CH Ⅰ. 등차등비수열

지형化 Th①. 등차수열, Th②. 등차수열의 합

Ⅰ. 식

(1) 등차수열은 일차식이고 일차식의 계수가 공차이다.

(2) 등차차수열의 합은 이차식 이차항의 계수는 $\frac{공차}{2}$

(1) $a_n = a_1 + (\boxed{n}-1)d$

$a_1 - d + \boxed{d}n$

(2) $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \square n$

Ⅱ. Graph

(1) 등차수열은 일차식이고 일차함수로 표현할 수 있다.

· 대칭성

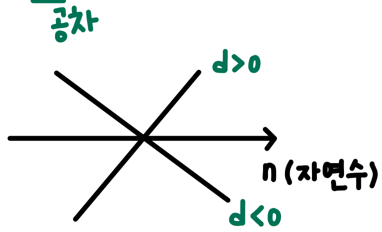
· 항상 0이 되는 지점에 집중 (절댓값이 들어간 경우도 동일)

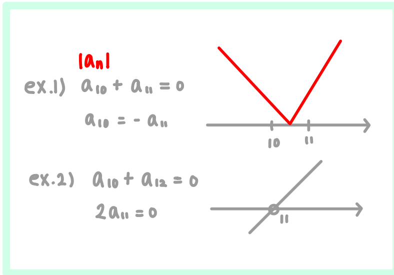
(2) 등차차수열의 합은 이차식이고 원점을 통과하는 이차함수로 표현할 수 있다.

· 공차의 부호가 양수이면 아래로 볼록, 공차의 부호가 음수이면 위로 볼록

· 대칭축이 핵심

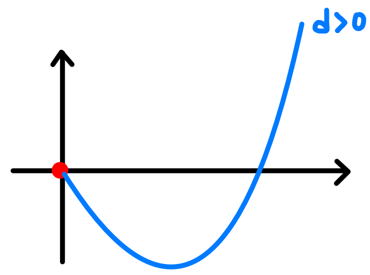
(1) $a_n = \underset{공차}{\underline{A}}n + B$





(2) $S_n = \boxed{\frac{d}{2}}n^2 + \square n$

$= n(\quad\quad)$



Ⅲ. 계산

(1) 두 수열의 합/차

· 두 수열의 합

$a_{n_1} + a_{n_2} = a_{m_1} + a_{m_2}$

$n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

- 두 수열의 중간 항이 존재할 경우 ➜ 두 수열의 합 = 중간 항의 2배
- 두 수열의 중간 항이 존재하지 않을 경우 ➜ 합의 대칭성 이용

· 두 수열의 차는 공차의 개수로 생각

(2) 등차수열의 합은 항의개수$\times\frac{첫항+마지막항}{2}$ ➜ 첫항+마지막항을 두 수열의 합을 활용하여 계산

지형化 Th③. 등비수열

Ⅰ. 식

(1) 등비수열의 일반항은 $A(B)^n$이고 B는 공비

Ⅱ. Graph

(1) 등비수열을 기하적으로 생각하자.

· 공비가 양수 : 지수함수의 형태와 동일

· 공비가 음수 : 지그재그 형태

Ⅲ. 계산

(1) 두 수열의 곱/나누기

· 두 수열의 곱

- 두 수열의 중간 항이 존재할 경우 ➜ 두 수열의 곱 = 중간 항의 제곱
- 두 수열의 중간 항이 존재하지 않을 경우 ➜ 곱의 대칭성 이용

· 두 수열의 나누기는 공비의 개수로 생각

(2) 등비수열의 합은 $\frac{첫째항\times(공비^{항의 개수}-1)}{공비-1}$

TH①. 등차수열

STEP 1 Plains

1 등차수열

① 등차수열의 일반항

(1) 공차가 d인 등차수열의 이웃 항과의 관계 : $a_{n+1}=a_n+d$

(2) 첫째항이 a_1, 공차가 d인 등차수열의 일반항 : $a_n=a_1+(n-1)d$

② 등차수열의 차

(1) $a_k-a_m=(k-m)d$

양/음수 둘 다 가능

③ 등차중항

(1) a, b, c가 등차수열을 이룰 때, $2b=a+c$, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

(2) 등차수열을 이루는 수

- 세 수가 등차수열을 이룰 때 : $a-d, a, a+d$
- 네 수가 등차수열을 이룰 때, : $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ (이 때, 공차는 $2d$)
- 다섯 수가 등차수열을 이룰 때, : $a-2d, a-d, a+d, a+2d$

a_1

STEP 2 Hills

1 등차수열의 일반항은 일차식이다. 일반항이 일차식이면 등차수열이다.

① 등차수열의 일반항

(1) 등차수열의 일반항 a_n은 n에 대한 일차식이다. $a_n=\underbrace{A}_{\text{공차}}n+B$

- $a_n=An+B$일 때, A를 공차 d라고 빨리 파악할 수 있어야 한다.

② 다양한 일반항(일차식)의 공차 판단

(1) a_n의 공차가 d라 할 때

- a_n+a_{n+p}은 공차가 $2d$인 등차수열이다. a_n+a_{n+p} : 일차식 $\longrightarrow \boxed{2d}\,n+\triangle$
- a_{pn+q}는 공차가 pd인 등차수열이다. a_{pn+q} : 일차식 $\longrightarrow \boxed{pd}\,n+\triangle$

$a_n=a_1+(\cancel{n}-1)d$

a_{pn+q} $pn+q$

ex) $b_n=a_n+a_{n+3}$

$\sum_{k=1}^{10} b_k=\frac{10+(\cancel{b_1}+\cancel{b_{10}})}{2}$ $(a_1+a_4)+(a_{10}+a_{13})$ $2(a_4+a_{10})$ $2a_n$

(2) a_n은 공차가 d_1인 등차수열이고, b_n은 공차가 d_2인 등차수열일 때

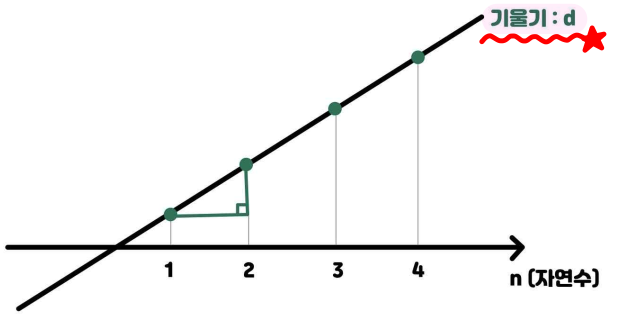
- $a_n \pm b_n$는 $d_1 \pm d_2$을 공차로 하는 등차수열이다

ex) $\sum_{k=1}^{10} a_{k+1}=\frac{10(a_4+a_7)}{2}$

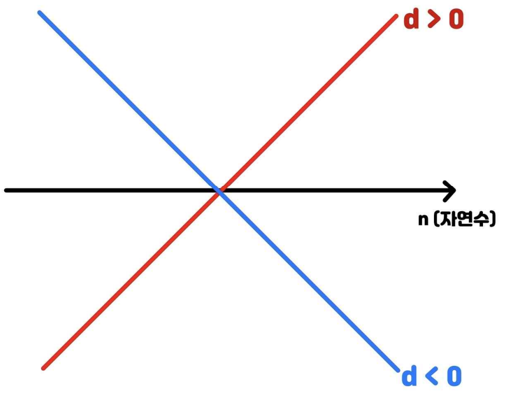
③ **등차수열의 일반항은 일차식이고 일차함수로 표현할 수 있다.**

(1) 공차가 양수이면 증가, 공차가 음수이면 감소

• 공차의 부호에 따라서 일차함수의 기울기가 결정이 된다. (단, 정의역 자연수)

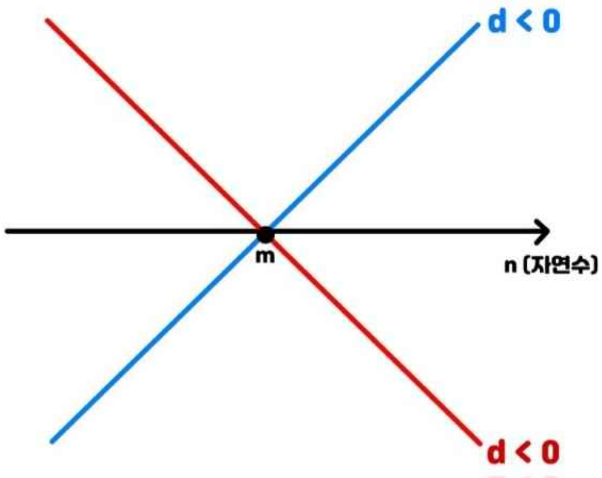


• 공차의 부호가 양수라면 증가하는 일차함수, 공차의 부호가 음수라면 감소하는 일차함수로 해석할 수 있다.



(2) 항이 0이 되는 지점에 집중한다. (절댓값이 들어간 경우에도 동일)

• $a_m = 0$



STEP 3 Mountains

1 두 등차수열의 합

① 두 등차수열의 합

(1) n_1+n_2와 m_1+m_2일 때, $a_{n_1}+a_{n_2}$는 $a_{m_1}+a_{m_2}$과 일치한다.

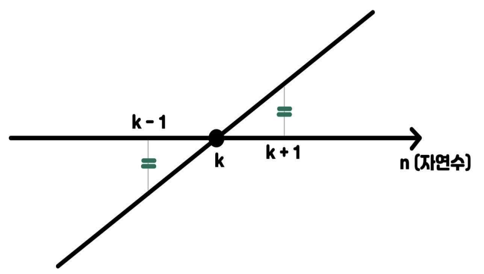
② 두 등차수열의 합의 계산

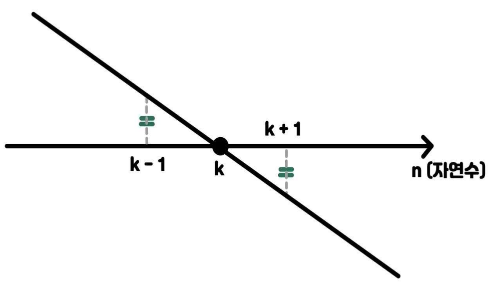
(1) $a_n+a_m=0$일 때

• $n+m$이 짝수$(2k)$

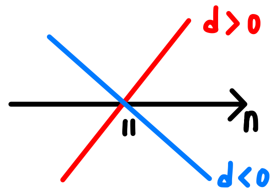
$a_n+a_m=2a_{\frac{m+n}{2}}=2a_k=0$ ➜ $a_k=0$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재

• 공차가 양수라면 $a_k=0$을 기준으로 증가하는 수열, 공차가 음수라면 $a_k=0$을 기준으로 감소하는 수

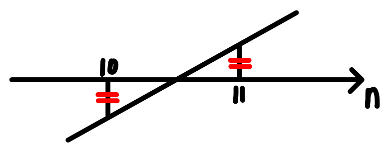




EX ① $a_{10}+a_{12}=0 \longrightarrow a_{11}=0$



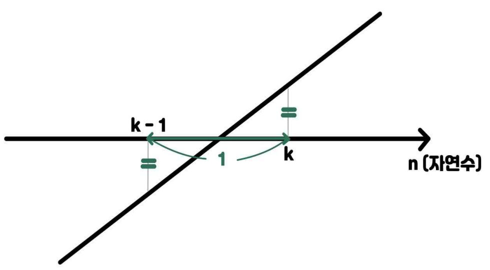
EX ② $a_{10}+a_{11}=0 \leftarrow |a_{10}|=|a_{11}|$

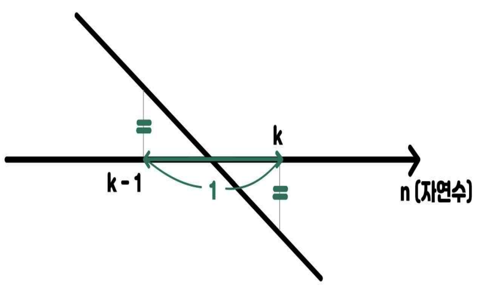


• $n+m$이 홀수$(2k-1)$

$\frac{m+n}{2}=\frac{2k-1}{2}$은 자연수가 아니다. ➜ $a_{k-1}+a_k=0$이고 $|a_{k-1}|=|a_k|$이다. ➜ 등차수열의 대칭성 존재

• 공차가 양수라면 증가하는 수열, 공차가 음수라면 감소하는 수열





(2) $a_n + a_m = L$

EX① $a_4 + a_8 = 10$

$a_6 = 5$

- $n+m$이 짝수$(2k)$

$a_n + a_m = 2a_{\frac{m+n}{2}} = 2a_k = L$ ➜ $a_k = \frac{L}{2}$

EX② $a_4 + a_9 = 10$

$5 \quad 8$

$6 \rightarrow 7$

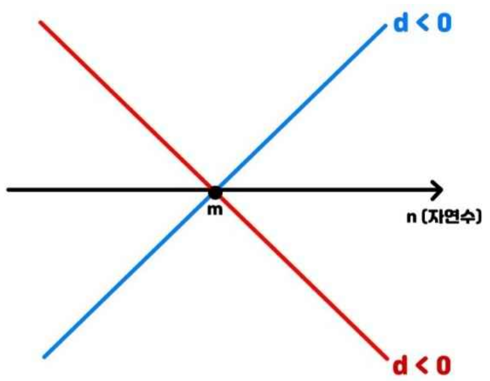
- $n+m$이 홀수$(2k-1)$

$\frac{m+n}{2} = \frac{2k-1}{2}$은 자연수가 아니다. ➜ $a_{k-1} + a_k = L$

2 등차수열의 대칭성이 존재하는 경우 등식 '=' 정보가 나온다.

① $a_m = 0$

(1) $a_m = 0$인 자연수 m이 존재하면, 대칭성을 가진다.



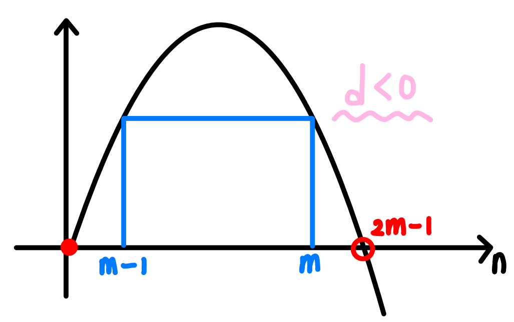
- $|a_{m-1}| = |a_{m+1}|$이 만족되어 대칭성이 존재한다.

(2) $S_{m-1} = S_m$이 성립한다. ⟶ $S_m - S_{m-1} = 0$

a_m

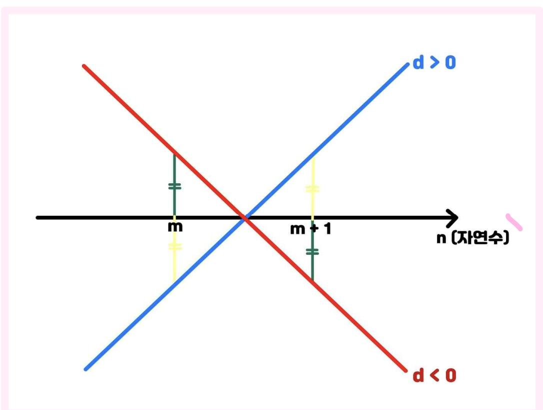
- S_n은 $n = 2m-1$에서 인수를 가진다.
- $S_n = \frac{d}{2}n(n-(2m-1))$

$S_{m-1} = S_m$, $S_n = \frac{d}{2}n(n-(2m-1))$



② $a_m = -a_{m+1}$

(1) $a_m = -a_{m+1}$인 자연수 m이 존재하면, 대칭성을 가진다.



- $|a_m| = |a_{m+1}|$이 만족되어 대칭성이 존재한다.

(2) $S_{m-1} = S_{m+1}$이 성립한다. $S_{m+1} = S_{m-1}$, $a_{m+1} + a_m = 0$

- $n = m$에서 대칭축을 갖고, $S_n = \frac{d}{2}n(n-2m)$

TH②. 등차수열의 합

STEP 1 Plains

1 등차수열의 합

$S_n = a_1 + \cdots + a_n$
$+\ S_n = a_n + \cdots + a_1$
$2S_n = n \times (a_1 + a_n)$

① 등차수열의 합

(1) $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = \dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$

$$\begin{aligned} & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + \ & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots\cdots + a_3 + a_2 + a_1 \\ & 2S_n = \{(a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) + \ \cdots\cdots \ + (a_n+a_1)\} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \frac{(n-m+1)(a_m+a_n)}{2}$$

- $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = \dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2} = \dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2}$
- $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = \boxed{\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}}$

STEP 2 Hills

1 등차수열의 합의 일반항은 이차식이다. 일반항이 이차식이면 등차수열의 합이다.

① 등차수열의 합은 이차식이다.

(1) 등차수열의 합은 $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \left(\dfrac{d}{2}\right)n^2 + \left(a - \dfrac{d}{2}\right)n$**이다.**

- **, 등차수열의 합은 n에 대한 이차식으로 표현된다.**
- $S_n = An^2 + Bn$, **S_n은 등차수열의 합이다. 그리고 $A = \dfrac{d}{2}$와 동일하다.**

② 등차수열의 합 (이차식 상수의 유/무)

(1) $S_n = An^2 + Bn + C\ (A,\ B,\ C\text{는 상수})$

- $C=0$**이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.**
- $C \neq 0$**이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.**

$S_n = An^2 + Bn + C\ (A,\ B,\ C\text{는 상수})\ \ C \neq 0$일 때

Ⅰ. $S_n - S_{n-1} = a_n$, (S_{n-1}때문에 $n \geq 2$ 이다.) $a_n = 2An - A + B\ (n \geq 2)$

Ⅱ. $S_1 = a_1 = A + B + C$, $S_n = An^2 + Bn + C$ 에 $n=1$을 대입하여 a_1을 구한다.

Ⅲ. 등차수열의 합의 일반항에서 상수가 존재하면 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

EX① $S_n = \overset{\frac{d}{2}}{2}n^2 + 3n$

$a_n = \underbrace{5}_{a_1} + (n-1) \times 4$

EX② $\boxed{S_n} = 2n^2 + 3n + 1$ 둘째항 등차

$\ulcorner a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2),\ a_1 = S_1 = 6 \lrcorner$

$= 5 + (n-1) \times 4$

ex) $S_n = 3n^2 + 4n + 100$

$a_n = 7 + 6(n-1)\ ,\ (n \geq 2)$

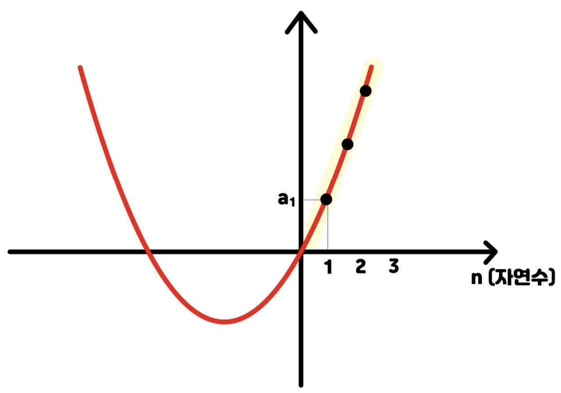
$a_1 = 107$

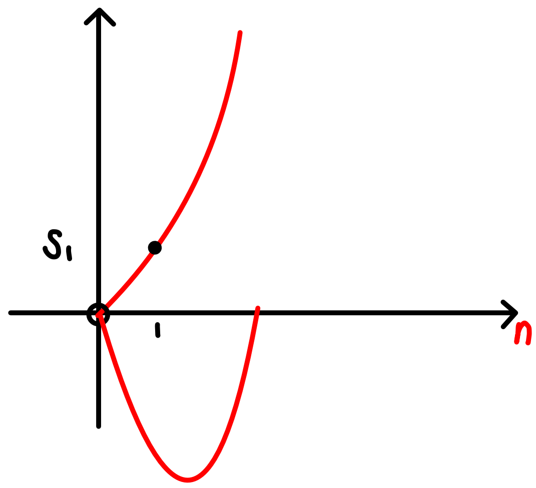
③ 등차수열 합의 일반항은 이차식이고 이차함수로 표현할 수 있다.

(1) 등차수열의 합은 $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \left(\dfrac{d}{2}\right)n^2 + \left(a-\dfrac{d}{2}\right)n$이다.

- $S_n = An^2 + Bn$으로 나타내었을 때, $S_n = n(An+B)$ 꼴이다.
- 정의역이 자연수 전체의 집합인 이차함수 $f(x) = x(Ax+B)$로 보면 원점을 지나는 이차함수 $y = f(x)$로 해석할 수도 있다.
- 첫째항은 $S_1 = a_1 = A+B$, 공차는 $\dfrac{d}{2} = A$, $d = 2A$이다.

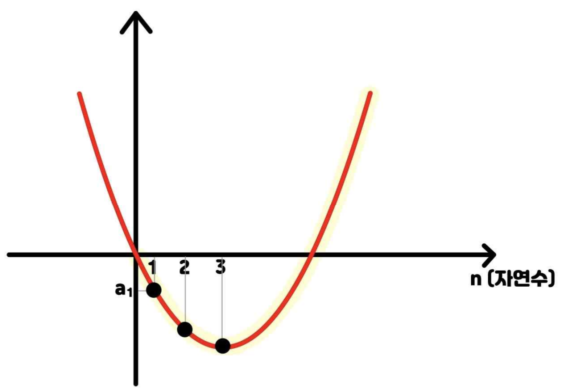
(2) 공차가 양수이고 첫째항이 양수일 때



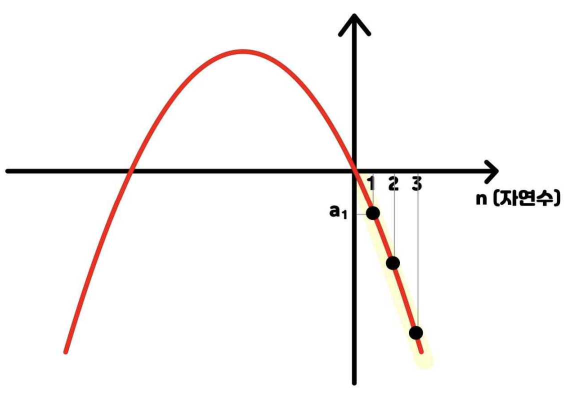


$a_1 = S_1$

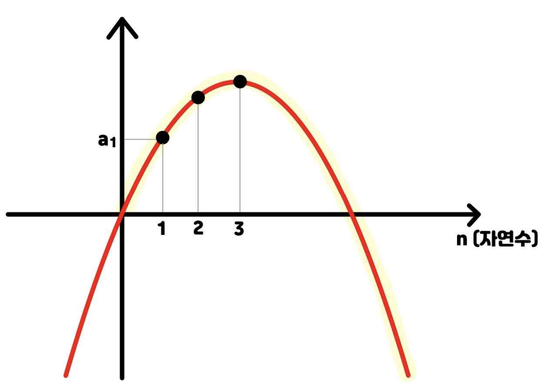
(3) 공차가 양수이고 첫째항이 음수일 때



(4) 공차가 음수이고 첫째항이 음수일 때



(5) 공차가 음수이고 첫째항이 양수일 때



EX① $S_9=0$, $a_5=0$

$S_n=\frac{d}{2}n(n-9)$, $a_1=S_1$

EX②

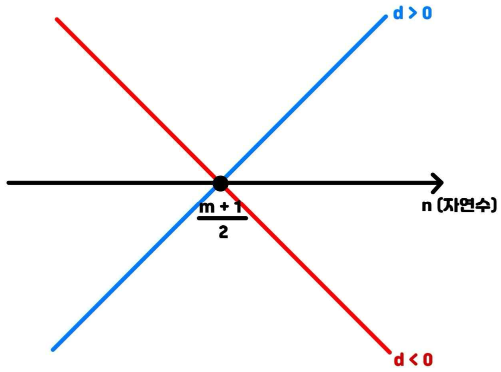
STEP 3 Mountains

1 등차수열의 합

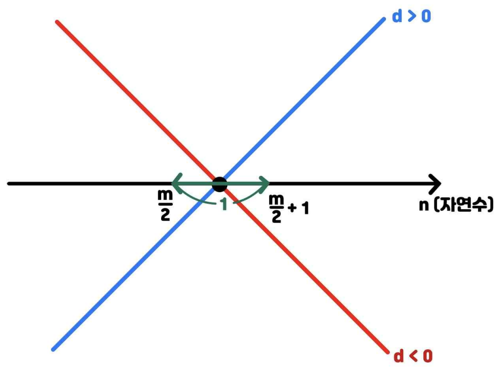
① 등차수열의 합의 계산

(1) $S_m=0$이면 $S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=0$ ➜ $a_1+a_m=0$

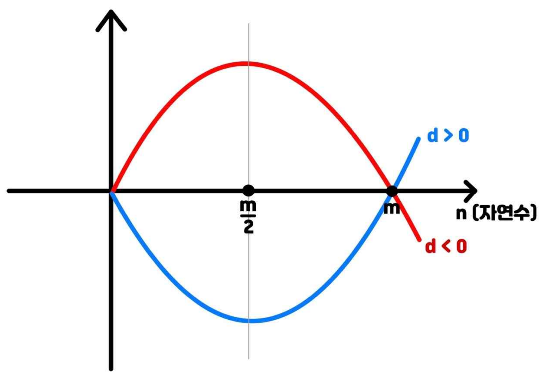
• m이 홀수면, $m+1$은 짝수 ➜ $a_1+a_m=2a_{\frac{m+1}{2}}$, $a_{\frac{m+1}{2}}=0$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재



• n이 짝수면, $n+1$은 홀수 ➜ $\frac{n+1}{2}$은 자연수가 아니다. 이 때, $\left|a_{\frac{n}{2}}\right|=\left|a_{\frac{n}{2}+1}\right|$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재



• $S_n=\frac{d}{2}n(n-m)$이고 대칭축이 $\frac{m}{2}$인 이차함수가 그려진다.



$S_9 = 9$, $a_5 = 1$
$9a_5$

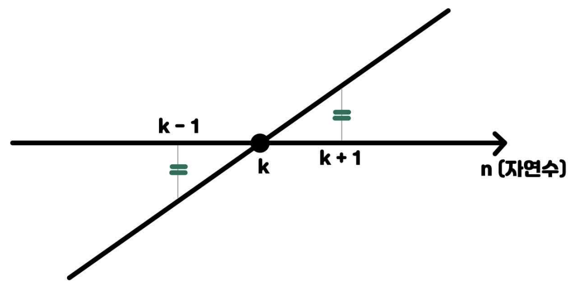
(2) $S_n = L$이면 $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = L$ ➜ $a_1 + a_n = L$

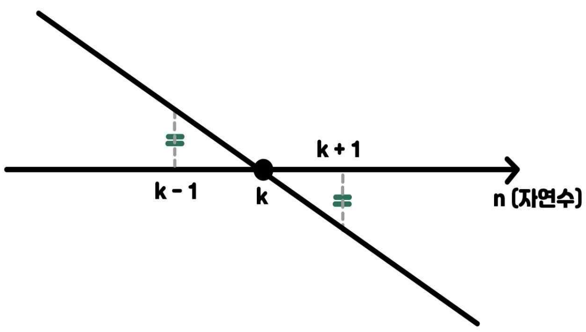
- n이 홀수면, $n+1$은 짝수 ➜ $a_1 + a_n = 2a_{\frac{n+1}{2}}$, $a_{\frac{n+1}{2}} = \dfrac{L}{2}$
- n이 짝수면, $n+1$은 홀수 ➜ $\dfrac{n+1}{2}$은 자연수가 아니다. $a_1 + a_n = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} = L$

(3) a_n이 등차수열일 때, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$

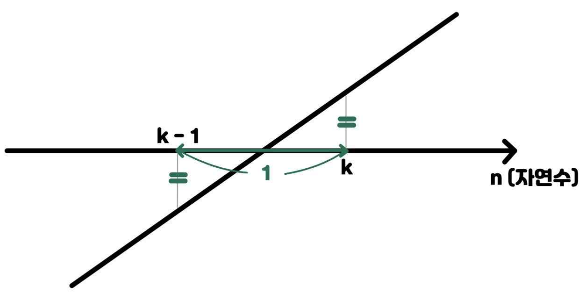
$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n = \dfrac{(n-m+1)(a_m + a_n)}{2} = 0$, $a_m + a_n = 0$이다.

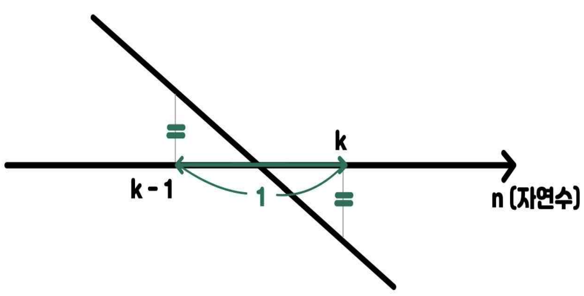
- $n+m$이 짝수$(2k)$: $a_n + a_m = 2a_{\frac{m+n}{2}} = 2a_k = 0$ ➜ $a_k = 0$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재





- $n+m$이 홀수$(2k-1)$: $\dfrac{m+n}{2} = \dfrac{2k-1}{2}$은 자연수가 아니다. ➜ $a_{k-1} + a_k = 0$이고 $|a_{k-1}| = |a_k|$이다. ➜ 등차수열의 대칭성 존재





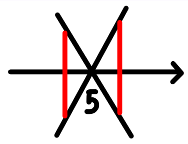
(4) a_n이 등차수열일 때, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = L$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \dfrac{(n-m+1)(a_m + a_n)}{2} = L$, $a_m + a_n = \boxed{\dfrac{2L}{n-m+1}}$

- $n+m$이 짝수$(2k)$: $a_n + a_m = 2a_{\frac{m+n}{2}} = 2a_k = L$ ➜ $a_k = \dfrac{L}{2}$
- $n+m$이 홀수$(2k-1)$: $\dfrac{m+n}{2} = \dfrac{2k-1}{2}$은 자연수가 아니다. ➜ $a_{k-1} + a_k = L$

2 $S_k = a_k,\ S_k = -a_{k+1}$

① $S_k = a_k$

$S_{10} = a_{10},\ S_9 = 0 \longrightarrow a_5 = 0 \longrightarrow$



$S_{10} = -a_{11},\ S_{11} = 0,\ a_6 = 0$

(1) $S_k - a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = 0$

- $S_{k-1} = 0$ 혹은 $a_1 + a_{k-1} = 0$
- k가 짝수이면 $a_1 + a_{k-1} = 2a_{\frac{k}{2}}$, $a_{\frac{k}{2}} = 0$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재
- k가 홀수이면 $a_1 + a_{k-1} = a_{\frac{k-1}{2}} + a_{\frac{k+1}{2}} = 0$, $a_1 + a_{k-1} = a_{\frac{k-1}{2}} + a_{\frac{k+1}{2}} = 0$, $\left|a_{\frac{k-1}{2}}\right| = \left|a_{\frac{k+1}{2}}\right|$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재

② $S_k = -a_{k+1}$

(1) $S_k + a_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = 0$

- $S_{k+1} = 0$ 혹은 $a_1 + a_{k+1} = 0$
- k가 짝수이면 $a_1 + a_{k+1} = 2a_{\frac{k}{2}+1}$, $a_{\frac{k}{2}+1} = 0$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재
- k가 홀수이면 $a_1 + a_{k+1} = a_{\frac{k+1}{2}} + a_{\frac{k+3}{2}} = 0$, $\left|a_{\frac{k+1}{2}}\right| = \left|a_{\frac{k+3}{2}}\right|$ ➜ 등차수열의 대칭성 존재

TH③. 등비수열

STEP 1 Plains

1 등비수열

① 등비수열의 일반항

(1) 공비가 r인 등차수열의 이웃 항과의 관계 : $a_{n+1} = r a_n$

(2) 첫째항이 a_1, 공차가 r인 등차수열의 일반항 : $a_n = a_1 r^{n-1}$

② 등비수열의 나눗셈

(1) $a_k \div a_m = r^{k-m}$

③ 등비중항

(1) a, b, c가 등비수열을 이룰 때, $b^2 = ac$, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

(2) 등비수열을 이루는 수

- 세 수가 등비수열을 이룰 때 : $\frac{a}{r}, a, ar$
- 네 수가 등비수열을 이룰 때 : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ (이 때, 공비는 r^2)
- 다섯 수가 등비수열을 이룰 때 : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

STEP 2 Hills

1 등비수열의 일반항은 지수로 표현된 식이다.

① 등비수열의 일반항

(1) 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 r^{n-1}$이다.

- $a_n = A(B)^n$ 라고 표현, B를 공비 r이라고 빨리 파악할 수 있어야 한다.

$a_n = A\underbrace{\boxed{B}}_{\text{공비}}{}^n$

② 다양한 일반항의 공비 판단

(1) a_n 의 공비를 r이라 할 때

- $a_n = ar^{bn+c}$일 때, 공비는 r^b이다.
- a_{pn+q}는 공비가 r^p인 등비수열이다.
- $\{a_n\}^p$의 공비가 r^p인 등비수열이다.
- $a_n \pm a_{n+p}$도 공비가 r인 등비수열이다.
- $a_{kn} \div a_{mn}$는 공비가 r^{k-m}인 등비수열이다.

(2) a_n 의 공비를 r_a, b_n 의 공비를 r_b라 할 때

- $a_n \times b_n$는 공비가 $r_a r_b$인 등비수열이다.
- $a_n \div b_n$는 공비가 $\dfrac{r_a}{r_b}$인 등비수열이다.

- $a_n = a\boxed{r}^{kn+c}$ $\quad (r^b)^n$

$a_{pn+q} \longrightarrow a_{\cancel{n}} = a_1 r^{\cancel{n-1}}$ $\quad pn+q$ $\quad pn+q$

$\sum_{k=1}^{n} a_{3k-2} = \dfrac{\cancel{첫}\,a_1\,(\cancel{공}\,r^3{}^{\cancel{항}\,n}-1)}{r^3\,\cancel{공}-1}$

- $(a_n)^p \longrightarrow a_n^p = \square \times (r^p)^n$

- $a_n + a_{n+p} = a_1 r^{n-1} + a_1 r^{n+p-1} = r^n(\ +\ )$

$\sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+2}) = \dfrac{(a_1+a_3)(r^n-1)}{r-1}$

- $a_{kn} \div a_{mn} = \bigcirc \times r^{\cancel{kn-mn}\,(k-m)n}$

③ 등비수열과 등차수열의 관계

(1) 등차수열 a_n에 대하여 b^{a_n}은 등비수열이다. ➜ a_n의 공차가 d일 때, b^{a_n}의 공비는 r^d이다. $\quad b^{a_n \square + dn}$

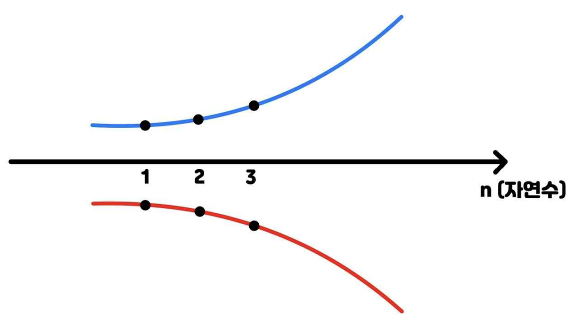
(2) 등비수열 b_n에 대하여 $\log_c b_n$은 등차수열이다. (단, $b_n > 0$) ➜ b_n의 공비가 r일 때, $\log_c b_n$의 공차는 $\log_c r$이다. $\quad \log a_n$ $\quad r^{n-1}$

ex. $\log_2 3^{n-1} = (n-1)\log_2 3$

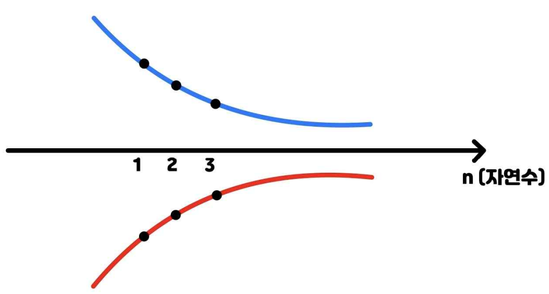
④ 등비수열 일반항의 기하적 표현

(1) $a_n = a_1 r^{n-1}$ $(r \neq 1)$ 등비수열의 공비와 첫째항에 따른 기하적 해석

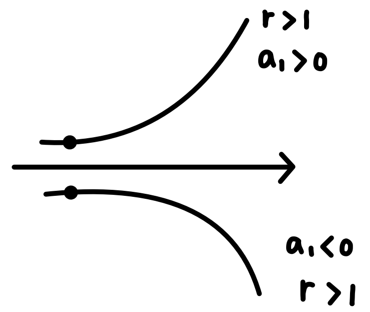
- $r > 1$

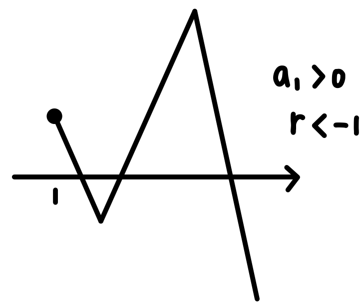


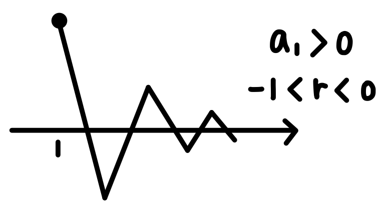
- $0 < r < 1$



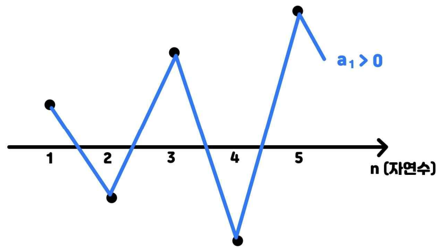
II. 그래프



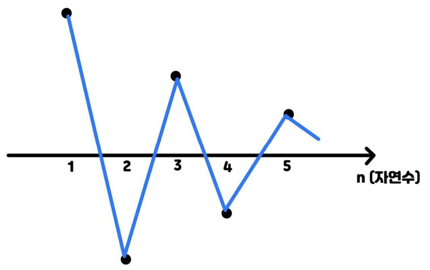




• $r < -1$



• $-1 < r < 0$



III 계산

• 곱 EX. $a_3a_5 = a_4^2 = a_1a_7$

$a_2a_5 = a_3a_4$

• 나눗셈 $a_k \div a_m = r^{k-m}$ < + −

(2) 합 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$

$-$ $rS_n = a_2 + \cdots + a_n + ra_n$

$(1-r)S_n = a_1 - r\cancel{a_n}$

a_1r^{n-1}

2 등비수열의 곱은 대칭성을 이룬다.

① 등비수열의 곱

(1) $a_m \times a_n = a_{m-1} \times a_{n+1} = a_{m-2} \times a_{n+2} = \cdots$

- $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} = (a_{n+2})^5$
- $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = (a_{n+1} a_{n+2})^2$

(2) $n_1 + n_2$와 $m_1 + m_2$일 때, $a_{n_1}a_{n_2}$는 $a_{m_1}a_{m_2}$와 일치한다.

3 등비수열의 합들의 관계

① 등비수열의 합들의 관계

(1) S_n, S_{2n}, S_{3n}의 관계

- $\dfrac{S_{2n}}{S_n} = \dfrac{r^{2n}-1}{r^n-1} = r^n + 1$
- $\dfrac{S_{3n}}{S_n} = \dfrac{r^{3n}-1}{r^n-1} = r^{2n} + r^n + 1$
- $\dfrac{S_{3n}}{S_{2n}} = \dfrac{r^{3n}-1}{r^{2n}-1} = \dfrac{r^{2n}+r^n+1}{r^n+1}$

$S_n = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

$S_{2n} = \dfrac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}$

ex. $\dfrac{S_6}{S_2} = \dfrac{r^6-1}{r^2-1}$

(2) S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$의 관계

- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$ $S_{3n} - S_{2n} = a_{2n+1} + a_{2n+2} + \cdots + a_{3n}$ 서로 등비수열을 이룬다. (공비는 r^n)

(3) $a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n}$과 $a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_{q+n}$의 관계

- $\dfrac{a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n}}{a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_{q+n}} = r^{p-q}$

ex. $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{a_1 + a_2 + a_3} = 1 + r^3$

$S_n = (a_1 + \cdots + a_n)$ $1 \times r^n$

$S_{2n} - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$

$S_{3n} - S_{2n} = a_{2n+1} + \cdots + a_{3n}$

4 등비수열의 합

① 등비수열의 합

(1) $S_n = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$
\begin{array}{rll}
 & S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
- & rS_n = & \quad a_2 + a_3 + a_4 + \quad \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n + ra_n \\
 & (1-r)S_n = & a_1 - ra_n = a_1 - a_1 r^n
\end{array}
$$
[n은 항의 개수]

- $S_n = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

- 등비수열의 합 $= \dfrac{\text{첫째항} \times (\text{공비}^{\text{항의 개수}} - 1)}{\text{공비} - 1}$

$S_n = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ A

$= Ar^n - A$

Ex① $S_n = 3 \times 2^n - 3 \rightarrow a_n = \cancel{a_1} r^{n-1}$ 2 3

Same

Ex② $S_n = \boxed{3} \times 2^n - 4 \rightarrow a_n = 3 \times 2^{n-1}$ $(n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 2$

5 등비수열의 합의 직관적 계산

① 등비수열의 합 ($S_n = Ar^n + B$ 에서 $B = -A$이거나 $B \neq -A$일 때)

$S_n = Ar^n + B$ ($r \neq 0$, $r \neq 1$, A, B는 상수)

(1) $B = -A$ 이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

(2) $B \neq -A$ 이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

$S_n = Ar^n + B$ ($r \neq 0$, $r \neq 1$, A, B는 상수) $B \neq -A$ 일 때

Ⅰ. $S_n - S_{n-1} = a_n$, (S_{n-1}때문에 $n \geq 2$ 이다.) $a_n = A(r-1)r^{n-1}$ ($n \geq 2$)

Ⅱ. $S_1 = a_1 = Ar + B$ $S_n = Ar^n + B$에 $n = 1$을 대입하여 a_1을 구한다.

Ⅲ. 등비수열의 합의 일반항에서 $B \neq -A$ 라면 둘째항부터 등비수열을 이룬다.