규토 라이트 N제

함수의 극한과 연속

Guide step

개념 익히기편

2. 함수의 연속

함수의 극한과 연속

01 함수의 연속

성취 기준 – 함수의 연속의 뜻을 안다.

개념 파악하기 (1) 함수의 연속이란 무엇일까?

함수의 연속

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여

① 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 가 존재한다.

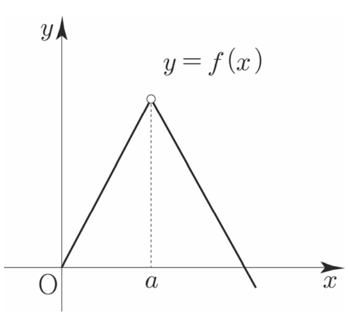
③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (극한값과 함숫값이 같다.)

일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **연속**이라고 한다.

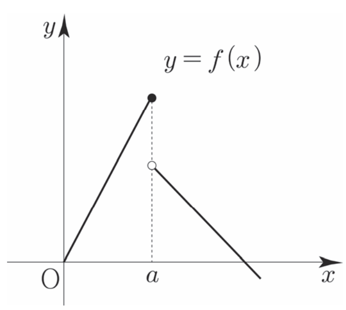
함수의 불연속

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **불연속**이라고 한다.
즉, 함수 $f(x)$ 가 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.
예를 들면 아래와 같다.

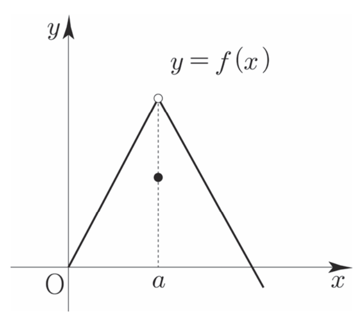
① 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되어 있지 않다.



② 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 가 존재하지 않는다.



③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



Tip 그래프를 통해 직관적으로 이해하면 된다.
$x=a$ 에서 연결되어 있으면 $x=a$ 에서 연속이고 $x=a$ 에서 끊어져 있으면 $x=a$ 에서 불연속이다.

060 2010학년도 수능 가형

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a) \neq \lim_{a\to c-} f(a)$ 인 실수 c는 2개다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

061 2024년 고3 10월 교육청 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)g(x)=|f(x)|$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $g(3)=0$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15

④ 18 ⑤ 21

062 2024학년도 고3 9월 평가원 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18

④ 20 ⑤ 22

함수의 극한과 연속

정답 및 해설 p.114, 115

04 미분

함수의 그래프

성취 기준 - 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 함수의 그래프의 개형은 어떻게 그릴까?

함수의 그래프의 개형 그리기

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 과정으로 그릴 수 있다.

① 도함수 $f'(x)$를 그린다.

② $f'(x)$의 부호를 판단하여 증감을 고려한 대략적인 $f(x)$를 그린다.

③ 극댓값 or 극솟값 or x절편 or y절편 등을 고려하여 디테일하게 함숫값을 표시한다.

④ 최종적으로 ②+③을 고려하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

Tip 1 ①에서 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$를 그릴 때, y축은 생략가능하다.

Tip 2 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$에서 항상 양수인 부분은 고려하지 않아도 된다.

ex1 $f'(x)=10x(x-1)$ 이라면 $f'(x)=x(x-1)$라 두고 판단해도 된다.

ex2 $f'(x)=(x^2+1)x$ 이라면 $f'(x)=x$라 두고 판단해도 된다.

이때 두 번째 $f'(x)$를 Semi 도함수라고 하자. (소통을 위한 필자와의 약속)

Tip 3 위와 같은 방식 즉, 증감표를 그리지 않고 $f'(x)$를 그려서 $f'(x)$의 부호를 판단하려면 x절편을 바탕으로 3차 이상의 다항함수를 빨리 그릴 수 있어야 한다. (방법은 아래와 같다.)

x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [1단계] – 시작 방향 정하기

① 홀수차 함수

ex 일차함수, 삼차함수, …

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

Tip 일차함수를 생각하면 된다.

② 짝수차 함수

ex 이차함수, 사차함수, …

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

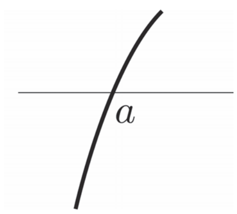
(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

Tip 이차함수를 생각하면 된다.

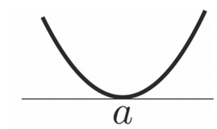
x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [2단계] – x 절편 이용하기

$f(x)$가 $(x-a)^n$을 인수로 가질 때, n에 따라 case분류할 수 있다.

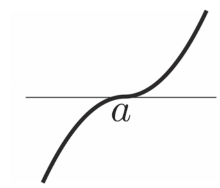
① $n=1 \Rightarrow (x-a)$



② $n=2 \Rightarrow (x-a)^2$ ($n \geq 2$인 짝수)



③ $n=3 \Rightarrow (x-a)^3$ ($n \geq 3$인 홀수)



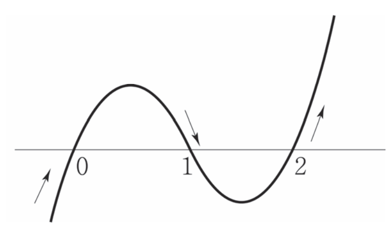
Tip ②은 스치는 접선형태(스접)를 갖고, ③은 뚫는 접선형태(뚫접)를 갖는다.
쉽게 말해서 ②은 $y=x^2$ 같은 느낌이고, ③은 $y=x^3$ 같은 느낌이다.

x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [3단계] – 실전연습

ex1 $y=x(x-1)(x-2)$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

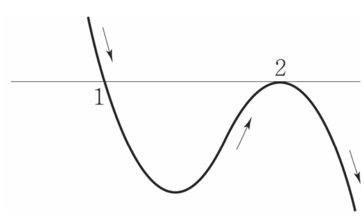
② x 절편이 0, 1, 2이고 x, $(x-1)$, $(x-2)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1, 2를 통과해서 그려주면 된다.



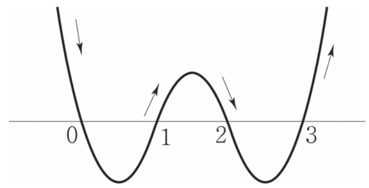
ex2 $y=-(x-1)(x-2)^2$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x 절편이 1, 2이고 $(x-1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=1$를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



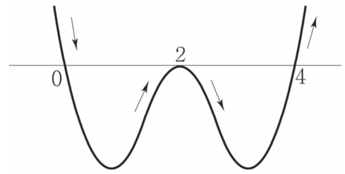
ex3 $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$



① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x 절편이 $0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x,\ (x-1),\ (x-2),\ (x-3)$ 을 인수로 가지므로
$x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 을 통과해서 그려주면 된다.

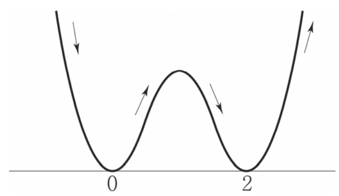
ex4 $y=x(x-2)^2(x-4)$



① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x 절편이 $0,\ 2,\ 4$ 이고 $x,\ (x-2)^2,\ (x-4)$ 를 인수로 가지므로
$x=0,\ 4$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.

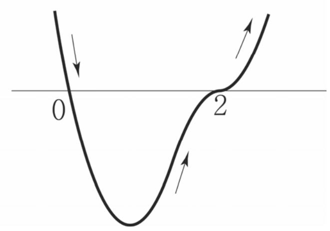
ex5 $y=x^2(x-2)^2$



① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x 절편이 $0,\ 2$ 이고 $x^2,\ (x-2)^2$ 를 인수로 가지므로
$x=0,\ 2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.

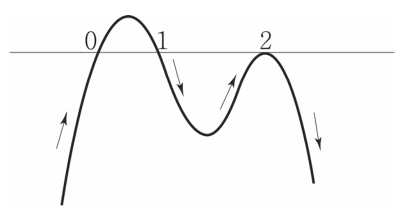
ex6 $y=x(x-2)^3$



① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x 절편이 $0,\ 2$ 이고 $x,\ (x-2)^3$ 를 인수로 가지므로
$x=0$ 을 통과하고 $x=2$ 에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.

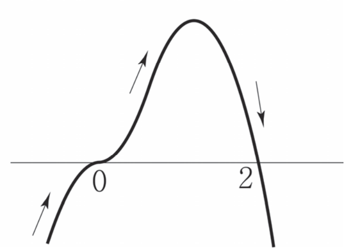
ex7 $y=-x(x-1)(x-2)^2$



① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

② x 절편이 $0,\ 1,\ 2$ 이고 $x,\ (x-1),\ (x-2)^2$ 를 인수로 가지므로
$x=0,\ 1$ 을 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.

ex8 $y=-x^3(x-2)$



① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

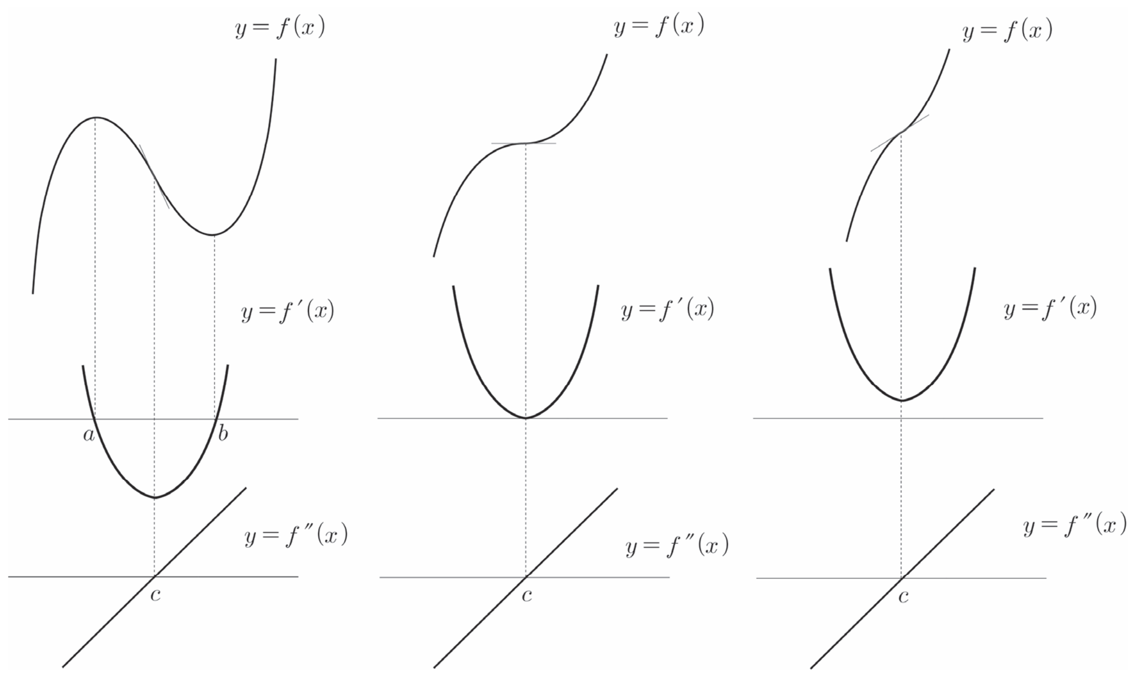
② x 절편이 $0,\ 2$ 이고 $x^3,\ (x-2)$ 를 인수로 가지므로
$x=2$ 를 통과하고 $x=0$ 에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.

개념 파악하기 (13) 삼차함수의 그래프는 어떠한 특징을 가지고 있을까?

삼차함수의 그래프의 개형

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수에 따라 case분류할 수 있다.

① ② ③



Tip 1 위의 세 유형은 머릿속에 완벽히 각인 시켜야한다. 삼차함수 개형은 몇 가지? 3가지!

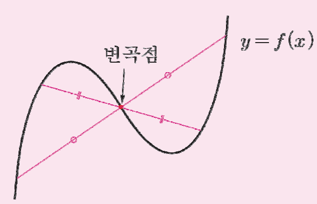
Tip 2 ①에서 $(c,\ f(c))$가 $y=f(x)$의 변곡점이다. $y=f''(x)$를 그리지 않고도 $y=f(x)$의 변곡점을 찾을 수 있다. $x=c$에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 $x=c$에서 $f'(x)$는 극값을 갖는다.
즉, $f'(x)$가 극값을 갖는 점의 x값이 $y=f(x)$의 변곡점의 x값이 된다.

Tip 3 (1) 증가함수 (2) 감소함수 (최고차항의 계수가 음수일 때) (3) 일대일 대응
(4) 역함수 존재 (5) 극값 존재 X
$\Rightarrow$ ②, ③ 개형
$\Rightarrow$ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 해로 갖는다. (판별식 $D \le 0$)

Tip 4 ③에서 $y=f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 c이므로 $(c,\ f(c))$은 $y=f(x)$의 변곡점이다.

Tip 5 삼차함수를 두 번 미분하면 일차함수이므로 $f''(x)=Ax+B$는 반드시 x축과 만나고,
x축과 만나는 점을 경계로 부호가 변하므로 모든 삼차함수는 변곡점을 갖는다.

Tip 6 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있다.



극값차 공식

오른쪽 그림과 같이 $f'(x)$ 가 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx = S$ (표현형)

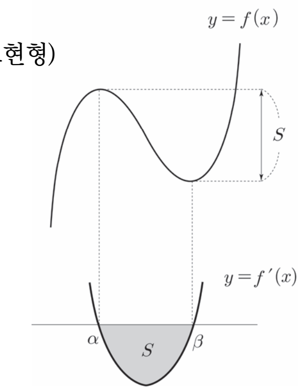
$\int_{\alpha}^{\beta}-f'(x)\,dx = f(\alpha)-f(\beta)$ 이므로 넓이 S 는 극값차이다.

여기서 넓이 S 를 구할 때 우리가 자주 쓰는 적분 공식을 적용시켜보자.

$f'(x)$ 의 최고차항의 계수를 A 라고 하면 $S=\frac{|A|}{6}(\beta-\alpha)^3$

여기서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $3a=A$ 이므로

즉, $S=\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$ 이다. 따라서 극값차 $=\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$ 이다.



Tip 적분을 배우지 않은 학생은 우선 공식만이라도 외워두도록 하자.
계산과정을 현격하게 줄여줄 수 있으니 외우는 것을 추천한다.

ex 삼차함수 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ 가 $x=1$, $x=2$ 에서 극값을 가지고 $f(1)=10$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, $x=2$ 에서 극소이므로

$f(1)-f(2)=\frac{|4|}{2}(2-1)^3 \Rightarrow f(2)=10-2=8$

Tip 물론 $f'(1)=0$, $f'(2)=0$, $f(1)=10$ 을 이용하여 상수 a, b, c 를 찾아서 $f(2)$ 를 구해도 된다.

식세우기 Technique

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 일 때,

① $f(1)=f(2)=f(3)$

$f(1)=f(2)=f(3)=k$ 라 두면 $f(1)-k=0$, $f(2)-k=0$, $f(3)-k=0$
$f(x)-k=g(x)$ 라 하면 $g(1)=0$, $g(2)=0$, $g(3)=0$ 을 만족하므로
$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.
$-k$ 는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이다.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-k=(x-1)(x-2)(x-3)$ 이다.

② $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

$f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$, $f(3)-3=0$
$f(x)-x=g(x)$ 라 하면 $g(1)=0$, $g(2)=0$, $g(3)=0$ 을 만족하므로
$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.
$-x$ 는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이다.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$ 이다.

Theme 2

접선의 방정식 – 곡선 위의 점이 주어질 때

007

곡선 $y=x^3-6x+5$ 위의 점 $(-1,\ 10)$에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, $m+3n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

008

곡선 $y=-2x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선이 점 $(-5,\ b)$를 지날 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

009

곡선 $y=x^3-3x^2+2$ 위의 두 점 $(-1,\ -2)$, $(1,\ 0)$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 교점은 $(a,\ b)$이다. $3a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

010

함수 $f(x)=x^3-ax^2+4x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ f(0))$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{17}$일 때, 점 Q의 y좌표를 구하시오. (단, a는 양의 상수이다.)

011

곡선 $y=x^3-2x^2+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

012

곡선 $y=-2x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $4ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

013

곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{7}$일 때, $b-2a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

014

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-3}{x^2-4}=-4$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 방정식은 $y=mx+n$이다. $m+2n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

미분

209 2022학년도 고3 6월 평가원 공통

두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

210 2018학년도 수능 나형

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

211 2018년 고3 10월 교육청 나형

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x(x-2)(x-a)$ (단, a는 실수)
(나) 방정식 $|f(x)|=f(0)$은 실근을 갖지 않는다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $a=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $0<a<2$이고 $f(a)>0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

212 2025학년도 수능 공통

상수 $a\,(a\neq3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x\leq0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) x에 대한 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

257 2024학년도 수능 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$f(k-1)f(k+1)<0$$
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

[4점]

259

양의 상수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)$를

$$g(x)=|x-3a|f(x)$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0$
>
> (나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 합을 $h(t)$라 할 때, $\sum_{n=1}^{5}h(2n-6)=18a$이다. $g(4a)$의 값을 구하시오.

258

실수 t에 대하여 방정식 $|x^3-tx-6|=2x^2-2$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to a+}f(t)+\lim_{t\to a-}f(t)<\{f(a)\}^2$$

를 만족시키는 실수 a의 최솟값을 m이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12}f(k-m-3)$의 값을 구하시오.

260

함수 $f(x)=-x^2(|x|-4)^2+8$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=-f(x)+2|f(x)|$$

이다. 함수 $g(x)$와 자연수 k에 대하여 실수 전체의 부분집합인 S_k는

$$S_k=\{|x|\mid g(x)=k-1\}$$

이다. $\sum_{k=1}^{30}n(S_k)$의 값을 구하시오.

미분

264

두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2ax+b}{x-1} & (x>1)\\ a(x^3-3x) & (x\le 1)\end{cases}$$

이다. 실수 전체의 부분집합인 S를

$$S=\{x\mid f(f(x))=f(x)\}$$

라 할 때, $-1\in S$ 이고 $n(S)=7$ 이다.

$27f(f(a+b))$ 의 값을 구하시오.

265

정수 k와 상수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^3-12x+a & (x\ge 0)\\ \left|\dfrac{kx-36}{x}\right| & (x<0)\end{cases}$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
> (나) 방정식 $f(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (다) 방정식 $f(-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

모든 k의 값의 합을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

155 □□□□□

사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)+f(-1)|$ 는 $x=m$, $x=n$ 에서만 극솟값을 갖는다.
> (나) $f(0)=5$

$f(x)$ 에 대하여 집합 A 와 B 는

$$A=\left\{a \mid \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0\right\}$$

$$B=\left\{-a \mid \int_{1}^{a} f'(x)\,dx=0\right\}$$

이다. $A=B$ 를 만족시키는 모든 $f(x)$ 에 대하여 서로 다른 모든 $f(2)$ 의 값의 합을 구하시오.
(단, $m\neq n$ 이다.)

156 2025학년도 고3 6월 평가원 공통 □□□□□

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 $k(k\geq 0)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x\leq k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x 에 대하여
> $\int_{0}^{x} g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt\geq 0$ 이고
> $\int_{3}^{x} g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt\geq 0$
> 이다.

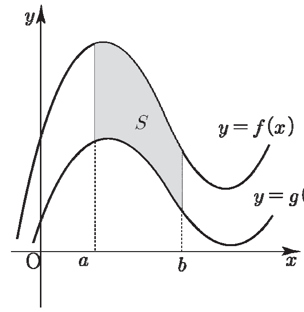
$g(k+1)$ 의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$　② $5-\sqrt{6}$　③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$　⑤ $8-\sqrt{6}$

개념 파악하기 (3) 두 곡선 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

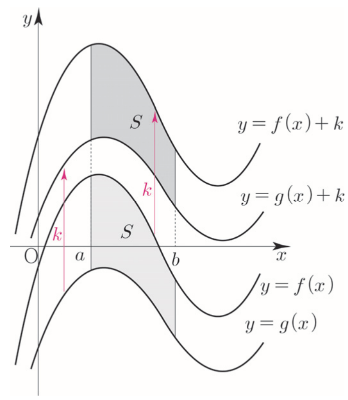
두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해보자.



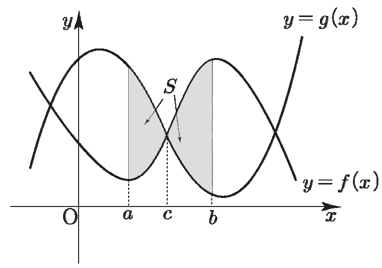
① 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$일 때,

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



② 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x)$이고 $g(x)$의 값이 음수인 경우가 있을 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 $f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$이 되도록 할 수 있다.
이때 평행이동한 도형의 넓이는 변하지 않으므로

$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



③ 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x) \leq g(x)$이고, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x) \geq g(x)$일 때,

$$\begin{aligned} S&=\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx \\ &=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx \\ &=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \end{aligned}$$

두 곡선 사이의 넓이 요약

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

Tip 1 닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 대소가 바뀔 때는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **표현형**이다.
즉, 보자마자 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야 한다.
실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인
① $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$, ② $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$, ③ $\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$는
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **계산형**이다.

예제 3

두 곡선 $y=x^2-x$, $y=-x^2+3x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

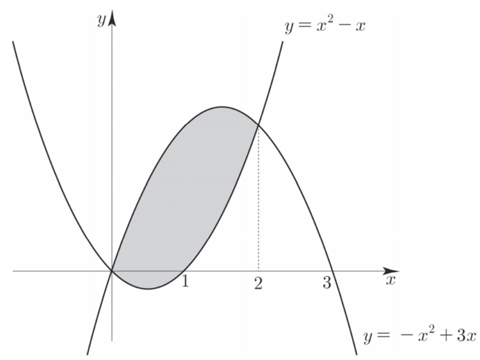
$x^2-x=-x^2+3x \Rightarrow 2x^2-4x=2x(x-2)=0$

두 곡선의 교점의 x좌표는 $x=0$, $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-x \le -x^2+3x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2\{(-x^2+3x)-(x^2-x)\}dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$



Tip 위에 있는 그래프에서 아래에 있는 그래프를 뺀 후 적분한다.

개념 확인문제 3 곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

예제 4

곡선 $y=x^2+2x$와 세 직선 $y=x$, $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

$x^2+2x=x \Rightarrow x^2+x=x(x+1)=0$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x=-1$, $x=0$

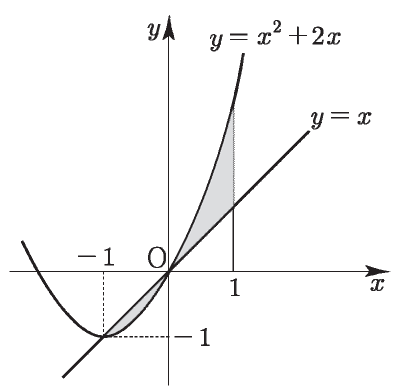
닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^2+2x \le x$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$x^2+2x \ge x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0\{x-(x^2+2x)\}dx+\int_0^1\{(x^2+2x)-x\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(-x^2-x)dx+\int_0^1(x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

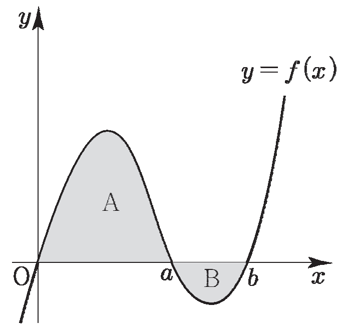


개념 확인문제 4 두 곡선 $y=-x^2$, $y=x^2-2x$와 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

개념 파악하기 **(4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?**

두 곡선 사이의 넓이의 활용

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0,\ x=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A 라 하고 x 축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자.



① A 의 표현형은 $\int_0^a |f(x)|dx$ 이고 계산형은 $\int_0^a f(x)dx$ 이다.

B 의 표현형은 $\int_a^b |f(x)|dx$ 이고 계산형은 $\int_a^b \{-f(x)\}dx$ 이다.

Tip 여기서 $\int_a^b f(x)dx=-\text{B}$ 인 것을 쉽게 알 수 있다.

즉, $f(x)\le 0$ 일 때(x 축 아래에 있을 때) 정적분을 하면 넓이에 마이너스가 붙는다.

② $\int_0^b f(x)dx=\text{A}-\text{B}$

$$\int_0^b f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx=\int_0^a f(x)dx-\int_a^b \{-f(x)\}dx=\text{A}-\text{B}$$

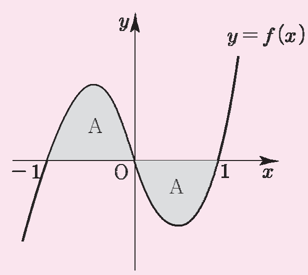
Tip 위와 같이 식으로 접근할 수도 있지만 자연스럽게 곡선 $y=f(x)$ 가 $a\le x\le b$ 에서 x 축 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx=-\text{B}$ (넓이에 마이너스)이니 A 에서 B 를 빼면 $\int_0^b f(x)dx=\text{A}-\text{B}$ 가 된다. 라는 사고과정으로 접근하는 것을 추천한다.

즉, A 에서 B 만큼의 넓이가 상쇄된다고 생각하면 된다.

③ A 가 B 보다 크니 $\int_0^b f(x)dx>0$ 이다.

Tip 부정적분과 정적분 단원에서 $f(x)=x^3-x$ 라 할 때, $f(x)=x^3-x$ 가 기함수이므로 식 계산에 의해 $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$ 임을 보였다.

이와 달리 위에서 배운 개념을 바탕으로 넓이로 접근해보자.

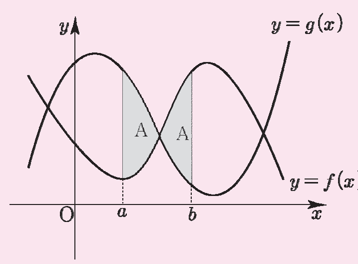


곡선 $y=f(x)$ 는 기함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx=\text{A}$ 라 하면

$\int_0^1 f(x)dx=-\text{A}$ 이므로 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\text{A}-\text{A}=0$ 이라고 볼 수도 있다. 즉, A에서 A만큼의 넓이가 상쇄되니 0 이 된다.

이와 마찬가지로 만약 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 으로 이루어진 두 부분의 넓이가 서로 같을 때,

$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\text{A}-\text{A}=0$ 이다.



함수의 극한 | Training – 2 step

54	④	69	③
55	30	70	④
56	①	71	③
57	①	72	10
58	④	73	④
59	④	74	③
60	①	75	④
61	⑤	76	①
62	21	77	③
63	③	78	②
64	②	79	③
65	④	80	②
66	④	81	226
67	13	82	④
68	10	83	⑤

054

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$$

$\lim_{x\to1}(x^3-1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to1}(x^2+ax-b)=0$

$\Rightarrow 1+a-b=0 \Rightarrow b=1+a$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-1-a}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x^2+x+1}=\frac{2+a}{3}=3 \Rightarrow a=7$$

$a=7$ 이므로 $b=8$ 이다.

따라서 $a+b=15$ 이다.

답 ④

로피탈 정리로도 풀어보자.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x+a}{3x^2}=\frac{2+a}{3}=3$$

$\Rightarrow a=7$

055

$$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)\lim_{x\to1}f(x)=2\lim_{x\to1}f(x)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}(2x^2+1)\lim_{x\to1}f(x)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$a=\frac{3}{2}$ 이므로

따라서 $20a=30$ 이다.

답 30

056

$f(x)=x^2+ax$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+a}{1}=a=4$$

답 ①

057

$\lim_{x\to0+}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-}f(x)=2$ 이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)-\lim_{x\to1-}f(x)=0-2=-2$

답 ①

058

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+}f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)=2-1=1$

답 ④

059

$\lim_{x\to-1-}f(x)=3,\ \lim_{x\to2}f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)=3+1=4$

답 ④

Tip

$f(x)$ 가 3차 이상일 때는 로피탈이 압도적으로 간단하다.
물론 미분계수의 정의로도 풀 수 있지만
추후에 미분계수 파트에서 설명하겠다.

069

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to-1}(x+1)=0 \Rightarrow \lim_{x\to-1}(x^3+ax^2+bx+c)=0$$

$$\Rightarrow -1+a-b+c=0$$

$c=1-a+b$를 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+bx+1-a+b}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\{x^2+(a-1)x+1-a+b\}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+(a-1)x+1-a+b}{1}$$

$$=1-a+1+1-a+b$$

$$=3-2a+b=2 \Rightarrow b=2a-1$$

$b=2a-1,\ c=a$이므로
$f(x)=x^3+ax^2+(2a-1)x+a$
$f(1)=1+a+2a-1+a=4a$

$f(1)\le 12$이므로 $4a\le 12 \Rightarrow a\le 3$이다.

$f(2)=8+4a+4a-2+a=9a+6$이고 $a\le 3$이므로
$f(2)$의 최댓값은 33이다.

답 ③

로피탈 정리로도 풀어보자.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+bx+1-a+b}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2ax+b}{1}=3-2a+b=2$$

$$\Rightarrow b=2a-1$$

Tip

문자가 3개인 방정식은 식이 3개여야 풀 수 있다.
다만 식이 2개면 한 문자로 다른 문자들을
나타낼 수 있다는 사실을 반드시 기억하고 있어야 한다.

ex $-1+a-b+c=0$, $b=2a-1$
문제에서 주어진 식은 2개이고 문자가 3개
이므로 b와 c를 a로 나타낼 수 있다.

어느 정도 레벨에 도달하면 아래와 같은
사고과정을 느낄 수 있게 된다.

① 식이 두 개고 문자가 3개니까
a로 나머지 문자들을 표현할 수 있겠군
② $f(1)\le 12$로 a의 범위를 알 수 있겠군
③ a의 범위를 아니까 $f(2)$의 최댓값을
구할 수 있겠군

이는 사실 문제를 만들 때,
출제자가 느끼는 사고과정과 유사하다.

① $f(x)$를 그냥 주면 너무 쉬우니까 교과개념을
사용해서 직접 구하게 만들어야겠다.
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$
② $f(2)$의 최댓값을 구하게 하고 싶군. 그렇게 하려면
범위가 필요한데?
③ $f(1)\le 12$ 너로 정했다!

070

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

만약 $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{f(a)}{f(a)}=1$$ 이므로

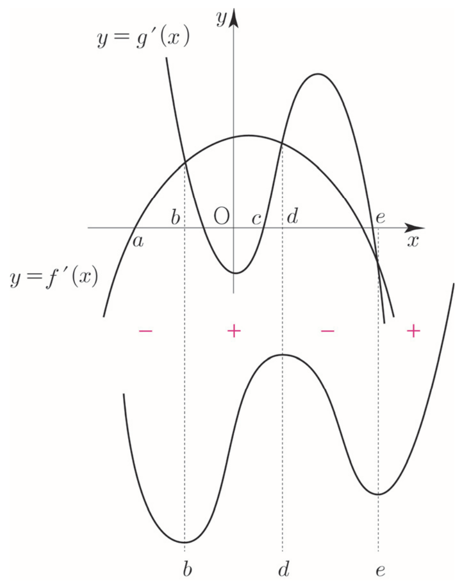
$\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고
$f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 둘 수 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-1}{x-b+1}=\frac{a-b-1}{a-b+1}=\frac{3}{5}$$

$h(x)$ 의 증가 감소는 $h'(x)$ 가 양수인지 음수인지에 따라 결정된다.
$h'(x)$ 의 부호에 따라 $h(x)$ 를 그리면



따라서 $h(x)$ 는 $x=d$ 에서 극대이다.

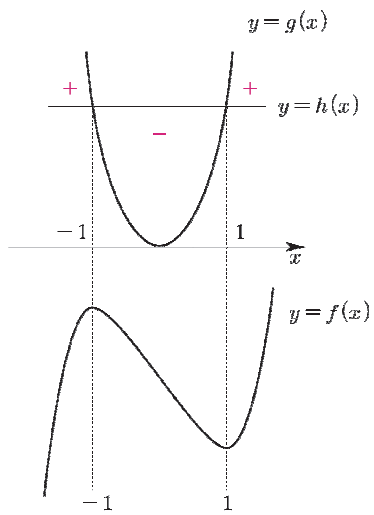
답 d

Tip

만약 $f(x)-g(x)$ 라고만 나와있어도
New 함수 Technique을 사용하여
$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 두면 된다.

<빼기함수 Technique>

$f'(x)=x^2-1$ 라 했을 때,
$f'(x)$ 를 그려서 부호를 판단할 수도 있지만
$g(x)=x^2$ 라 하고 $h(x)=1$ 이라 하고
빼기함수 Technique을 적용시켜 $f(x)$ 를 그릴 수 있다.



$f'(x)$ 가 복잡해지면 빼기함수 Technique을 사용하는 것이 훨씬 유리하다.

Q. $f'(x)=x^2+x$ 이면 빼기함수 Technique을 적용시킬 수 있을까?

$f'(x)=x^2+x=x^2-(-x)$
$g(x)=x^2$, $h(x)=-x$ 라 하면
빼기함수 Technique을 적용시킬 수 있다.
$f'(x)=g(x)-h(x)$

078

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$, $a<-2$
$g(x)=|(x-a)f(x)|$ 가 $x=-2$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $x=a$ 에서 미분가능해야 한다.

$g(a)=0$ 이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

$$\Rightarrow -|f(a)|=|f(a)| \Rightarrow f(a)=0$$

$f(x)=(x-a)(x-b)$ 라 하면
함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-b)|$ 가
$x=-2$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $b=-2$ 이다.
즉, $g(x)=|(x-a)^2(x+2)|$

$h(x)=(x-a)^2(x+2)$ 라 하면 $a<-2$ 이고 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 4 이므로 함수 $h(x)$ 의 극솟값은 -4 이다.

$h'(x)=2(x-a)(x+2)+(x-a)^2=(x-a)(3x+4-a)$

함수 $h(x)$ 는 $x=\dfrac{a-4}{3}$ 에서 극소이다.

최고차항의 계수가 1 이고, $f(0)=0$ 이므로
$f(x)=x^3+bx^2+cx$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2bx+c$

$f(-1)=1,\ f'(-1)=3$ 이므로
$-1+b-c=1 \Rightarrow b-c=2$

$3-2b+c=3 \Rightarrow c=2b$

$\therefore\ b=-2,\ c=-4$

즉, $f(x)=x^3-2x^2-4x$
따라서 $f(1)=1-2-4=-5$ 이다.

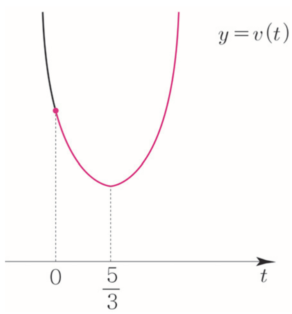
답 ⑤

148

$x(t)=t^3-5t^2+at+5$
$v(t)=3t^2-10t+a$

점 P 가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면
$t \geq 0$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 변하지 않아야 한다.

$v'(t)=6t-10$ 이므로 $v(t)$ 는 $t=\frac{5}{3}$ 에서 극소이다.



$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $v(t) \geq 0$ 가 성립하려면
$v\left(\frac{5}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow -\frac{25}{3}+a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{25}{3}$ 이므로
조건을 만족시키는 자연수 a 의 최솟값은 9 이다.

답 ①

Tip

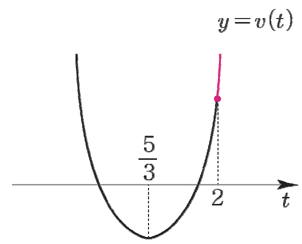
<범위가 있을 때, 판별식 유의사항>

아마 판별식 $D \leq 0$ 이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
이 문제에는 범위가 $t \geq 0$ 이기 때문에
$t=\frac{5}{3}$ 를 포함하므로 판별식 $D \leq 0$ 을 써도 맞지만
만약 범위가 $t \geq 2$ 라면 판별식을 쓸 수 없다.

도대체 왜 그럴까?

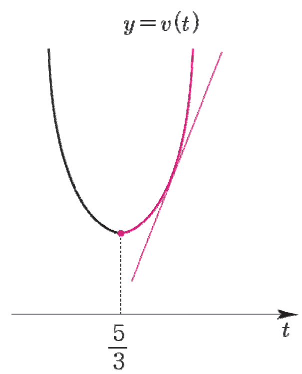
판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고
가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.
즉, 위 문제에서 판별식 $D \leq 0$ 을 써도 괜찮은 이유는
$t \geq 0$ 인 경우 정의역이 실수 전체일 때와 마찬가지로
$v(t) \geq 0$ 가 성립하려면 t 축에 접하거나 위로 붕 떠야 하기
때문이다.

예를 들어 범위를 $t \geq 2$ 라 해보자.



위와 같은 그림일 때, 판별식을 쓰면 방정식 $v(t)=0$
이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만
실제로는 정의역이 $t \geq 2$ 이므로 실근을 갖지 않는다.

위에서 배운 내용을 적용시켜 보자.
만약 $v(t)$ 의 정의역이 $t \geq \frac{5}{3}$ 이고 기울기가 1 인
직선 $f(t)$ 와 접한다고 했을 때,
방정식 $v(t)=f(t) \Rightarrow v(t)-f(t)=0$ 에서
판별식을 쓸 수 있을까?



정답은 “쓸 수 있다” 이다. $t \geq \frac{5}{3}$ 이지만 정의역이
실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

<요약>

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.
2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.

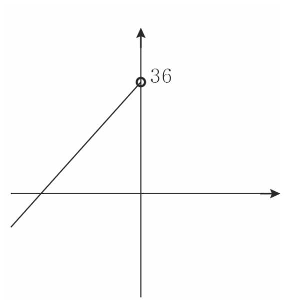
Q3. $\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$
이면 $x=a$에서 미분이 가능할까?

답은 “아니다”이다.
예를 들어 우미분계수가 2이고 좌미분계수가 3이면
위 조건을 만족시키지만 $x=a$에서 미분가능하지 않을 수 있다.

224

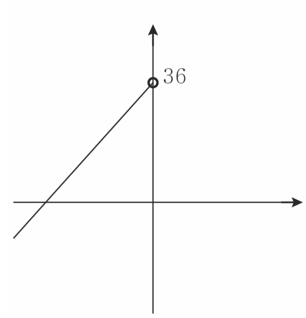
(가) $\frac{b}{h(b)-36}=\frac{a}{h(a)-36}$ 무엇을 의미할까?
역수를 취해보자.

$\frac{h(b)-36}{b}=\frac{h(a)-36}{a}$ 이므로 $\frac{h(b)-36}{b-0}=\frac{h(a)-36}{a-0}$
$(b,\ h(b))$ 와 $(0,\ 36)$ 의 기울기 = $(a,\ h(a))$ 와 $(0,\ 36)$ 의 기울기를 의미한다.



a와 b가 음수라고 했으니까 $h(x)$ 는 $g(x)$ 이다.
$(0,\ 36)$ 에서 $g(x)$ 위에 있는 점과 기울기가 모두 같으려면
$g(x)$ 가 $(0,\ 36)$ 을 지나는 일차함수가 되어야 한다.
(만약에 $g(x)$ 가 상수함수가 되면 분모가 0이기 때문에
될 수 없다. 또한 $g'(0)=3$ 라는 조건도 만족시킬 수 없다.)

$g(x)$

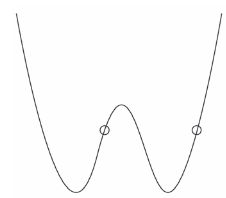


$g'(0)=3$ 이고 $(0,\ 36)$ 을 지나므로 $g(x)=3x+36$

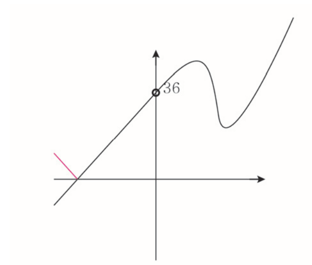
문제에서 실수 전체에서 미분가능한 $h(x)$ 라고 했기 때문에
$f(0)=g(0)$
$f'(0)=g'(0)=3$
이 두 조건을 만족해야 한다.

그래프 개형을 case 분류하기 전에 $f(x)$ 의 최고차항의
계수가 없으니까 최고차항 계수가 음수가 될 수 있다는 것도
잊지 말자.

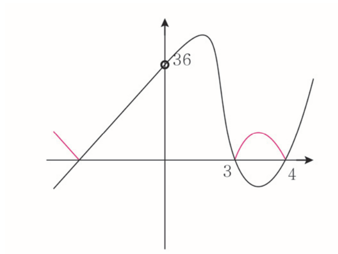
① $f'(0)=3$이므로 기울기가 양수인 부분과 이어져야 한다.
case ① 은 동그라미 친 두 군데로 나눠서 생각하면 된다.



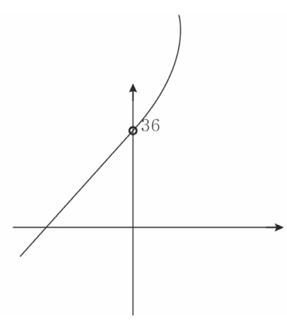
① i) (나) 조건 X



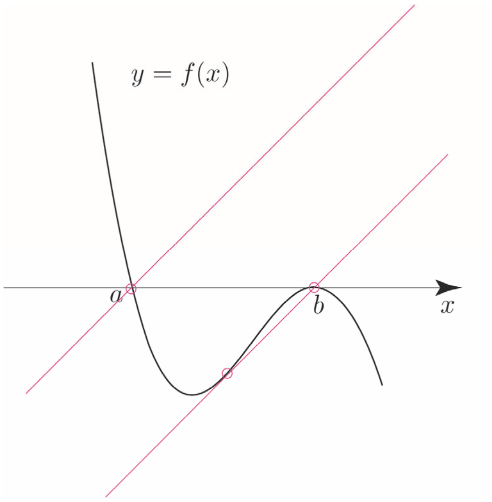
① ii) (나) 조건은 만족하지만 $f'(3)=f(3)$ 만족 X



① iii) (나) 조건 X

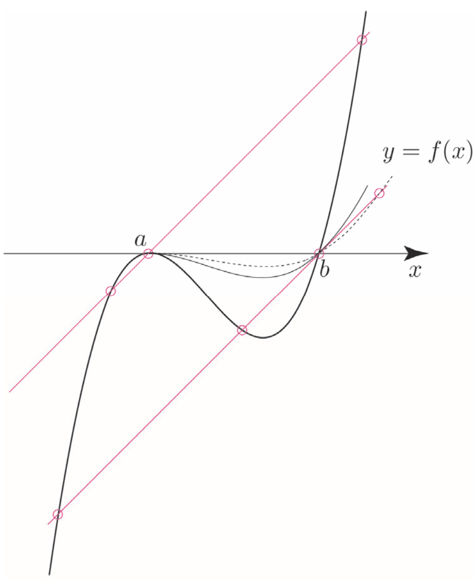


② $f(x)=k(x-a)(x-b)^2 \quad (k<0)$



위 그림과 같은 경우 (나) 조건을 만족시키지만
$f(1)=4$, $f'(1)=1$ 을 만족시키지 않는다.

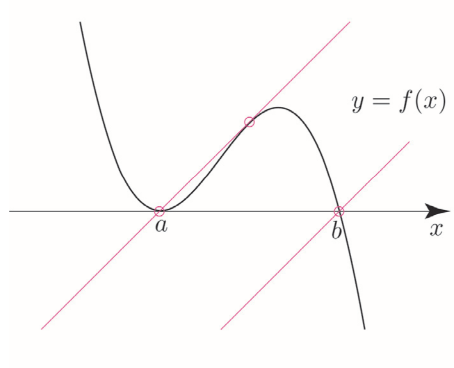
③ $f(x)=k(x-a)^2(x-b) \quad (k>0)$



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x-a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3 이고, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x-b$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2 또는 3 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

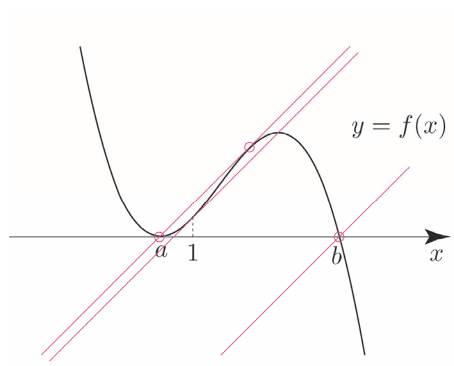
(참고로 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $f'(b)<1$ 이더라도 $x>b$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x-b$ 가 한 점에서 만난다.)

④ $f(x)=k(x-a)^2(x-b) \quad (k<0)$



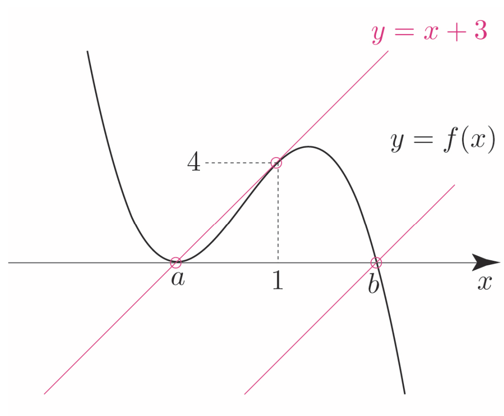
위 그림과 같은 경우 (나) 조건을 만족시킨다.
$f(1)=4$, $f'(1)=1$ 를 만족시켜야 하므로
$x=1$ 의 위치에 따라 case분류하면 다음과 같다.

④ - i)



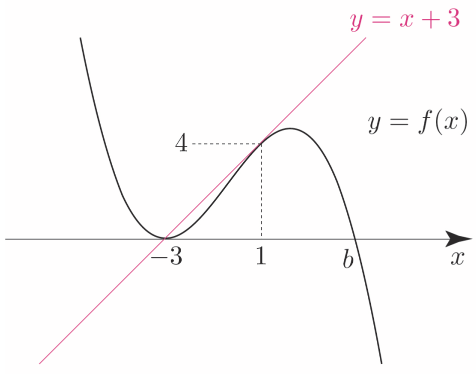
$f'(0)>1$ 을 만족시키지 않는다.

④ - ii)



$f'(0)>1$ 을 만족시킬 수 있다.

점 $f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식은
$y=x+3$ 이므로 $a=-3$ 이다.



식세우기 Technique에 의해서

$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$

$\Rightarrow f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+2k(x+3)(x-1)+1$

곡선 $y=f(x)$는 x축과 $x=-3$에서 접하므로

$f'(-3)=0 \Rightarrow 16k+1=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\frac{3}{16}+3=\frac{45}{16}$이다.

따라서 $p+q=61$이다.

답 61

245

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$

$|f(x)|=J(x)$라 하자.

미분계수와 도함수 training - 1step 049번 해설에서

배웠던 우미분계수와 좌미분계수로 쪼개서 보는 관점으로

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$을 해석해보자.

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{J(x+h)-J(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{J(x-h)-J(x)}{-h}$$

$=J(x)$의 우미분계수 $+J(x)$의 좌미분계수

$=|f(x)|$의 우미분계수$+|f(x)|$의 좌미분계수

($t=-h$라 하면 $h\to0+\Rightarrow t\to0-$이므로

$\lim_{h\to0+}\frac{J(x-h)-J(x)}{-h}=\lim_{t\to0-}\frac{J(x+t)-J(x)}{t}$)

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속

함수 $f(x-3)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

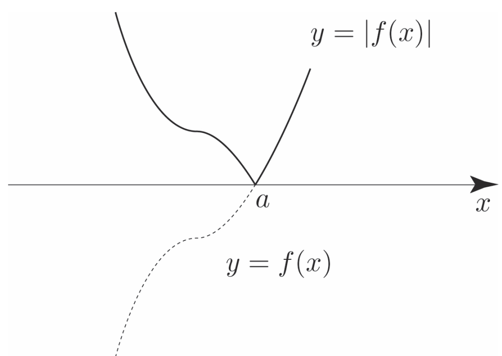
($|f(x)|$의 우미분계수$+|f(x)|$의 좌미분계수)가

불연속인 점을 조사하면 된다.

감은 잡기 위해서 $f(x)$가 아래 그림과 같을 때,

($|f(x)|$의 우미분계수$+|f(x)|$의 좌미분계수)

을 분석해보자.



함수 $|f(x)|$가 미분가능한 점에서는 우미분계수와

좌미분계수가 서로 같으므로 자연스럽게 연결되지만

$x=a$와 같이 첨점이 생겨 미분가능하지 않으면

우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 다르고 절댓값이

같으므로 우미분계수와 좌미분계수의 합은 0이 된다.

이처럼 미분가능하지 않은 점에서는

($|f(x)|$의 우미분계수$+|f(x)|$의 좌미분계수)의

값이 0으로 갑자기 튈 수 있어 불연속점이 생길 수 있다.

즉, 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점을 조사하면 된다.

위에서 예로 든 함수의 경우 $x=a$에서

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$가 불연속이므로

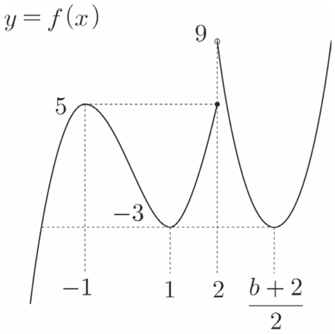
(가) 조건을 만족시키려면 $f(a-3)=0$이어야 하는데

$f(a)=0 \Rightarrow f(a-3)<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

함수 $f(x)$가 다음 그림과 같아야 한다.

iii) $f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim\limits_{t\to k-}g(k)$, $\lim\limits_{t\to k+}g(k)$를 구하면

	$g(k)$	$\lim\limits_{t\to k-}g(k)$	$\lim\limits_{t\to k+}g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

$g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(t)+\lim\limits_{t\to k+}g(t)=9$를 만족시키는 실수 k의 값은 오직 $k=-3$뿐이므로 조건을 만족시킨다.

$b>2$, $f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$이므로

$$f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3 \Rightarrow a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)+9=-3$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{b-2}{2}\right)\left(\frac{-b+2}{2}\right)=-12 \Rightarrow a(b-2)^2=48$$

a는 자연수이고, b는 2보다 큰 자연수이므로 $a(b-2)^2=48$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

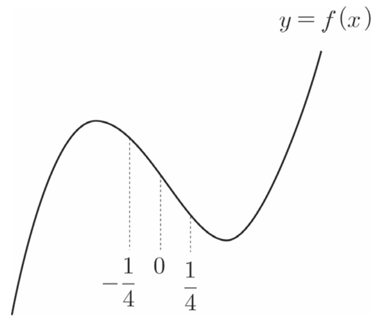
답 ①

257

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$

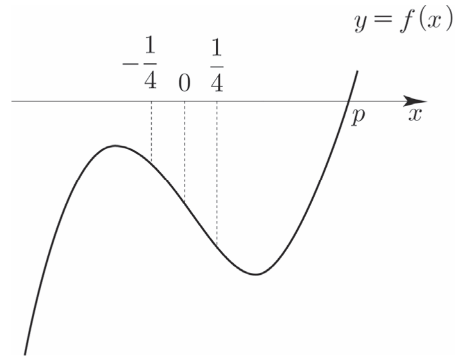
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$이고 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 양수이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 근으로 가진다.
즉, $f(x)$는 극대, 극소를 모두 가지는 개형이다.

또한 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로 $f'(0)<0$이다.
이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키는 정수 k가 존재하지 않는다고 했으니 함숫값의 부호가 중요하므로 x축의 위치에 따라 case분류하면서 감을 찾아보자.
(이때 k와 관계없이 $k-1$과 $k+1$의 차이가 항상 2인 것에 집중하여 판단해보자.)

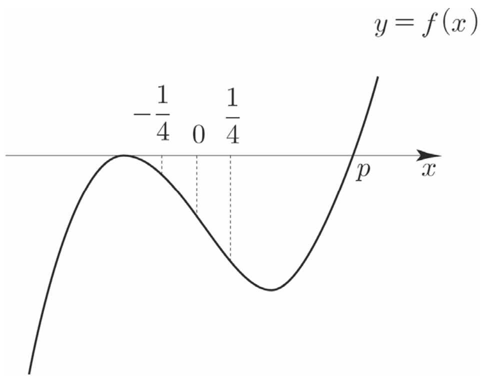
① 방정식 $f(x)=0$이 하나의 실근을 갖는 경우
이때 $f(x)=0$의 실근을 $p(p>0)$라 하자.



$0<p\leq 1$이면 $k=1$일 때, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.
$1<p<3$이면 $k=2$일 때, $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.
$p\geq 3$이면 $k-1<p<k+1$인 정수 k가 반드시 존재하고 $f(k-1)f(k+1)<0$를 만족시키므로 모순이다.

$p<0$일 때도 $p>0$와 구조가 같으므로 모순이다.

② 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우
이때 $f(x)=0$ 의 중근이 아닌 실근을 $p\,(p>0)$ 라 하자.

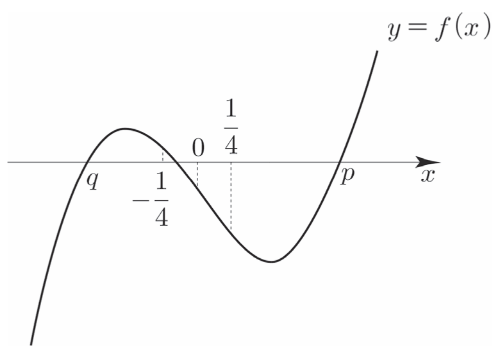


①과 같은 논리로 $f(k-1)f(k+1)<0$ 를 만족시키는
정수 k 가 존재하므로 모순이다.

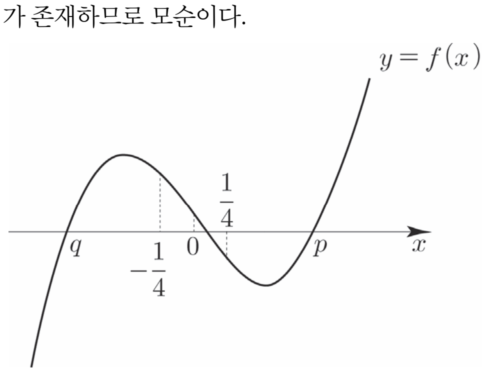
$p<0$ 일 때도 $p>0$ 와 구조가 같으므로 모순이다.

③ 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우
이때 $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근 중 가장 작은 실근을 q, 가장 큰 실근을 p 라 하자.

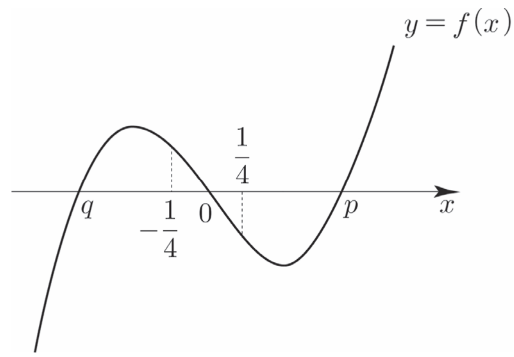
만약 $f(0)<0$ 라 하면 ①과 같은 논리로
$k-1<p<k+1$ 이고, $f(k-1)f(k+1)<0$ 를 만족시키는
정수 k 가 존재하므로 모순이다.



만약 $f(0)>0$ 라 하면 ①과 같은 논리로
$k-1<q<k+1$ 이고, $f(k-1)f(k+1)<0$ 를 만족시키는
정수 k 가 존재하므로 모순이다.



즉, $f(0)=0$ 이어야 한다.



$p>1$ 이면 $k-1<p<k+1$ 이고, $f(k-1)f(k+1)<0$ 를
만족시키는 정수 k 가 반드시 존재하므로 모순이다.

$q<-1$ 이면 $k-1<q<k+1$ 이고, $f(k-1)f(k+1)<0$ 를
만족시키는 정수 k 가 반드시 존재하므로 모순이다.

즉, $0<p\le 1$, $-1\le q<0$ 이어야 한다.

$f(k-1)f(k+1)<0$ 를 만족시키는 정수 k 가 존재하지
않으려면 아래와 같은 case가 가능하다.
(만약 $0<p<1$, $-1<q<0$ 이면 $k=0$ 일 때,
$f(k-1)f(k+1)<0$ 를 만족시키므로 모순이다.)

i) $q=-1$, $p=1$
$f(x)=x(x+1)(x-1)=x^3-x$
$f'(x)=3x^2-1$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)\neq -\frac{1}{4}$ 이므로 모순이다.

ii) $q=-1$, $0<p<1$
$f(x)=x(x+1)(x-p)=x^3+(1-p)x^2-px$
$f'(x)=3x^2+2(1-p)x-p$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{p}{2}-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow p=-\frac{1}{8}$
$0<p<1$ 를 만족시키지 않으므로 모순이다.

iii) $-1<q<0$, $p=1$
$f(x)=x(x-1)(x-q)=x^3-(q+1)x^2+qx$
$f'(x)=3x^2-2(q+1)x+q$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{11}{16}+\frac{3}{2}q=-\frac{1}{4}$

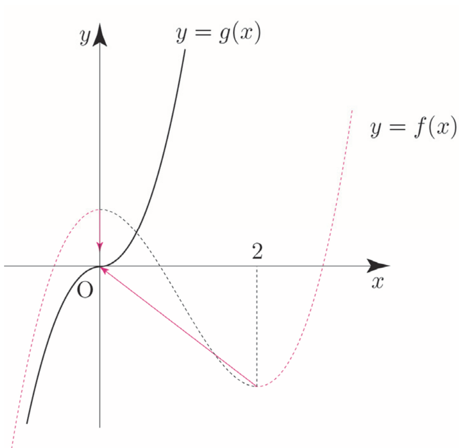
$\Rightarrow -\frac{3}{2}q=\frac{15}{16} \Rightarrow q=-\frac{5}{8}$
$-1<q<0$ 을 만족시킨다.

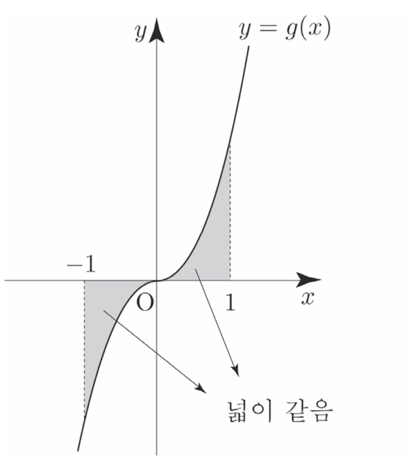
$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{1} g(x)dx$$
$$= -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$
$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2$$
$$= \frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

$p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{1}{2}(3p+2)(p-2) \geq 0$ 이므로

ㄷ은 참이다.

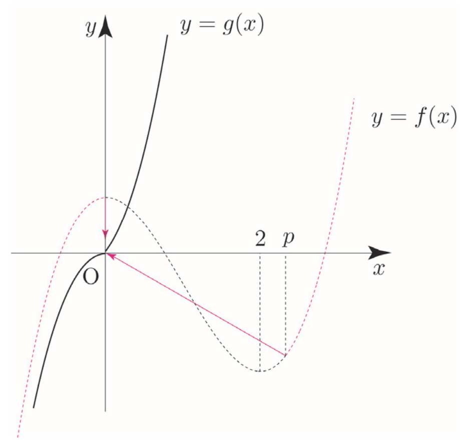
이번에는 그래프적 관점에서 접근해보자.
(정적분을 넓이의 관점에서 접근하는 풀이이므로
정적분의 활용을 배우지 않은 학생의 경우
다음 중단원인 정적분의 활용을 배운 후 보도록 하자.)
$p = 2$ 일 때, 함수 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.

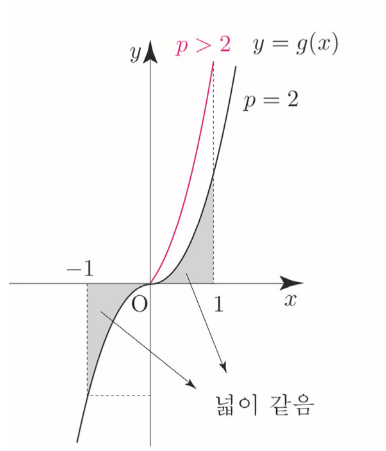




삼차함수의 대칭성에 의해서 $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$ 이다.

$p > 2$ 일 때, 함수 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.





$p > 2$ 일 때 $\int_{-1}^{0} g(x)dx$ 의 값과 $p = 2$ 일 때

$\int_{-1}^{0} g(x)dx$ 의 값은 서로 같고,

$p > 2$ 일 때 $\int_{0}^{1} g(x)dx$ 의 값이 $p = 2$ 일 때

$\int_{0}^{1} g(x)dx$ 의 값보다 크다.

$p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$ 이므로 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

115

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$g(x) = \int_{0}^{x} tf(t)dt$

$g(0) = 0,\ g'(x) = xf(x)$

ㄱ. $g'(0) = 0$
$g'(x) = xf(x)$ 에 $x = 0$ 을 대입하면
$g'(0) = 0$ 이므로 ㄱ은 참이다.