규토 라이트 N제

경우의 수

Training – 1 step

필수 유형편

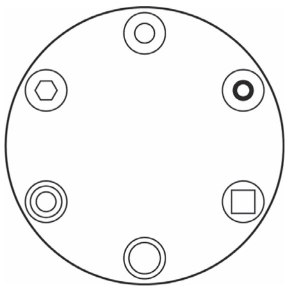
1. 여러 가지 순열과 중복조합

Theme 1

원순열

001

서로 다른 6개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



002

3쌍의 남녀 커플이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉을 때, 커플끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

003

남자 3명과 여자 4명이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉을 때, 남자끼리 이웃하지 않게 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

004

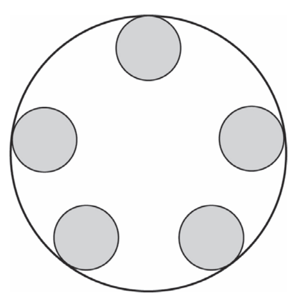
어느 고등학교에서 1학년 학생 1명, 2학년 학생 4명, 3학년 학생 2명이 일정한 간격으로 놓인 원탁에 둘러앉으려고 한다. 1학년 학생의 옆에 적어도 한 명의 3학년 학생이 앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

005

남자 4명과 여자 4명이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉을 때, 남녀가 교대로 앉는 방법의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

006

서로 같은 접시를 일정한 간격을 두고 원형으로 놓은 원 모양의 식탁과 김치, 콩나물무침, 가지볶음을 포함한 서로 다른 반찬 7개가 있다. 이 서로 다른 반찬 7개 중에서 김치, 콩나물무침, 가지볶음을 포함하여 5개를 선택하고 이 5개의 반찬 모두를 일정한 간격으로 식탁에 올려놓을 때, 김치와 가지볶음이 콩나물무침과 모두 이웃하게 놓여 있는 경우의 수를 구하시오.
(단, 한 접시에는 한 가지의 반찬만 올려놓고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



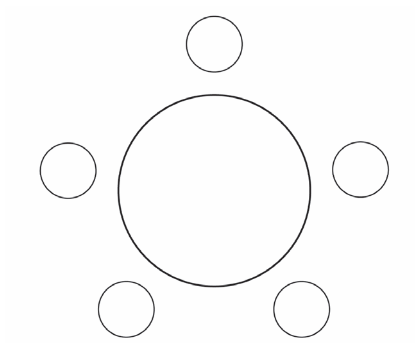
064 2019년 고3 10월 교육청 나형

같은 종류의 공 6개를 남김없이 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 공이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

065 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

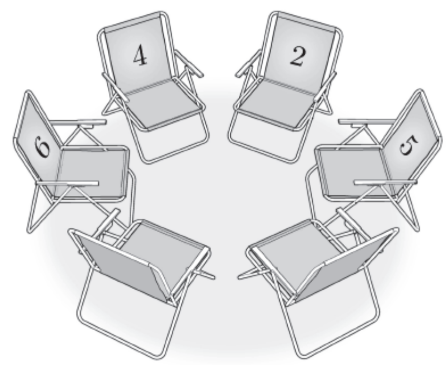
066 2016학년도 고3 6월 평가원 B형

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 625 ② 635 ③ 825
④ 1024 ⑤ 1034

067 2025학년도 고3 6월 평가원 확통

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 72 ② 78 ③ 84
④ 90 ⑤ 96

068 2013학년도 수능 나형

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.) [3점]

① 270 ② 285 ③ 300
④ 315 ⑤ 330

069 2021학년도 수능 나형

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [3점]

$$f(2) \le f(3) \le f(4)$$

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

129 2024학년도 고3 9월 평가원 확통

다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a \le b \le c \le d$
> (나) $a \times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

130 2025학년도 고3 6월 평가원 확통

집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \in X$이다.
> (나) $x=-2, -1, 0, 1$일 때 $f(x) \ge f(x+1)$이다.

131 2025학년도 고3 9월 평가원 확통

흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

132 2025학년도 수능 확통

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(1) \times f(6)$의 값이 6의 약수이다.
> (나) $2f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2f(6)$

① 166 ② 171 ③ 176 ④ 181 ⑤ 186

개념 파악하기 (4) 독립시행이란 무엇일까?

독립시행의 확률

한 개의 주사위를 던지는 시행을 다섯 번 반복하였더니 1의 눈이 연속으로 다섯 번 나왔다.
여섯째 시행에서 1의 눈이 나올 확률은 무엇일까?

6개의 눈이 나올 가능성이 각각 같은 주사위라면 앞의 주사위를 던지는 시행에서 나온 결과와 상관없이 다음 시행에서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.

주사위나 동전을 여러 번 던지는 시행과 같이 어떤 시행을 반복하는 경우 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉 각 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 **독립시행**이라 한다.

독립시행에서는 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립이므로 독립시행의 확률은 각 사건의 확률을 곱하여 구할 수 있다.

ex 한 개의 주사위를 3번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률을 구하시오.

한 개의 주사위를 3번 던지는 시행에서 각 시행의 결과는 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않는다.
이때 각 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

한 개의 주사위를 3번 던져 3의 배수의 눈이 2번 나오는 경우는 아래 표와 같이 ${}_3C_2$ 가지이고
각 경우의 확률은 모두 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$ 이다.
(3의 배수의 눈이 나오는 경우를 ○, 나오지 않는 경우를 ×)

첫 번째	두 번째	세 번째	확률
○	○	×	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$
○	×	○	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$
×	○	○	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$

따라서 한 개의 주사위를 3번 던지는 독립시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$ 이다.

Tip 1 ${}_3C_2$ 가 하는 역할은 같은 것이 반복되는 **총 개수**임을 기억하자.

Tip 2 같은 것이 반복되는 총 개수를 구할 때, 같은 것이 있는 순열로 처리해줘도 무방하다.
OOX을 일렬로 배열하는 경우의 수 $\frac{3!}{2!}=3$ 이므로 3가지이다.

02

통계

표본평균의 분포

성취 기준 - 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.

개념 파악하기 (2) 모평균과 표본평균이란 무엇일까?

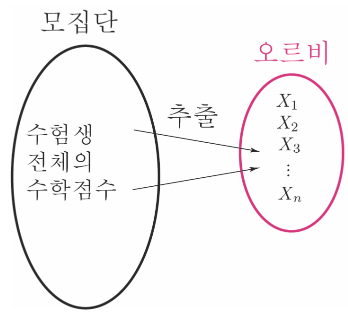
모평균과 표본평균

모집단의 특성을 나타내는 확률변수의 확률분포를 모집단의 확률분포라 한다.
모집단의 확률분포에서 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, 모분산, 모표준편차라 하고,
이것을 기호로 각각 m, σ^2, σ 와 같이 나타낸다.
한편 어떤 모집단에서 크기가 n 인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 을 임의추출하였을 때,
이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고,
이것을 기호로 각각 $\overline{X}$, S^2 S 와 같이 나타내고 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left\{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\overline{X}\right)^2\right\}$$

$$S=\sqrt{S^2}$$



예를 들어 수험생 전체의 수학점수의 평균, 분산, 표준편차를 구하기 위해서
오르비가 크기가 n 인 표본을 추출하여 모집단의 특성을 조사하는 상황을
가정해보자.
크기가 n 인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 을 임의추출하였다면

표본평균 $\overline{X}$ (오르비의 평균) $=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

표본분산 S^2(오르비의 분산) $=\frac{1}{n-1}\left\{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\overline{X}\right)^2\right\}$

표본표준편차 S(오르비의 표준편차) $=\sqrt{S^2}$

Tip 1 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본이 새롭게 추출될 때마다 달라진다.

Tip 2 통계에서 가장 중요한 것은 개념학습이다. 특히, 통계적 추정파트에서 중요한 것은
기호간의 구별인데 새로운 기호들이 다수 등장하여 헷갈릴 수 있으니
예를 통해 확실히 기억하고 넘어가도록 하자. (중요★)
$m=$모평균 (수험생 전체의 평균), $\sigma=$모표준편차 (수험생 전체의 표준편차),
$\overline{X}$ $=$표본평균 (오르비의 평균), $S=$표본표준편차 (오르비의 표준편차)

Tip 3 표본분산을 구할 때에는 **표본분산과 모분산의 차이를 줄이기 위하여** 편차의 제곱의 합을
$n-1$로 나눈다. (오차를 줄이기 위함이라고 기억하고 넘어가도록 하자.)

Tip 4 모집단에서 크기가 같은 표본을 임의추출하였을 때, 모집단은 변하지 않으므로 모평균은 변하지 않지만
표본평균 $\overline{X}$ 는 추출한 표본에 따라 다른 값을 가질 수 있으므로 표본평균 $\overline{X}$ 는 확률변수이다.

예제 2

어느 공장에서 생산된 제품 1개의 무게는 평균이 20 kg, 표준편차가 3 kg인 정규분포를 따른다고 한다.

이 공장에서 생산된 제품 9개를 임의추출할 때, 제품의 무게의 평균이 18 kg 이상 22 kg 이하일 확률을

구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$로 계산한다.)

풀이

공장에서 생산된 제품의 무게를 확률변수 X라 하자.

$X \sim \mathrm{N}(20,\ 3^2)$

임의추출한 제품 9개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{3}{\sqrt{9}}=\dfrac{3}{3}=1$

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(20,\ 1^2)$

따라서 $\mathrm{P}(18 \leq \overline{X} \leq 22)=\mathrm{P}\left(\dfrac{18-20}{1} \leq Z \leq \dfrac{22-20}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 2)=2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$

$=2 \times 0.4772=0.9544$

이다.

개념 확인문제 2

어느 농장에서 재배된 가지의 길이는 평균이 25 cm, 표준편차가 2.5 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 재배된 가지 중에서 25개를 임의추출할 때, 가지의 길이의 평균이 26 cm 이상일 확률을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수 일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$로 계산한다.)

03

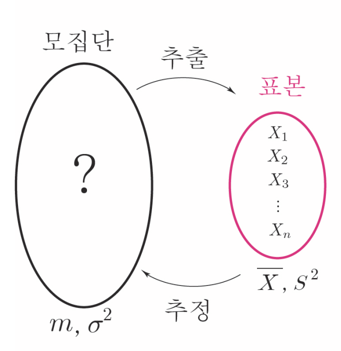
통계

모평균의 추정

성취 기준 – 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

개념 파악하기 (4) 모평균은 어떻게 추정할까?

모평균의 추정



표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 값인
모평균, 모표준편차 등을 추측하는 것을 **추정**이라고 한다.
표본조사를 통해 얻은 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하면
표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은

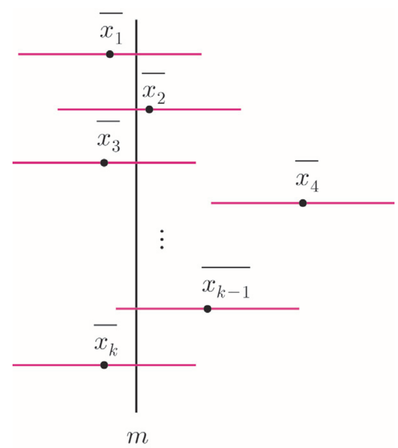
표본정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)=0.95$이므로 $\mathrm{P}\left(-1.96 \le \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right)=0.95$이다.

이것을 정리하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

따라서 모평균 m이 $\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 범위에 속해 있을 확률은 0.95이다.



여기서 실제로 얻은 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$를 대입한 범위

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m에 대한 **신뢰도** 95%의 **신뢰구간**이라고 한다.

모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하는 일을 되풀이하면 추출하는
표본에 따라 $\overline{x}$가 달라지며, 이에 따라 신뢰구간도 달라진다.
이와 같은 신뢰구간 중에는 오른쪽 그림과 같이 모평균 m을 포함하는 것과
포함하지 않는 것이 있다. ($\overline{x_4}$로 계산한 신뢰구간은 m을 포함하지 않는다.)

모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

는 추출된 표본에 따라 달라지며 이 신뢰구간은 모평균을 포함하거나 포함하지 않거나 둘 중의 하나이다.
이때 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이라는 말은 **모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출을 되풀이하여 모평균의 신뢰구간을 여러 번 구할 때, 이들 중에서 95% 정도는 모평균 m을 포함할 것으로 기대된다는 뜻이다.**
마찬가지로 $\mathrm{P}(-2.58 \le Z \le 2.58)=0.99$이므로 모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균의 신뢰구간

모집단의 확률분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{x}$라고 하면, 모평균 m에 대한 신뢰구간은

① 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Tip 1 신뢰도 100%의 신뢰구간을 사용하는 것이 가장 좋지 않을까?
답은 "아니다"이다. 예를 들어 고등학생의 평균 키에 대한 신뢰구간을 $0\,\mathrm{cm}$에서 $1000\,\mathrm{cm}$로 하면 신뢰도는 100%이지만 고등학생들의 키에 대한 유의미한 정보를 주지 못하므로 이는 유용하지 않다.

Tip 2 모평균을 추정할 때, 실제로는 모표준편차 σ를 모르는 경우가 대부분이다.
이러한 경우 표본의 크기 n이 충분히 클 때$(n \ge 30)$, 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 S를 사용하여 근사적으로 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다.

모평균의 신뢰구간 (일반형)

신뢰구간을 상수 k를 도입하여 일반화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

유도 과정에서 "k는 $\%$를 결정하고 $\%$는 k를 결정한다."는 사실을 알 수 있었다.
즉, 문제에서 주어지는 표준정규분포표에 따라 k값과 $\%$는 달라질 수 있다.
(만약 출제자가 계산의 간소화를 의도하여 $\mathrm{P}(-2 \le Z \le 2)=0.95$라고 명시했다면 $k=2$가 된다.
즉, 높은 확률로 95%일 때, $k=1.96$이겠지만 95%일 때, 무조건 $k=1.96$은 아니라는 뜻이다.)

이번에는 실전에서 자주 사용되는 문제풀이 테크닉에 대해 알아보자.

$a=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$라 하면 **신뢰구간의 길이**는 $b-a=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

또한 a와 b를 더하면 $a+b=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\overline{x}$ 이므로 표본평균을 쉽게 구할 수 있다.

위 내용을 정리하면 다음과 같다.

① 신뢰구간을 일반화하면 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고, 이때 k는 $\%$를 결정하고 $\%$는 k를 결정한다.

② 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때,

　ⅰ) $b-a=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 신뢰구간의 길이

　ⅱ) $a+b=2\overline{x}$

Tip 특히 $a+b=2\overline{x}$는 요즘 트렌드이니 반드시 기억해두자.

통계

026

어느 회사에서 생산하는 아이스 커피믹스 스틱 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 아이스 커피믹스 스틱 중에서 49개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 아이스 커피믹스 스틱 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $6.06 \le m \le 6.34$이다. $\dfrac{\overline{x}}{\sigma}$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$로 계산한다.)

① 12.2　② 12.3　③ 12.4　④ 12.5　⑤ 12.6

028

어느 공장에서 생산하는 노트북 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 노트북 중에서 임의추출한 크기가 49인 표본을 조사하였더니 노트북 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 공장에서 생산하는 노트북 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $2\overline{x} - 1.87 \le m \le 2\overline{x} - 1.73$ 이다. $100 \times \overline{x} \times \sigma$의 값을 구하시오. (단, 무게의 단위는 kg이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

027

어느 공과대학의 강의실에서 볼 수 있는 여학생의 수는 모평균이 m이고, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공과대학의 강의실 중에서 16개를 임의추출하여 구한 강의실에서 볼 수 있는 여학생의 수의 표본평균이 4이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 m에 대한 신뢰구간이 $[4-a, 4+a]$이었다. 이 공과대학의 강의실 중에서 임의로 1개의 강의실을 선택할 때, 이 공과대학의 강의실에서 볼 수 있는 여학생의 수가 $m+2a$ 이상일 확률을 오른쪽의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.49	0.1879
0.98	0.3365
1.47	0.4292
1.96	0.4750

① 0.1635　② 0.3121　③ 0.5708　④ 0.6171　⑤ 0.6629

029

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $5.55 \le m \le 10.45$이다. 또 이 모집단에서 크기가 $A \times n$인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}+B$이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $6.8 \le m \le 9.25$이다. $\dfrac{1}{AB}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$로 계산한다.)

Theme 4

통계는 뭐다? 개념이다. (총복습)

030

다음 보기에서 옳게 말한 사람을 모두 고르고,
틀리게 말한 사람이 있으면 옳게 고치시오.

[성민] 연속확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(X=x)=0$이야.

[지원] 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 4)$를 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-5}{4}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$를 따르지.

[민수] 표본평균 $\overline{X}$는 추출한 표본에 따라 다른 값을 가질 수 있어.

[영하] 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차는 모표준편차와 같아.

[지혜] 표본표준편차는 기호로 σ라고 써.

[유진] 이항분포와 정규분포는 모두 이산확률변수야.

[혜민] 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 모집단 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은 신뢰도 95%의 신뢰구간을 포함해.

[진아] 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따라.

[강혁] 이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}(2X+1)=2\mathrm{V}(X)$이야.

[수아] 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 그 그래프는 m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 대칭축의 위치는 변하지 않지만 곡선의 모양은 높이가 높아져.

031

괄호 안에 알맞은 말을 쓰시오.

Chapter 1) 확률변수와 확률분포

확률변수에는 (ㄱ :   )와 (ㄴ :   )가 있다.
〈단, ㄱ은 셀 수 있고, ㄴ은 셀 수 없다.〉

(ㄱ :   )가 이루는 분포를 함수로 나타낸 것을
(ㄷ :   )라 한다.

(ㄴ :   )가 이루는 분포를 함수로 나타낸 것을
(ㄹ :   )라 한다.

(ㄷ :   )의 성질

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때,

① ($\le p_i \le$)

② $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i=$ (   )

③ $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=$(   ) (단, X는 자연수)

(ㄹ :   ) $f(x)$의 성질

① ($f(x)\ge$)

② $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=$ (   ) (단, $[\alpha,\ \beta]$에서 정의)

③ $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=$ (   )
(단, $\alpha\le 1,\ 3\le\beta$)

Chapter 2) 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

기댓값(=   )은 기호로 (   )이고
정의는 (=   )이다.

통계

평균이 ( ), 분산이 ( )인
정규분포를 표준정규분포라 한다.

표준정규분포를 따르는 확률변수는 보통 (c :)로 나타낸다.

정규분포 N(a: , b:)을 따르는 확률변수 X를
표준정규분포 N(e: , f:)을 따르는
확률변수(c :)로 바꾸는 변환을 (d:)라 한다.

확률변수 X를 확률변수 (c :)로 변환 방법

확률변수 (c :)를 확률변수 X과 m, σ로 나타내면 (c :) = ( )이다.

이항분포와 정규분포의 관계는 다음과 같다.

확률변수 X가 이항분포 B(,)를 따를 때,
( )이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포
N(,)를 따른다.

n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 ( ) ≥ ( )
일 때를 뜻한다.

Chapter 5) 모집단과 표본

통계조사에서 조사하고자 하는 대상 전체를 (a:)이라 하고, (a:)전체를 조사하는 것을 (b:)라 한다.

통계 조사를 하기 위해 뽑은 모집단의 일부분을 (c:)
이라고 하고, 표본에 포함된 대상의 개수를 ( ),
모집단에서 표본을 뽑는 것을 (d:)이라고 한다.
또한 조사하려는 모집단에서 (c:)을 (d:)하여
그 자료의 특성을 조사하는 것을 ( )라 한다.

모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는
방법을 ( )추출이라 한다. 또 한 개의 자료를 뽑은 후
되돌려 놓고 다시 뽑는 것을 ( )이라 하고
되돌려 놓지 않고 뽑는 것을 ( )이라 한다.

Chapter 6) 표본평균과 분포

모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를
X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각
모평균, 모분산, 모표준편차라 한다.
이것을 기호로 나타내면

모평균은 ( )
모분산은 ( )
모표준편차는 ( )
이다.

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을
X_1, X_2, X_3, …, X_n 이라 할 때,
표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각
(d:), (e:), (f:)라 한다.

이때 (d:), (f:)는 오르비의 평균과 표준편차일까? 수험생 전체의 평균과 표준편차일까? 답은 ( )의 평균과 표준편차이다.

이것을 기호로 나타내면
(d:)는 (ㄱ :)
(e:)는 (ㄴ :)
(f:)는 (ㄷ :)
이고 다음과 같이 정의한다.

① (ㄱ :) = ( )
② (ㄴ :)

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\overline{X}\right)^2\right\}$$

③ (ㄷ :) = ( )

(d:)의 평균은 기호로 나타내면 (g :)
(d:)의 분산은 기호로 나타내면 (h :)
(d:)의 표준편차는 기호로 나타내면
(i:)이다.

통계

073 2007학년도 수능 가형

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 7인 표본과 크기 10인 표본의 표본평균을 각각 $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$라 하고, $\overline{X_A}$와 $\overline{X_B}$의 분포를 이용하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 각각 $a \le m \le b$, $c \le m \le d$라고 하자. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\overline{X_A}$의 분산은 $\overline{X_B}$의 분산보다 크다.
ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X_A} \le m+2) < \mathrm{P}(\overline{X_B} \le m+2)$
ㄷ. $d-c < b-a$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

074 2009학년도 수능 나형

다음은 어떤 모집단의 확률분포표이다.

X	10	20	30	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2}-a$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\overline{X}$의 평균이 18일 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=20)$의 값은? [4점]

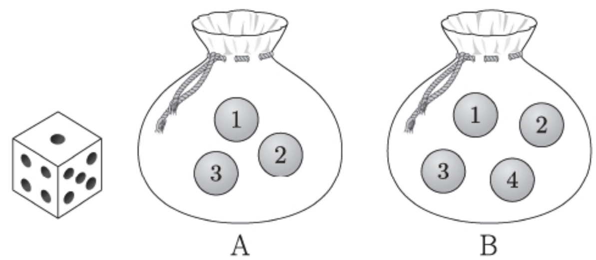
① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{19}{50}$ ③ $\frac{9}{25}$
④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{8}{25}$

075 2024학년도 고3 9월 평가원 확통

주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 3의 배수이면
주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]



① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$
④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$

078

어느 블로그의 하루 방문자 수는 모평균이 295 이고, 모표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 블로그의 하루 방문자 수 가운데 25 일을 임의추출하여 모평균의 값을 신뢰도 a % 로 추정한 신뢰구간이 $[\overline{x}-6, \overline{x}+6]$ 이고, 이 블로그의 하루 방문자 수 가운데 9 일을 임의추출하여 조사할 때, 9 일 동안 총 방문자 수가 2700 명 이상일 확률이 0.1587 일 때, a 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 65.87 ② 68.26 ③ 86.64
④ 95.44 ⑤ 98.76

079

상자 속에 1 의 숫자가 적혀 있는 카드가 n 개, 2 의 숫자가 적혀 있는 카드가 $n+5$ 개 들어 있다. 이 상자에서 임의로 1 개의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인하고 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복하여 얻은 세 수들의 평균을 $\overline{X}$ 라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} > 1) = \frac{26}{27}$ 일 때, $\dfrac{\mathrm{E}(4\overline{X})}{\mathrm{P}\left(\overline{X} = \frac{5}{3}\right)}$ 의 값을 구하시오.

080

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$ 을 따르는 확률변수 X와 이 모집단에서 크기가 16 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \le -11) = \mathrm{P}(X \ge 13) = 0.0013$
(나) $\mathrm{P}(\overline{X} \ge -2) = 1.9759 - \mathrm{P}(X \ge -7)$

$\mathrm{P}\left(\overline{X}^2 - 7\overline{X} + 12 \le 0\right)$ 의 값은?

① 0.0215 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1525 ⑤ 0.1587

081

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n 인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, 함수 $G(m)$ 은

$$G(m) = \mathrm{P}\left(\overline{X} \le \frac{6}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. $1.6687 \le G(0) + G(0.5) \le 1.9104$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수를 오른쪽 표준정규분포를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

통계

개념 확인문제 11

(1) $(a+b+c)^6=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$
$\times(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$

이므로 $(a+b+c)^6$의 전개식의 항의 개수는
3개의 문자 a, b, c중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는
중복조합의 수와 같다. 따라서 구하는 항의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2!}=28$$

(2) $(a+b)^3(x+y+z)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(x+y+z)$
$\times(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$

이므로 $(a+b)^3(x+y+z)^4$의 전개식의 항의 개수는
(2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는
중복조합의 수) × (3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을
허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수)와 같다.

따라서 구하는 항의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_3\times{}_3\mathrm{H}_4={}_{2+3-1}\mathrm{C}_3\times{}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_4\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_2$$

$$=4\times15=60$$

답 (1) 28 (2) 60

개념 확인문제 12

(1) 서로 다른 사탕 5개, 서로 같은 그릇 3개
하나의 그릇에는 적어도 하나의 사탕을 담아야하므로
각 그릇에 담는 사탕의 개수에 따라 case분류하면

① 각 그릇에 담는 사탕의 개수 2, 2, 1

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=15$$

② 각 그릇에 담는 사탕의 개수 3, 1, 1

$${}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=10$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 25이다.

(2) 서로 다른 사탕 5개, 서로 다른 그릇 3개
하나의 그릇에는 적어도 하나의 사탕을 담아야하므로
각 그릇에 담는 사탕의 개수에 따라 case분류하면

① 각 그릇에 담는 사탕의 개수 2, 2, 1

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=15$$

분배 3! (어떤 그릇에 분배할 것인가)
$15\times3!=90$

② 각 그릇에 담는 사탕의 개수 3, 1, 1

$${}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=10$$

분배 3! (어떤 그릇에 분배할 것인가)
$10\times3!=60$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 150이다.

(3) 서로 다른 사탕 5개, 서로 다른 그릇 3개
사탕을 담지 못하는 그릇이 생길 수 있으므로
$3^5=243$

Tip

서로 다른 사탕을 서로 다른 그릇에
넣고 몰빵가능하므로 중복순열이다.

(4) 서로 같은 사탕 8개, 서로 다른 그릇 3개
사탕을 담지 못하는 그릇이 생길 수 있으므로

서로 다른 세 그릇에 담는 사탕의 개수를
각각 x, y, z라 하면 $x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$
$x+y+z=8$

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\times9}{2!}=45$$

(5) 서로 같은 사탕 8개, 서로 다른 그릇 3개
하나의 그릇에는 적어도 하나의 사탕을 담아야하므로

서로 다른 세 그릇에 담는 사탕의 개수를
각각 x, y, z라 하면 $x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$
$x+y+z=8$

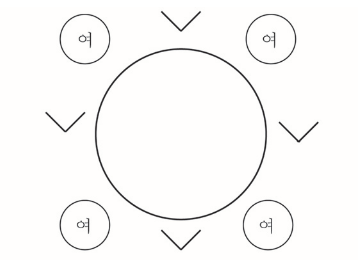
$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$라 하면
$x'\ge0$, $y'\ge0$, $z'\ge0$

$x'+1+y'+1+z'+1=8 \Rightarrow x'+y'+z'=5$

$${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2!}=21$$

답 (1) 25 (2) 150 (3) 243 (4) 45 (5) 21

003



여자 원순열 배열 $(4-1)!=3!$

${}_4C_3$ (V에서 남자 앉을 자리 3개 선택) $\times 3!$ (자리 배열)

$3!\times {}_4C_3\times 3! = 6\times 4\times 6 = 144$

답 144

004

1학년 학생 1명, 2학년 학생 4명, 3학년 학생 2명

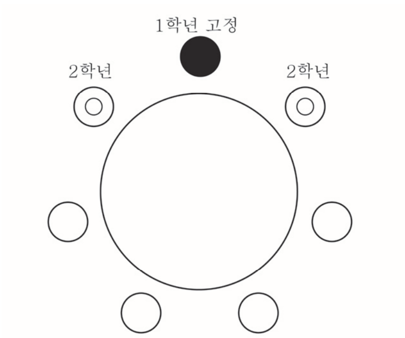
1학년 학생의 옆에 적어도 한 명의 3학년 학생이
앉는 경우의 수는 전체 원순열에서
1학년 학생의 옆에 모두 2학년 학생이 앉는 경우의 수를
빼서 구할 수 있다.

전체 원순열 $6! = 720$

1학년 학생의 옆에 모두 2학년 학생이 앉는 경우의 수는

${}_4C_2\times 2!$ (2학년 자리 선택 배열) $\times\ 4!$ (나머지 배열)

$= 288$

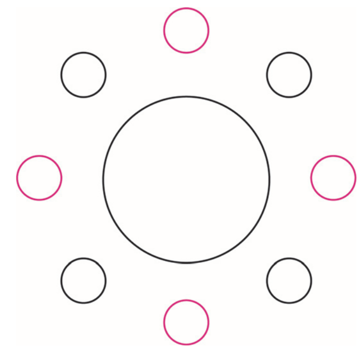


따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$720-288=432$ 이다.

답 432

005



$3!$ (남자 원순열 배열) $\times 4!$ (여자 배열) $= 6\times 24 = 144$

답 144

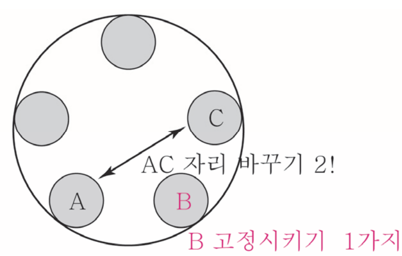
006

김치 = A, 콩나물무침 = B, 가지볶음 = C

서로 다른 7개의 반찬 A, B, C, D, E, F, G

D, E, F, G 중 2개 선택하면 ${}_4C_2$

선택된 5개의 반찬을 A, B, C, D, E라 하자.



1 (B고정시키기) $\times 2!$ (AC자리 바꾸기)

$\times 2!$ (DE자리 바꾸기)

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

${}_4C_2\times 1\times 2!\times 2! = 6\times 4 = 24$ 이다.

답 24

3 개	2 개	1 개
aaa	bb	c

학생 6 명을 ❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻ 라 하면

❶	❷	❸	❹	❺	❻
a	a	a	b	b	c

Guide step에서 배운 “매칭시키기”를 적용해보자.
(바로 밑에 있는 것을 선택한다고 생각)
학생을 고정시키고 $aaabbc$를 배열하면 $\dfrac{6!}{3!2!}=60$

$\therefore\ 6\times 60=360$

③ 6 명의 학생이 받는 볼펜 개수의 그룹이 2, 2, 2 일 때

a, b, c 모두 2 개씩 나누어주기 1

2 개	2 개	2 개
aa	bb	cc

학생 6 명을 ❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻ 라 하면

❶	❷	❸	❹	❺	❻
a	a	b	b	c	c

Guide step에서 배운 “매칭시키기”를 적용해보자.
(바로 밑에 있는 것을 선택한다고 생각)
학생을 고정시키고 $aabbcc$를 배열하면 $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

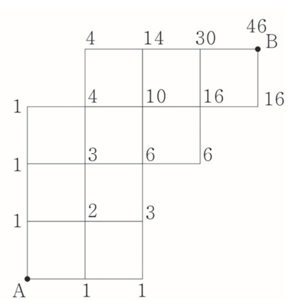
$\therefore\ 1\times 90=90$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $60+360+90=510$ 이다.

답 510

025

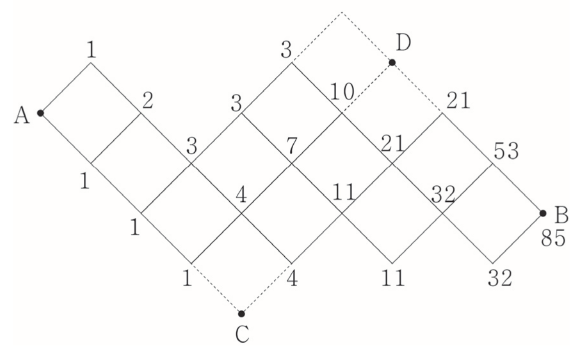
합의 법칙으로 직접 세면서 구해보자.



답 46

026

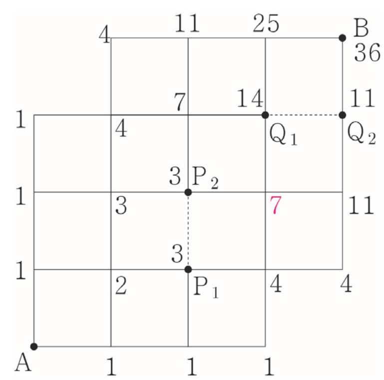
합의 법칙으로 직접 세면서 구해보자.



답 85

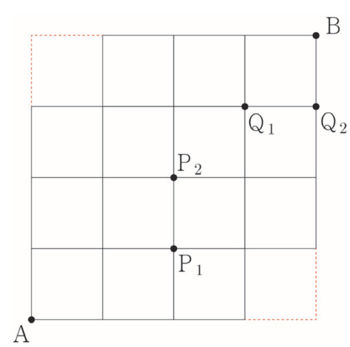
027

풀이1) 직접 세기



풀이2) 여사건 이용하기
A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수에서 P_1-P_2 또는 Q_1-Q_2 를 지나는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수
$\dfrac{8!}{4!4!}-2=70-2=68$



치역 3, 5중 어디갈래?

각각 2가지 $\Rightarrow$ $2^4=16$가지
이때 3로 몰빵 or 5로 몰빵하는 경우 2가지를 빼줘야 한다.

$\therefore$ $16-2=14$

② 원소의 개수가 3개 (치역이 1, 2, 5)
정의역 1, 2, 3, 5를 2개, 1개, 1개의 묶음으로 나누면

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$ (분할)

1, 2 / 3 / 5로 분할했다고 가정하자.
세 묶음을 치역 1, 2, 5에 매칭시키기 3! (분배)

Tip

이때 2개, 1개, 1개라 해서 매칭시키는
경우의 수를 $\frac{3!}{2!}$ 라 하지 않도록 유의하자.
세 묶음은 1, 2 / 3 / 5이므로
3과 5는 개수는 1개로 같을지라도
서로 다른 묶음으로 봐야 한다.
따라서 세 묶음은 모두 다르므로 매칭시키는
경우의 수는 3! 이다.

$\therefore$ ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\times3!=36$

따라서 치역의 모든 원소의 합이 8인 함수의 개수는
$14+36=50$이다.

답 50

여러 가지 순열과 중복조합 | Training – 2 step

54	③	91	②
55	①	92	④
56	④	93	②
57	②	94	④
58	②	95	⑤
59	⑤	96	①
60	③	97	④
61	②	98	②
62	②	99	74
63	①	100	50
64	⑤	101	③
65	④	102	546
66	④	103	33
67	①	104	9
68	①	105	37
69	⑤	106	220
70	①	107	36
71	④	108	②
72	①	109	32
73	③	110	⑤
74	③	111	⑤
75	③	112	68
76	④	113	③
77	①	114	④
78	②	115	525
79	⑤	116	120
80	②	117	32
81	⑤	118	332
82	90	119	80
83	55	120	450
84	③	121	⑤
85	84	122	④
86	36	123	115
87	③	124	④
88	④	125	①
89	③	126	196
90	48	127	25

나머지의 합이 3 의 배수이면 된다.

Tip

<배수 판별법>

① 2 의 배수 : 끝자리 0, 2, 4, 6, 8
② 3 의 배수 : 각자리 숫자의 합이 3 의 배수
③ 4 의 배수 : 뒤 끝 두 자리가 4 의 배수
④ 5 의 배수 : 끝자리 0, 5

<3 의 배수 증명>
각 자리수를 $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_2,\ a_1$ 라 하면

$$a_na_{n-1}\cdots\ a_2a_1a_0$$
$$=10^n\times a_n+\ \cdots\ +10^2\times a_2+10\times a_1+a_0$$

$$10^1=9+1$$
$$10^2=99+1$$
$$10^3=999+1$$
$$\vdots$$
이므로
$$(9\cdots99+1)\times a_n+\ \cdots\ +(99+1)\times a_2+(9+1)\times a_1+a_0$$

$$3(3\cdots33a_n+\ \cdots\ +33a_2+3a_1)+a_n+a_{n-1}+\ \cdots\ +a_1+a_0$$
따라서 3 의 배수이려면 각 자리 숫자의 합이
3 의 배수이면 된다.
(3 의 배수이다 = 3 으로 묶어서 나타낼 수 있다.)

<4 의 배수 증명>
각 자리수를 $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_2,\ a_1$ 라 하면

$$a_na_{n-1}\cdots\ a_2a_1a_0$$
$$=10^n\times a_n+\ \cdots\ +10^2\times a_2+10\times a_1+a_0$$

$10^n\,(n\geq 2)$ 은 4 의 배수이므로
$$4\left(25\times10^{n-2}\times a_n+\ \cdots\ +25\times a_2\right)+10\times a_1+a_0$$
따라서 4 의 배수이려면 $10\times a_1+a_0$ 만 4 의 배수이면 된다.

① 나머지 0, 0, 0
나머지 0 ⇒ 3 뿐이니 1 가지

② 나머지 1, 1, 1
나머지 1 ⇒ 1, 4 각 2 가지씩이니까
$\therefore\ 2\times2\times2=8$

③ 나머지 2, 1, 0
나머지 0 ⇒ 3
나머지 1 ⇒ 1, 4
나머지 2 ⇒ 2, 5

$\therefore\ 2\times2\times1\times3!$ (배열) $=24$

④ 나머지 2, 2, 2
나머지 2 ⇒ 2, 5 각 2 가지씩이니까 $2\times2\times2=8$

따라서 3 의 배수인 세 자리 자연수의 개수는
$1+8+24+8=41$ 이다.

답 41

Tip

1, 1, 1 에서 중복순열로 계산하지 않고
case분류하면 계산량이 많아진다.
서로 다른 캔디들을 서로 다른 그릇에 담고
한 그릇에 몰빵가능하면 중복순열이다.

중복순열에 관한 문제는 이 문제가 중복순열을
묻는 문제인지 판단하는 것이 가장 어렵다.

140

01 의 위치에 따라 case분류하면

① 01 _ _ _ _
오류는 한번 뿐이니까 0, 1 의 배열은
무조건 1 → 0 순서이다. 배열확정!
1 의 개수를 x, 0 의 개수를 y 라 하면 $x+y=4$
${}_2\mathrm{H}_4=5$ 가지

② _ _ _ _ 01
①와 동일한 구조이므로 ${}_2\mathrm{H}_4=5$ 가지

③ _ 01 _ _ _
첫 번째에 올 숫자 선택 2 가지 $\times\ {}_2\mathrm{H}_3=8$ 가지

④ _ _ _ 01 _
③와 동일한 구조니까 마찬가지로 8 가지

⑤ _ _ 01 _ _
${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2=9$ 가지

x_1
$x_2 = x_1 + a$
$x_3 = x_1 + a + b$
$x_4 = x_1 + a + b + c$
이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 의 개수는
순서쌍 $(x_1,\ a,\ b,\ c)$ 의 개수와 같다.
(나) 조건에 의해서 $x_1 + a + b + c \le 12$
$x_1 \ge 0,\ a \ge 2,\ b \ge 2,\ c \ge 2$
Training-1step 047번에서 배운 "쓰레기통 처리법"을
사용해보자.

$x_1 + a + b + c + d = 12$

$a = a' + 2,\ b = b' + 2,\ c = c' + 2$
$x_1 \ge 0,\ a' \ge 0,\ b' \ge 0,\ c' \ge 0,\ d \ge 0$
$x_1 + a' + b' + c' + d = 6 \Rightarrow {}_5\mathrm{H}_6 = {}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$

따라서 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 의 개수는 210 이다.

답 ①

Tip

EBS연계문항으로 출제되어 나름 까다로운 준킬러 문제였다.
(가) 조건에서 '$x_{n-1} - x_n$'에 집중했다면

$$\underbrace{x_1 \quad x_2}_{a} \quad \underbrace{x_2 \quad x_3}_{b} \quad \underbrace{x_3 \quad x_4}_{c}$$

'정수들의 차이'가 문제를 풀어나가는
중요한 실마리라는 것을 느낄 수 있었다.

145

검은색 볼펜 1 자루, 파란색 볼펜 4 자루, 빨간색 볼펜 4 자루
검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜을 선택하는
개수를 각각 $a,\ b,\ c$ 라 하자.

$a + b + c = 5$
a 의 값에 따라 case분류하면

① $a = 0$
두 명의 학생이 받는 파란색 볼펜의 개수를 각각 $A,\ B$
두 명의 학생이 받는 빨간색 볼펜의 개수를 각각 $X,\ Y$

b	c	경우의 수
1	4	$A+B=1,\ X+Y=4 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_4 = 10$
2	3	$A+B=2,\ X+Y=3 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_3 = 12$
3	2	$A+B=3,\ X+Y=2 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 12$
4	1	$A+B=4,\ X+Y=1 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_1 = 10$

$\therefore\ 10 + 12 + 12 + 10 = 44$

② $a = 1$
두 명의 학생 중 검은색 볼펜 누가 가질래? 2 가지
두 명의 학생이 받는 파란색 볼펜의 개수를 각각 $A,\ B$
두 명의 학생이 받는 빨간색 볼펜의 개수를 각각 $X,\ Y$

b	c	경우의 수
0	4	$A+B=0,\ X+Y=4 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_0 \times {}_2\mathrm{H}_4 = 5$
1	3	$A+B=1,\ X+Y=3 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_3 = 8$
2	2	$A+B=2,\ X+Y=2 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 9$
3	1	$A+B=3,\ X+Y=1 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_1 = 8$
4	0	$A+B=4,\ X+Y=0 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_0 = 5$

$\therefore\ 2(5 + 8 + 9 + 8 + 5) = 70$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $44 + 70 = 114$ 이다.

답 114

146

흰 공 2 개 ○ ○
빨간 공 3 개 ● ● ●
검은 공 3 개 ● ● ●
흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1 개
이상 받는다.

흰 공에 따라 case분류하면

① ○ ○ ×
세 학생 A, B, C 중 흰 공 받을 학생 선택 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 가지
A, B 가 흰 공을 받는다고 가정하자.
흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 적어도 1 개는
가져야한다.

A	B	C
○	○	
●	●	
●	●	

⑤ $(2,\ 4)$ 이면 $n(A\cap B)=4$ 이므로 모순

⑥ $(3,\ 4)$ 이면 $n(A\cap B)=6$ 이므로 모순

$(1,\ 2)$ or $(2,\ 1)$ 선택 2가지

$n(A)=1$, $n(B)=2$ 라 가정하면
$A=a$, $B=(a,\ b),\ (a,\ c),\ (a,\ d)$
$A=b$, $B=(b,\ a),\ (b,\ c),\ (b,\ d)$
$A=c$, $B=(c,\ a),\ (c,\ b),\ (c,\ d)$
$A=d$, $B=(d,\ a),\ (d,\ b),\ (d,\ c)$
12가지

$\therefore\ \mathrm{P}(X)=\dfrac{2\times 12}{{}_{15}\mathrm{C}_2\times 2!}=\dfrac{4}{35}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{4}{35}$ 이다.

답 ③

079

1_a, 1_b, 2, 3, 4
표본공간을 S 라 하면
$n(S)={}_5\mathrm{C}_4\times 4!$

$a\le b\le c\le d$ 인 사건을 A

① 1, 2, 3, 4
1_a, 1_b 중 1개 선택 ${}_2\mathrm{C}_1$
선택하면 $a,\ b,\ c,\ d$ 가 정해지므로 1가지

② 1, 1, □, □
1_a, 1_b 자리 바꾸기 $2!$ (1_a, 1_b 순이라고 가정)
2, 3, 4 중 2개 선택 ${}_3\mathrm{C}_2$
선택하면 $a,\ b,\ c,\ d$ 가 정해지므로 1가지

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1+2!\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_4\times 4!}=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{1}{15}$ 이다.

답 ①

Tip

확률에서는 같은 것도 서로 다른 것으로 보아야 한다고 Guide Step에서 학습하였다.
만약 1을 같은 것으로 가정하여 풀어도 될까?

이 문제는 같은 것으로 보아도 답이 같다. 한 번 확인해보자.

① 1, 2, 3, 4
배열 $4!=24$ 가지

② 1, 1, □, □
2, 3, 4 중 2개 선택 ${}_3\mathrm{C}_2$
배열 $\dfrac{4!}{2!}$
$\Rightarrow\ {}_3\mathrm{C}_2\times\dfrac{4!}{2!}=36$ 가지
이므로 표본공간을 S 라 하면 $n(S)=24+36$ 이다.
이 중에서 $a\le b\le c\le d$ 를 만족시키는 경우는
$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (1,\ 1,\ 2,\ 3),$
$(1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 4)$
이렇게 4가지이므로 구하고자 하는 확률은
$\dfrac{4}{24+36}=\dfrac{4}{60}=\dfrac{1}{15}$ 이다.

도대체 왜 그럴까?

$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 이 나올 확률은
분자 : 1_a, 1_b 중 1개 선택 ${}_2\mathrm{C}_1$
분모 : ${}_5\mathrm{C}_4\times 4!$
이므로 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_4\times 4!}=\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$ 이다.
(1, 2, 3, 4를 배열하여 얻은 24가지의 순서쌍의 발생 가능성은 모두 $\dfrac{1}{60}$ 이다.)

$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 3)$ 이 나올 확률은
분자 : 1_a, 1_b 자리 바꾸기 $2!$
분모 : ${}_5\mathrm{C}_4\times 4!$
이므로 $\dfrac{2!}{{}_5\mathrm{C}_4\times 4!}=\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$ 이다.
(1, 1, 2, 3 / 1, 1, 2, 4 / 1, 1, 3, 4를 배열하여 얻은 36가지의 순서쌍의 발생 가능성은 모두 $\dfrac{1}{60}$ 이다.)

즉, 이 문제에서는 각 근원사건의 발생 가능성이 모두 $\dfrac{1}{60}$ 로 동일하기 때문에 같은 것으로 보아도 답은 같다.

080

표본공간을 S라 하면
$n(S)=7!$

수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지는 사건을 X라 하고
두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해지는 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)$ 를 이용하여 구해보자.

① $\mathrm{P}(X)$

과학 동아리 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 수학 동아리 A, B

수학 동아리를 같은 문자 z라 하면 $n(X)$는
$z,\ z,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X)=\dfrac{\frac{7!}{2!}}{7!}=\dfrac{1}{2}$

② $\mathrm{P}(Y)$

A $\square\ \square$ B 한묶음으로 보자.
두 수학 동아리의 발표 사이에 들어갈 과학 동아리 선택 ${}_5\mathrm{C}_2$
($a,\ b$가 선택되었다고 가정)
$a,\ b$ 자리 바꾸기 2! ($a,\ b$ 순이라고 가정)
A, B 자리 바꾸기 2! (A, B 순이라고 가정)
나머지 $c,\ d,\ e,$ (A $\boxed{a}\ \boxed{b}$ B) 배열 4!

$\therefore\ \mathrm{P}(Y)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times 2!\times 2!\times 4!}{7!}=\dfrac{4}{21}$

③ $\mathrm{P}(X\cap Y)$

A $\square\ \square$ B 한묶음으로 보자.
두 수학 동아리의 발표 사이에 들어갈 과학 동아리 선택 ${}_5\mathrm{C}_2$
($a,\ b$가 선택되었다고 가정)
$a,\ b$ 자리 바꾸기 2! ($a,\ b$ 순이라고 가정)
나머지 $c,\ d,\ e,$ (A $\boxed{a}\ \boxed{b}$ B) 배열 4!

$\therefore\ \mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times 2!\times 4!}{7!}=\dfrac{2}{21}$

$$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{21}-\frac{2}{21}=\frac{25}{42}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{25}{42}$ 이다.

답 ③

081

표본공간을 S라 하면
$n(S)={}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2$

$A\cap B\neq\varnothing$ 인 사건을 X라 하면
$A\cap B=\varnothing$ 인 사건은 X^c이다.

풀이1) 선택하면 자동배열 이용하기

1, 2, 3, 4, 5, 6가 적힌 6장의 카드에서 4개를 선택하면 ${}_6\mathrm{C}_4$ (1, 2, 3, 4가 선택됐다고 가정)
이때 $A\cap B=\varnothing$ 인 경우는
$1\le x\le 2,\ 3\le x\le 4$ 밖에 가능하지 않으므로
배열은 1가지이다. (선택만 하면 자동배열)
$1\le x\le 2,\ 3\le x\le 4$를 집합 $A,\ B$에 매칭시키기 2!

$\mathrm{P}(X^c)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4\times 2!}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{15}$ 이므로
$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^c)=1-\dfrac{2}{15}=\dfrac{13}{15}$ 이다.

풀이2) 직접 세기
a_2를 기준으로 case분류하면

① $a_2=2$
$a_1=1\Rightarrow[1,\ 2]$이므로 $[b_1,\ b_2]\Rightarrow{}_4\mathrm{C}_2=6$가지
$\therefore$ 6가지

② $a_2=3$
$a_1=1\Rightarrow[1,\ 3]$이므로 $[b_1,\ b_2]\Rightarrow{}_3\mathrm{C}_2=3$가지
$a_1=2\Rightarrow[2,\ 3]$이므로 $[b_1,\ b_2]\Rightarrow{}_3\mathrm{C}_2=3$가지
$\therefore$ 6가지

③ $a_2=4$
$a_1=1\Rightarrow[1,\ 4]$이므로 $[b_1,\ b_2]\Rightarrow$ 1가지
$a_1=2\Rightarrow[2,\ 4]$이므로 $[b_1,\ b_2]\Rightarrow$ 1가지
$a_1=3\Rightarrow[3,\ 4]$이므로 $[b_1,\ b_2]\Rightarrow$ 2가지
$\therefore$ 4가지

$\therefore\ P(B)=\dfrac{{}_3C_2\times 2!+{}_4C_3\times 3!\times 2}{{}_5C_4\times 4!}=\dfrac{9}{20}$

③ $P(A\cap B)$

일의 자리는 5로 고정해야 하므로 3500 이상이 되려면 천의 자리는 4가 되어야 한다.

4 □ □ 5

나머지 선택 후 배열 ${}_3C_2\times 2!$

$\therefore\ P(A\cap B)=\dfrac{{}_3C_2\times 2!}{{}_5C_4\times 4!}=\dfrac{1}{20}$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{5}+\frac{9}{20}-\frac{1}{20}\\&=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{3}{5}$ 이다.

답 ④

085

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_{10}C_3=120$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10를 3으로 나눈 나머지로 분류하면 다음과 같다.

나머지 1 : 1, 4, 7, 10
나머지 2 : 2, 5, 8
나머지 0 : 3, 6, 9

5의 포함 유무에 따라 case분류하면

① 5가 포함되지 않은 경우

세 개의 수의 곱이 5의 배수이므로 10을 포함해야 한다.
10은 3으로 나눈 나머지가 1이고,
세 개의 수의 합이 3의 배수가 나오려면 세 개의 수의 나머지의 합이 3의 배수이어야 한다.

i) 세 수의 나머지가 1, 1, 1인 경우
1, 4, 7 중 2개 선택 ${}_3C_2$

ii) 세 수의 나머지가 1, 2, 0인 경우
2, 8 중 1개 선택 ${}_2C_1$
3, 6, 9 중 1개 선택 ${}_3C_1$
즉, ${}_2C_1\times{}_3C_1=6$

$\therefore\ 3+6=9$

② 5가 포함되는 경우

5은 3으로 나눈 나머지가 2이고,
세 개의 수의 합이 3의 배수가 나오려면 세 개의 수의 나머지의 합이 3의 배수이어야 한다.

i) 세 수의 나머지가 2, 2, 2인 경우
5, 8 중 2개 선택 ${}_2C_2$

ii) 세 수의 나머지가 2, 1, 0인 경우
1, 4, 7, 10 중 1개 선택 ${}_4C_1$
3, 6, 9 중 1개 선택 ${}_3C_1$
즉, ${}_4C_1\times{}_3C_1=12$

$\therefore\ 1+12=13$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{9+13}{120}=\dfrac{22}{120}=\dfrac{11}{60}$ 이다.

답 ③

086

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_{15}C_3\times 3!$

$A\subset B\subset C$인 사건을 X

$n(B)$ 의 값에 case분류하면

① $n(B)=2$

1, 2, 3, 4 중에서 2개 선택하면 ${}_4C_2$

$B=\{1,\ 2\}$ 라 하면

$n(A)=1\ \Rightarrow\ {}_2C_1$ (1, 2 중 1개 선택)
$n(C)=3\ \Rightarrow\ {}_2C_1=2$ (3, 4 중 1개 선택)
$n(C)=4\ \Rightarrow\ {}_2C_2=1$
$\therefore\ {}_2C_1\times{}_4C_2\times({}_2C_1+{}_2C_2)=2\times 6\times 3=36$

053

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A^c\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)+\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B))+(1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{6}(1-\mathrm{P}(B))+\frac{5}{6}\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 이다.

답 ②

054

생태연구를 선택하는 사건을 A
여학생인 사건을 B

따라서 구하고자 하는 확률은
$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{50}{60+50}=\frac{5}{11}$ 이다.

답 ①

055

4 의 눈이 나올 확률 $\frac{1}{6}$ ○

4 의 눈이 나오지 않을 확률 $\frac{5}{6}$ X

○ X X

따라서 구하고자 하는 확률은
${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$ 이다.

답 ①

056

① 주머니 A를 선택한 뒤 동시에 꺼낸 2 개의 구슬이 모두 검은색인 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

② 주머니 B를 선택한 뒤 동시에 꺼낸 2 개의 구슬이 모두 검은색인 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}=\frac{1}{7}$ 이다.

답 ④

057

앞 ○ 뒤 X

① ○ ○ X X X $\Rightarrow$ ${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$

② ○ ○ ○ X X $\Rightarrow$ ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{5+5}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$ 이다.

답 ①

058

	여학생	남학생	합계
축구	30	$x=40$	70
야구	10	20	30
합계	40	60	

$\frac{x}{100}=\frac{2}{5}\Rightarrow x=40$
야구를 선택하는 사건을 A
여학생인 사건을 B

따라서 구하고자 하는 확률은
$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{10}{10+20}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$
이다.

답 ②

Tip

<빠짐없이 세는 법>
$a,\ b,\ c$ 에서 $a \le b \le c$ 인 규칙으로 세면 되고
$a \to b \to c$ 순으로 점점 숫자를 키워가면 된다.

위 경우 2, 4, 4 를 예로 들면
합이 벌써 10이고 $b \le c$ 이므로 b를 키우는
순간 조건을 만족시키지 않는다.
즉, 다음 고려해야 할 숫자는 $3 \le b \le c$이므로
3, 3, 3이다. 3, 3, 3은 조건을 만족시키지
않으므로 c를 키우면 3, 3, 4이고 이는 조건을 만족시킨다.

이러한 방법으로 세면 빠짐없이 셀 수 있다.

② 꺼낸 공에 적힌 수가 4인 경우
주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 4일 확률 $\frac{3}{5}$
주사위를 4번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는
다음과 같다.

$1,\ 1,\ 2,\ 6 \Rightarrow \frac{4!}{2!}=12$가지
$1,\ 1,\ 3,\ 5 \Rightarrow \frac{4!}{2!}=12$가지
$1,\ 1,\ 4,\ 4 \Rightarrow \frac{4!}{2!2!}=6$가지
$1,\ 2,\ 2,\ 5 \Rightarrow \frac{4!}{2!}=12$가지
$1,\ 2,\ 3,\ 4 \Rightarrow 4!=24$가지
$1,\ 3,\ 3,\ 3 \Rightarrow \frac{4!}{3!}=4$가지
$2,\ 2,\ 2,\ 4 \Rightarrow \frac{4!}{3!}=4$가지
$2,\ 2,\ 3,\ 3 \Rightarrow \frac{4!}{2!2!}=6$가지

$$(12+12+6+12+24+4+4+6)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=80\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{81}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{5}{81}=\frac{1}{27}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{27+20}{540}=\frac{47}{540}$ 이다.

답 ⑤

다른 방법으로 구해보자.

주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우를
셀 때, 나온 수를 차례대로 $a,\ b,\ c$라 하면

$1 \le a,\ b,\ c \le 6$
$a+b+c=10$

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$
$0 \le a',\ b',\ c' \le 5$

$a'+b'+c'=7 \Rightarrow {}_3H_7$
이때 범위에서 벗어난 경우를 빼줘야 한다.
$(a',\ b',\ c')=(0,\ 1,\ 6) \Rightarrow 3!$
$(a',\ b',\ c')=(0,\ 0,\ 7) \Rightarrow 3$

$\therefore\ {}_3H_7-(3!+3)=36-9=27$

주사위를 4번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우를
셀 때, 위와 마찬가지로

$0 \le a',\ b',\ c',\ d' \le 5$
$a'+b'+c'+d'=6 \Rightarrow {}_4H_6$
이때 범위에서 벗어난 경우를 빼줘야 한다.
$(a',\ b',\ c',\ d')=(0,\ 0,\ 0,\ 6) \Rightarrow 4$

$\therefore\ {}_4H_6-4=84-4=80$

097

상자 B에 들어있는 공의 개수가 8인 사건을 X,
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 Y라
하자.

한 번의 시행에서 상자 B에 넣는 공의 개수는
1 or 2 or 3이므로 4번을 시행한 후 상자 B에
들어 있는 공의 개수가 8인 경우는 다음과 같다.
3, 3, 1, 1 / 3, 2, 2, 1 / 2, 2, 2, 2

① 3, 3, 1, 1인 경우
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 2
주머니에서 숫자 1이 적힌 카드 2장, 숫자 4가 적힌
카드 2장을 꺼내야 하므로 확률은
$$\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

② 3, 2, 2, 1인 경우
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 3
주머니에서 숫자 1인 적힌 카드 1장,
숫자 2 또는 3이 적힌 카드 2장, 숫자 4가 적힌

Chapter 2) 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

기댓값(= 평균)은 기호로 ($\mathrm{E}(X)$)이고

정의는 ($x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$)이다.

분산은 기호로 ($\mathrm{V}(X)$)이고

정의는 이산확률변수 X의 기댓값을 m이라 할 때,

($(X-m)^2$)의 기댓값이다.

시그마로 표현하면 ($\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$)이다.

또한 분산의 다른 공식은 ($\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$)이다.

표준편차는 기호로 ($\sigma(X)$)이고

정의는 분산의 양의 (제곱근)이다. ($\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$)

이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

> 이산확률변수 X와 임의의 두 상수 a, $b(a\neq 0)$에 대하여
> $\mathrm{E}(aX+b)=$($a\mathrm{E}(X)+b$)
> $\mathrm{V}(aX+b)=$($a^2\mathrm{V}(X)$)
> $\sigma(aX+b)=$($|a|\sigma(X)$)

Chapter 3) 이항분포

이항분포의 확률변수는 (이산)확률변수이다.

① 정의 : 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때,
n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는
(횟수)를 확률변수 X라 하였을 때,
확률질량함수는
$\mathrm{P}(X=x)=$(${}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$)이다.
(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ n$)

이러한 확률분포를 이항분포라 한다.

② 기호: $\mathrm{B}(a:\ n\ ,\ b:\ p\ )$

($a:\ n$)는 (총 시행 횟수)이고
($b:p$)는 (각 시행에서 사건 A가 일어날 확률)이다.

이항분포의 평균 = (np)
이항분포의 분산 = ($np(1-p)$)
이항분포의 표준편차 = ($\sqrt{np(1-p)}$)

③ $X\sim\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$일 때,

$\mathrm{P}(X=2)=$ (${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$)

$\mathrm{P}(X\geq 2)=$ ($\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$)
$=1-$($\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$)

Chapter 4) 정규분포

정규분포의 확률변수는 (연속)확률변수이다.

① 정의 : 실수 전체의 집합에서 정의된 연속확률변수 X의
확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, $\sigma(\sigma>0)$에
대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$ 일 때,

X의 확률분포를 정규분포라 한다.

② 기호: $\mathrm{N}(a:\ m\ ,\ b:\ \sigma^2\ )$

($a:\ m$)는 (평균)이고
($b:\ \sigma^2$)는 (분산)이다.
정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질

> ① 직선 $x=m$에 대하여 (대칭)이고,
> x축이 (점근선)인 종 모양의 곡선이다.
>
> ② 곡선과 x축 사이의 넓이는 (1) 이다.
>
> ③ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면
> 대칭축의 위치는 (바뀌지만)
> 곡선의 모양은 (같다.)
>
> ④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록
> 가운데 부분의 높이는 (낮아지고)
> 양쪽으로 (퍼진다.)
> 양쪽으로 (퍼지)는 이유는
> (곡선과 x축 사이의 넓이가 1로 일정해야 하기 때문에
> 높이가 낮아지면서 손실된 넓이를 보상해주기) 위해서이다.

074

X	10	20	30	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2}-a$	1

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5+20a+15-30a=20-10a=18$

$\Rightarrow 2=10a \Rightarrow a=\frac{1}{5}$

X	10	20	30	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

이 모집단에서 크기가 2 인 표본을 복원추출하여
추출한 표본을 각각 X_1, X_2라고 하자.

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ 의 값을 구하기 위해서
변수가 2 개이니 표를 그려서 해결해보자.

$X_1 \backslash X_2$	10	20	30
10	10	15	20
20	15	20	25
30	20	25	30

따라서
$\mathrm{P}(\overline{X}=20)=2\mathrm{P}(X=10)\mathrm{P}(X=30)+\mathrm{P}(X=20)\mathrm{P}(X=20)$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}+\frac{1}{25}=\frac{17}{50}$$

이다.

답 ④

075

① 주사위에서 나온 눈의 수가 3 의 배수인 경우

주사위에서 3 의 배수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 A 에서 꺼낸 2 개의 공을 순서쌍으로 표현하면
(1, 2), (1, 3), (2, 3) 이므로

주머니 A 에서 꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 수의
차가 1 일 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
차가 2 일 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

② 주사위에서 나온 눈의 수가 3 의 배수가 아닌 경우

주사위에서 3 의 배수가 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 B 에서 꺼낸 2 개의 공을 순서쌍으로 표현하면
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) 이므로

주머니 B 에서 꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 수의
차가 1 일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{9}$
차가 2 일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$
차가 3 일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

이 시행에서 기록한 두 개의 수의 차를 확률변수 X라 하자.
확률변수 X의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

이 모집단에서 크기가 2 인 표본을 복원추출하여
추출한 표본을 각각 X_1, X_2라고 하자.

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ 의 값을 구하기 위해서
변수가 2 개이니 표를 그려서 해결해보자.

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3
1	1	1.5	2
2	1.5	2	2.5
3	2	2.5	3

따라서
$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=2\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(X=2)$

$$=2\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{9}=\frac{10}{81}+\frac{9}{81}=\frac{19}{81}$$

이다.

답 ⑤