}$ <거짓>

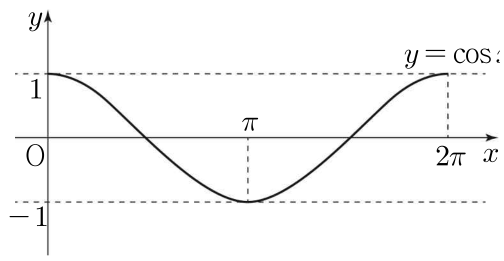
37. ②

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$2(1-\cos^2x)-3\cos x=k$

$2\cos^2x+3\cos x+k-2=0$

$0\leq\ x\leq\ 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



상수 a에 대하여

$0\leq\ x\leq\ 2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$a=-1$일 때 1이고, $-1<a\leq\ 1$일 때 2이므로

$0\leq\ x\leq\ 2\pi$일 때,

방정식 $2\cos^2x+3\cos x+k-2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$x=\pi$가 이 방정식의 실근이어야 한다.

$2\times(-1)^2+3\times(-1)+k-2=0$에서 $k=3$

$2\cos^2x+3\cos x+1=(2\cos x+1)(\cos x+1)=0$

에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$

따라서 $k\times\alpha=3\times\dfrac{4}{3}\pi=4\pi$

38. ④

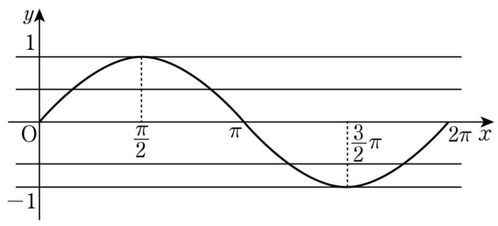
[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 추론한다.

(가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.

$\sin(a\pi)=-1$에서 $a=\frac{3}{2}$, $\sin(a\pi)=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로

$-1\le t\le 1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은

$t=-1$일 때 $\frac{3}{2}\pi$, $-1<t\le 0$일 때 3π,

$0<t<1$일 때 π, $t=1$일 때 $\frac{\pi}{2}$이다.

$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이

$\frac{5}{2}\pi$이므로 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, α를 가지고

$0<\alpha<1$이다.

(ⅰ) $a=\frac{3}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b-\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a=\frac{1}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b+\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이고 $f(2)=\frac{9}{2}$이다.

39. ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 x좌표는

$0\le x<\frac{4\pi}{a}$일 때 방정식

$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$ …… ㉠

의 실근과 같다.

$ax-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$이고

$|4\sin t+2|=2$ …… ㉡

에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$

$-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$일 때, 방정식 ㉡의 실근은

0, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, $\frac{7\pi}{2}$의 6개이고

이 6개의 실근의 합은 11π이다.

따라서 $n=6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로

$39a-\frac{\pi}{3}\times 6=11\pi$, $a=\frac{\pi}{3}$

따라서 $n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

40. ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$k\sin x=\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{1}{k}$ $(\cos x\ne 0)$

그러므로 점 A의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고 두 점 A, B의 좌표는

각각 $(\alpha, \cos\alpha)$, $(\alpha+\pi, -\cos\alpha)$

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1}, \frac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$

이므로 $\mathrm{C}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi, -2\cos\alpha\right)$

점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2\cos\alpha=k\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$

$-2\cos\alpha=k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

에서 점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고

$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

점 B와 직선 CD 사이의 거리는

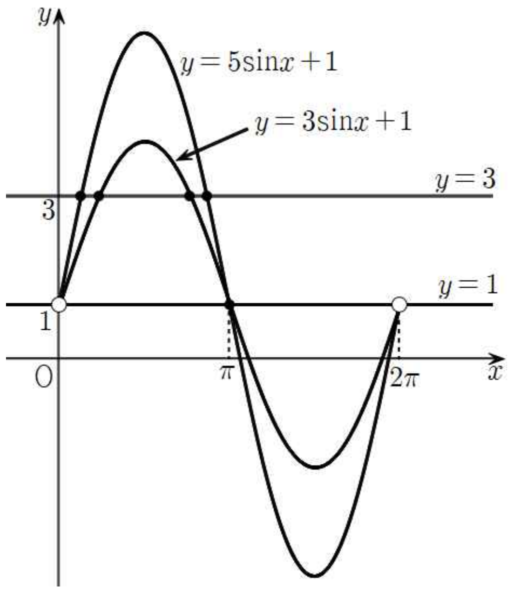
$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

41. 24

(ⅰ) $b=1$일 때

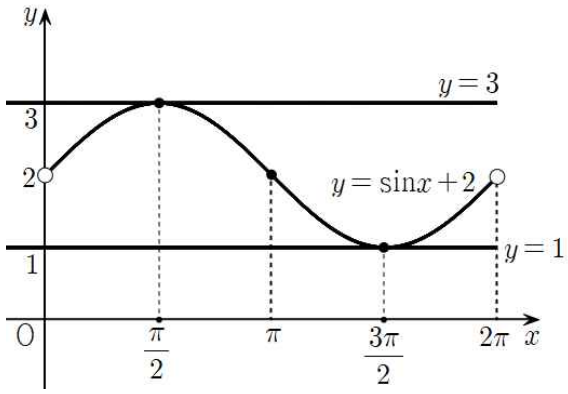


$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값의 범위는

$3\le a\le 5$

$\therefore\ 4\le a+b\le 6$

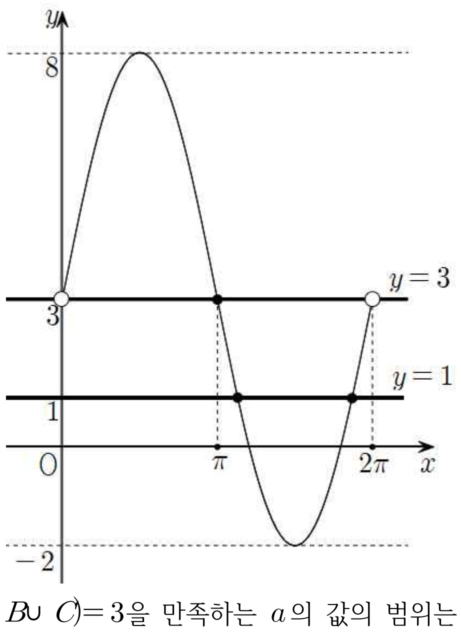
(ⅱ) $b=2$일 때



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값은 1이다.

$\therefore\ a+b=1+2=3$

(ⅲ) $b=3$일 때

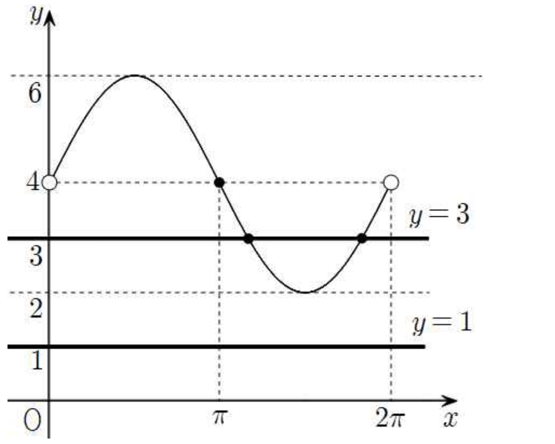


$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값의 범위는

$3\le a\le 5$

$\therefore\ 6\le a+b\le 8$

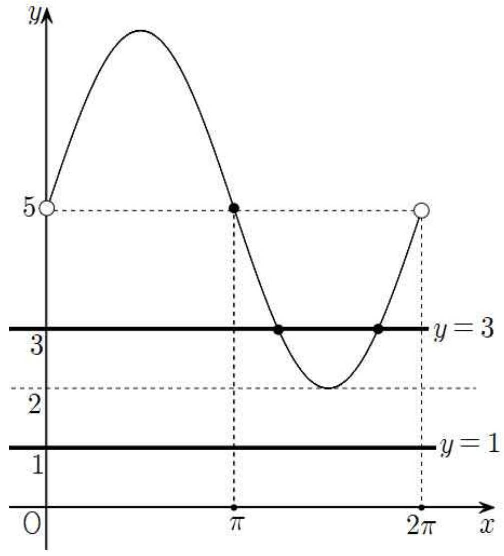
(ⅳ) $b=4$일 때



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값은 2이므로

$a+b=6$

(ⅴ) $b=5$일 때



$n(A\cup B\cup C)$를 만족하는 a의 값은 3이므로

$a+b=8$

이상에서　$m=3,\ M=8$

$\therefore\ M\times m=8\times 3=24$