025 □□□□□

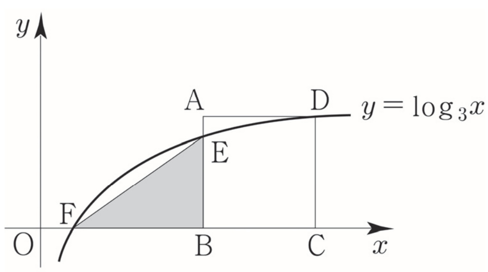
함수 $f(x)=\log_2(ax+b)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 2)$를 지나고 점근선이 직선 $y=-6$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $a\neq 0$이고, a, b는 상수이다.)

026 □□□□□

함수 $y=\log_2(-x)$의 그래프 위의 점 A와 점 B$(4,\ 0)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 C라 하자. 점 C가 y축 위에 있을 때, 점 C의 y좌표를 구하시오.

027 □□□□□

그림과 같이 두 점 B, C가 x축 위에 있고, 점 D가 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이고, 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다.
선분 AB가 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 E라 하고, 함수 $y=\log_3 x$와 x축이 만나는 점을 F라 할 때, 삼각형 BEF의 넓이는 k이다. 3^k의 값을 구하시오.
(단, 점 C의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크다.)



Theme 6 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

028 □□□□□

함수 $y=\log_3(x-2)+3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_3(3x-27)$의 그래프와 일치할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

029 □□□□□

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(3,\ b-2)$, $(7,\ 5)$을 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

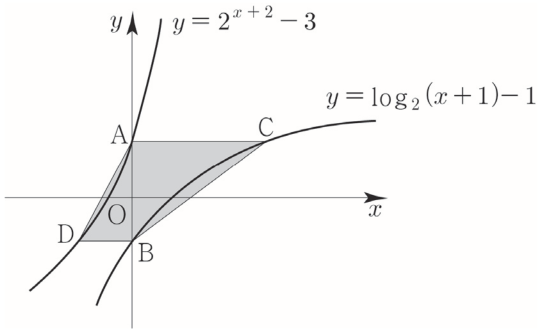
030 □□□□□

함수 $f(x)=\log_5(2a-x)+b$의 그래프의 점근선이 직선 $x=-a^2-1$이고, $f(-7)=5$이다.
$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

Theme 10 지수함수와 로그함수의 그래프

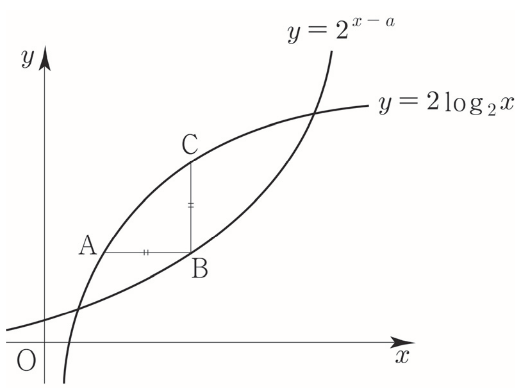
051

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x+2}-3$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x+2}-3$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이를 구하시오.



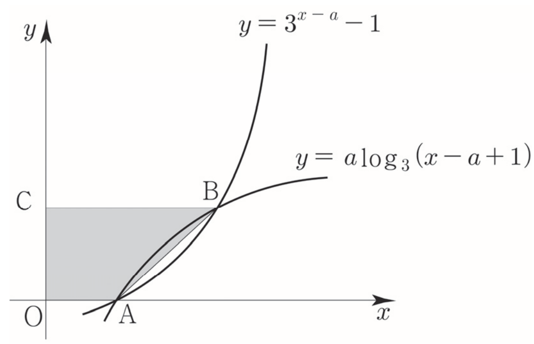
052

그림과 같이 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-a}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2\log_2 x$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}=2$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오.



053

그림과 같이 $a>1$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=3^{x-a}-1$, $y=a\log_3(x-a+1)$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B 중에서 x축 위에 있지 않은 점을 B라 할 때, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 $4a$일 때, 사각형 OABC의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



규토 라이트 N제

지수함수와 로그함수

Training – 2 step

기출 적용편

054 2021학년도 고3 6월 평가원 나형

닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=2^{|x|}$의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

055 2020년 고3 4월 교육청 가형

함수 $f(x)=2^{x+p}+q$의 그래프의 점근선이 직선 $y=-4$이고 $f(0)=0$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 상수이다.) [3점]

056 2021학년도 고3 6월 평가원 가형

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$가 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은?
(단, k는 상수이다.) [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

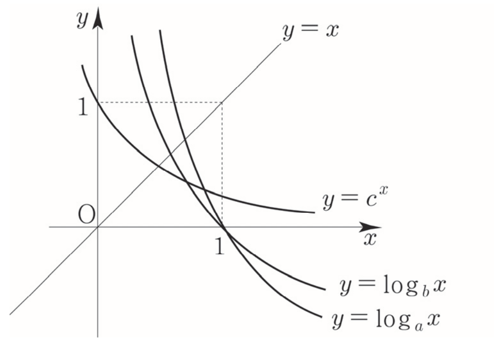
057 2019학년도 수능 가형

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

058 2008학년도 고3 9월 평가원 나형

다음은 1이 아닌 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 세 함수 $y=\log_a x,\ y=\log_b x,\ y=c^x$의 그래프를 나타낸 것이다. 세 양수 $a,\ b,\ c$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]



① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$
④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$

059 2008학년도 수능 나형

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'\ (3,\ g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

060 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제 2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

104 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

105 2025학년도 수능 공통

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x>k$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x))=3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

개념 파악하기 (5) 실전에서 삼각함수의 성질을 어떻게 적용할 수 있을까?

삼각함수의 각바꾸기

이전까지 삼각함수의 성질에 대해 배웠다. 이제 이를 적용하여 실전에서 각을 바꾸는 방법에 대해 알아보자.
실전에서 빠르게 각을 바꾸기 위하여 아래와 같은 규칙들을 기억하도록 하자.

① $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ (n은 짝수) 꼴

1단계) 함수는 바뀌지 않는다.

$$\sin\left(\frac{n}{2}\pi \pm \theta\right) \Rightarrow \sin\theta,\ \cos\left(\frac{n}{2}\pi \pm \theta\right) \Rightarrow \cos\theta,\ \tan\left(\frac{n}{2}\pi \pm \theta\right) \Rightarrow \tan\theta$$

2단계) $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ 가 제 몇 사분면에 위치하는지 파악한다. (단, θ는 무조건 **예각**으로 본다.)

Tip θ가 어떤 각이든지 공식이 성립함을 앞에서 삼각함수의 그래프로 증명하였다.
이와 별개로 암기하기 쉽도록 θ가 모두 양수인 예각으로 간주하여 접근하는 메커니즘을 서술한 것이다.

3단계) 올싸탄코를 사용하여 삼각함수 앞에 부호를 결정해준다.

ex1 $\sin(\pi+\theta)$	**ex2** $\sin(\pi-\theta)$
1단계) $\frac{2}{2}\pi=\pi$이므로 $n=2$은 짝수이다. $\Rightarrow \sin\theta$	1단계) $\frac{2}{2}\pi=\pi$이므로 $n=2$은 짝수이다. $\Rightarrow \sin\theta$
2단계) θ는 예각이므로 $\pi+\theta$는 제 3사분면에 위치한다.	2단계) θ는 예각이므로 $\pi-\theta$는 제 2사분면에 위치한다.
3단계) $\sin$입장에서 $-$ 이므로 $-\sin\theta$ 이다.	3단계) $\sin$입장에서 $+$이므로 $\sin\theta$ 이다.
따라서 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이다.	따라서 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$이다.

② $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ (n은 홀수) 꼴

1단계) 함수가 바뀐다.

$$\sin\left(\frac{n}{2}\pi \pm \theta\right) \Rightarrow \cos\theta,\ \cos\left(\frac{n}{2}\pi \pm \theta\right) \Rightarrow \sin\theta,\ \tan\left(\frac{n}{2}\pi \pm \theta\right) \Rightarrow \frac{1}{\tan\theta}$$

2단계) $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ 가 제 몇 사분면에 위치하는지 파악한다. (단, θ는 무조건 **예각**으로 본다.)

3단계) 올싸탄코를 사용하여 삼각함수 앞에 부호를 결정해준다. (단, **바뀌기 전**의 함수를 기준으로 부호를 결정한다.)

ex1 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$	**ex2** $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$
1단계) $\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$이므로 $n=1$은 홀수이다. $\Rightarrow \sin\theta$	1단계) $\frac{3}{2}\pi$이므로 $n=3$은 홀수이다. $\Rightarrow \sin\theta$
2단계) θ는 예각이므로 $\frac{\pi}{2}+\theta$는 제 2사분면에 위치한다.	2단계) θ는 예각이므로 $\frac{3}{2}\pi+\theta$는 제 4사분면에 위치한다.
3단계) **바뀌기 전** $\cos$입장에서 $-$ 이므로 $-\sin\theta$이다.	3단계) **바뀌기 전** $\cos$입장에서 $+$이므로 $\sin\theta$이다.
따라서 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이다.	따라서 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$이다.

③ $-\theta$ 꼴

사인함수는 기함수, 코사인함수는 우함수, 탄젠트함수는 기함수이므로

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

ex1 $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	ex2 $-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

④ **주기$\times n\pm\theta$꼴** (주기제거법 or 주기추가법)

sin, cos의 주기는 2π, tan의 주기가 π인 것을 고려하면 주기$\times n$을 더하거나 빼도 상관없다.

$\sin(2\pi n\pm\theta)=\sin(\pm\theta)$, $\cos(2\pi n\pm\theta)=\cos(\pm\theta)$, $\tan(\pi n\pm\theta)=\tan(\pm\theta)$

ex1 $\cos(-690^\circ)$ $\cos(-690^\circ)=\cos(360^\circ\times 2-690^\circ)$ $=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	ex2 $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 물론 ① $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ (n은 짝수) 꼴로 처리해도 되지만 주기$\times n$을 빼주는 것이 더 편하다.

⑤ $\alpha+\beta=\pi$이면 $\sin\alpha=\sin\beta$

ex1 $\sin 120^\circ$ $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	ex2 $\sin 210^\circ$ $\sin 210^\circ=\sin(-30^\circ)=-\frac{1}{2}$

$\frac{n}{2}\pi\pm\theta$꼴로 처리해도 되지만 sin의 경우 합이 π이면 똑같다는 사실을 기억하면 더 쉽고 빠르게 구할 수 있다.

cos도 이와 비슷한 규칙이 있지만 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$꼴로 처리하는 것을 추천한다.

삼각함수

04

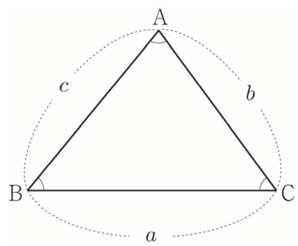
삼각함수

사인법칙과 코사인법칙

성취 기준 – 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

개념 파악하기 (7) 사인법칙이란 무엇일까?

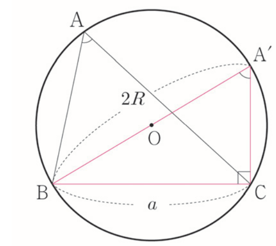
사인법칙



오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 세 내각 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C의 크기를
각각 A, B, C로 나타내고 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 하자.

사인함수를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에 어떤 관계가
있는지 알아보자.

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 할 때, $\angle$A의 크기에 따라 case분류할 수 있다.

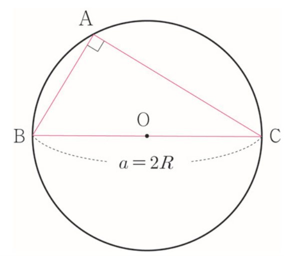


① $A < 90^\circ$ 일 때

점 B를 지나는 지름의 다른 끝점을 A′이라고 하면

$A = A'$이고 $\angle$A′CB $= 90^\circ$ 이므로

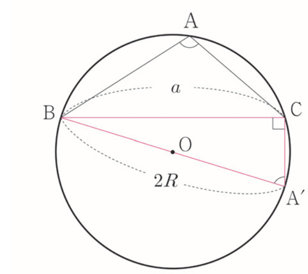
$\sin A = \sin A' = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}} = \dfrac{a}{2R}$



② $A = 90^\circ$ 일 때

$\sin A = 1$, $a = 2R$이므로

$\sin A = 1 = \dfrac{a}{2R}$



③ $A > 90^\circ$ 일 때

점 B를 지나는 지름의 다른 끝점을 A′이라고 하면

사각형 ABA′C에서 $A = 180^\circ - A'$이고 $\angle$A′CB $= 90^\circ$ 이므로

$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A' = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}} = \dfrac{a}{2R}$

따라서 $\angle$A의 크기에 관계없이 $\sin A = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$가 성립한다.

같은 방법으로 $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$도 성립한다.

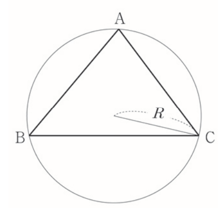
따라서 삼각형 ABC에서 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$이다.

위와 같은 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기에 대한 사인함숫값 사이의 관계를 **사인법칙**이라 한다.

사인법칙 요약

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$



Tip 1 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 뿐만 아니라 $=2R$ 도 꼭 기억하자.

Tip 2 $\angle$A가 직각, 둔각이어도 $\frac{a}{\sin A}=2R$ 가 성립한다.

Tip 3 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ (변의 비는 무슨 비? 사인 비!)

삼각함수

예제 1

삼각형 ABC에서 $b=2$, $A=75^\circ$, $B=45^\circ$ 일 때, c의 값을 구하시오.

풀이

삼각형의 내각의 크기의 합은 180° 이므로 $C=60^\circ$ 이다.

사인법칙에 따라 $\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ} \Rightarrow 2\sqrt{2}\sin 60^\circ=c \Rightarrow c=\sqrt{6}$, 따라서 답은 $\sqrt{6}$ 이다.

개념 확인문제 7 삼각형 ABC에서 $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $c=2\sqrt{2}$ 일 때, a의 값과 외접원의 넓이를 구하시오.

예제 2

삼각형 ABC에서 $\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$ 이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

풀이

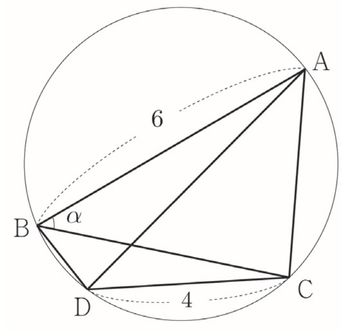
사인법칙에 의해서 $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ 이므로 식에 대입하면

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Rightarrow b^2=a^2+c^2$, 따라서 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

개념 확인문제 8 삼각형 ABC에서 $a\sin^2 B=b\sin^2 A$이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

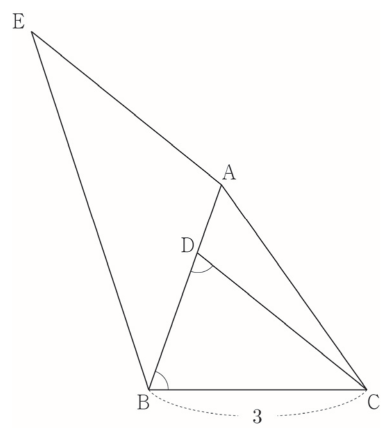
077 2020년 고3 3월 교육청 나형

그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



079

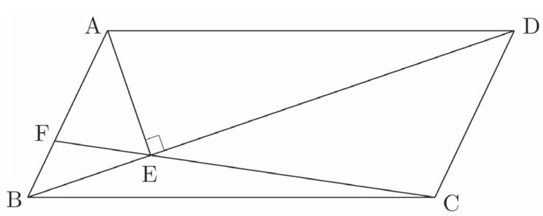
그림과 같이 $\overline{BC}=3$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 D에 대하여 $\angle ABC=\angle BDC$이다. 직선 CD와 평행하고 점 A를 지나는 직선 위의 점 E에 대하여 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABE의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자. $3R_1=2R_2$일 때, $\overline{AE}=\sqrt{a}-b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAE>90°$이고, a와 b는 자연수이다.)



078 2023년 고3 7월 교육청 공통

그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자.

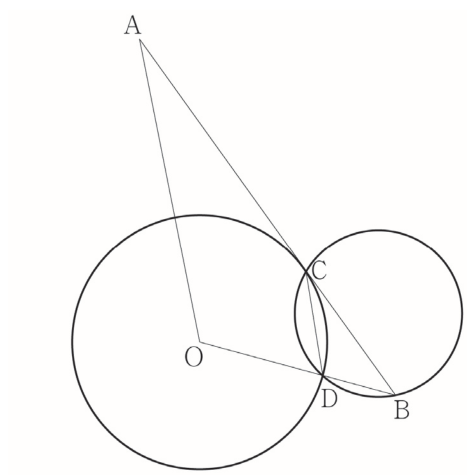
$\cos(\angle AFC)=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$
④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

080

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$이다. 원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 BCD의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오.

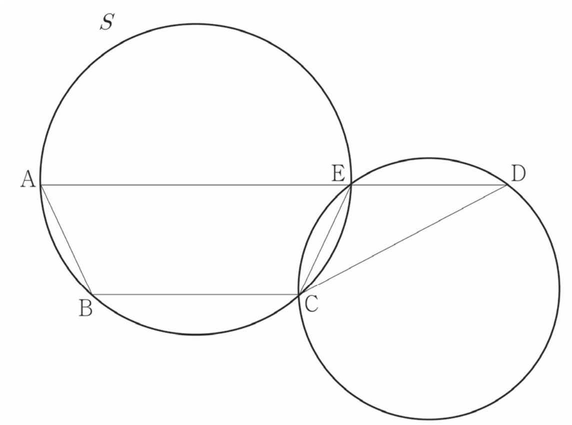


삼각함수

085

그림과 같이 $\overline{AD} // \overline{BC}$ 인 사각형 ABCD가 있다. 세 점 A, B, C을 지나는 원을 S라 할 때, 선분 AD와 원 S가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{BC}=2$, $\overline{AE}=3$, $\overline{CD}=\sqrt{6}$, $\overline{AB}=\overline{ED}$일 때, 삼각형 CDE의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

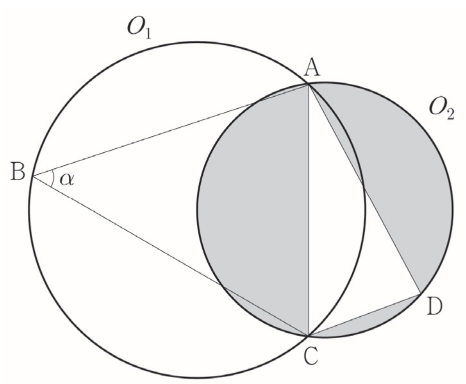


086

그림과 같이 삼각형 ABC, ACD의 외접원을 각각 O_1, O_2라 하고 $\angle ABC=\alpha$라 하고, O_1의 반지름을 R이라 할 때, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$, $R=\frac{2}{\cos\alpha}$, $(\overline{AD})^2+(\overline{CD})^2=22$가 성립한다.

원 O_2가 원 O_1의 중심을 지날 때, 원 O_2의 내부와 삼각형 ACD의 외부의 공통부분의 넓이는 $\frac{a\pi-b\sqrt{5}}{16}$이다.

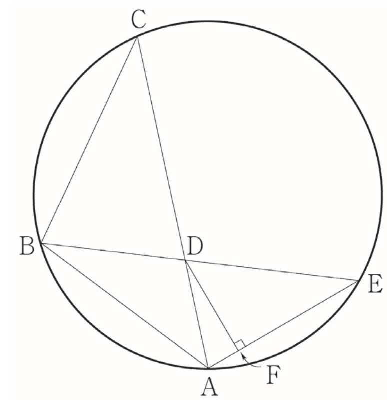
$a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.)



087

$\overline{AB}=6$인 삼각형 ABC에 외접하는 원의 넓이가 25π이고 선분 AC 위의 점 D에 대하여 직선 BD가 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하고, 점 D에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\overline{FE}=4$, $\frac{\sin(\angle CBD)}{\sin(\angle DCB)}=\frac{\sqrt{10}}{2}$일 때, 삼각형 ABE의 넓이는 $\frac{a\sqrt{3}+b}{2}$이다.

$a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.)



삼각함수

$x=1$ 일 때, 최솟값은 $-2^2+5=1$ 이다.

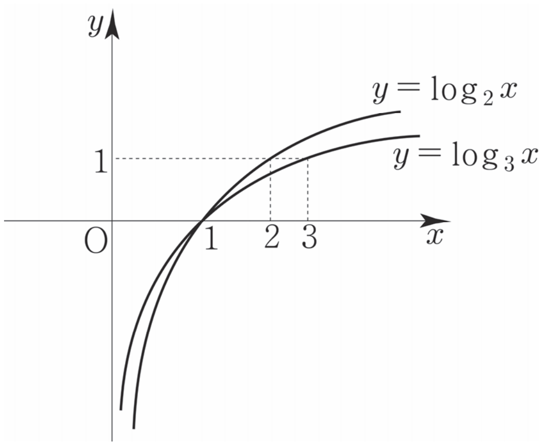
$x=-1$ 일 때, 최댓값은 $-2^0+5=4$ 이다.

답 (1) 최댓값은 7, 최솟값은 3

(2) 최댓값은 4, 최솟값은 1

개념 확인문제 9

(1) $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$

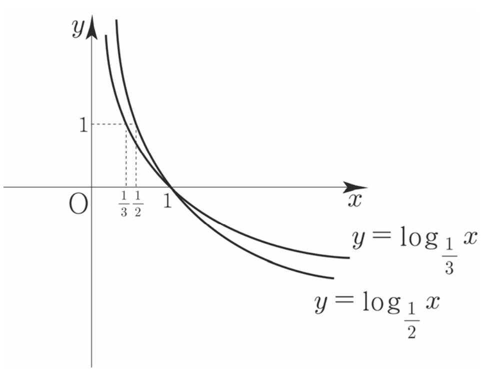


Tip

1 $(1,\ 0)$ 에서 교차됨에 유의하자.

2 한 좌표축 안에 로그함수를 여럿이 그릴 때는
$y=1$ 의 그래프와 만나는 점의 x 좌표를 토대로
누가 위에 있고 아래에 있는지 판단할 수 있다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$



Tip

$(1,\ 0)$ 에서 교차됨에 유의하자.

개념 확인문제 10

(1) $y=\log_3(x+1)-2$

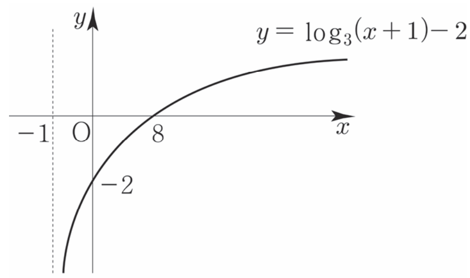
① $y=\log_3 x$ 를 기본함수로 두자.

② x 축의 방향으로 -1 만큼 y 축의 방향으로 -2 만큼
평행이동하면 $y=\log_3(x+1)-2$ 이다.

Tip

1 로그함수를 그릴 때, 점근선부터 찾는 것이 좋다.
진수가 0 이 되도록 하는 x 값을 a 라 했을 때,
$x=a$ 가 점근선의 방정식이 된다.

2 로그함수의 경우 y 축 방향의 평행이동은 전체적인 그래프
개형에 영향을 주지 않으므로 x 축 방향의 평행이동만
고려하면 된다.



점근선 : $x=-1$

(2) $y=-\log_2(-x)$

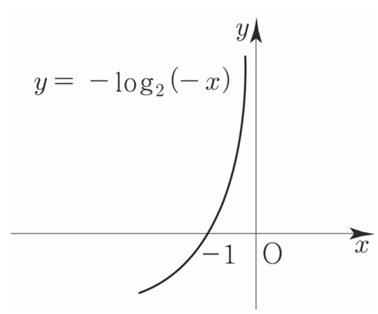
① $y=\log_2 x$ 를 기본함수로 두자.

② $x \to -x$ (y 축에 대하여 대칭)하면
$y=\log_2(-x)$ 이다.

③ $y \to -y$ (x 축에 대하여 대칭)하면
$y=-\log_2(-x)$ 이다.

Tip

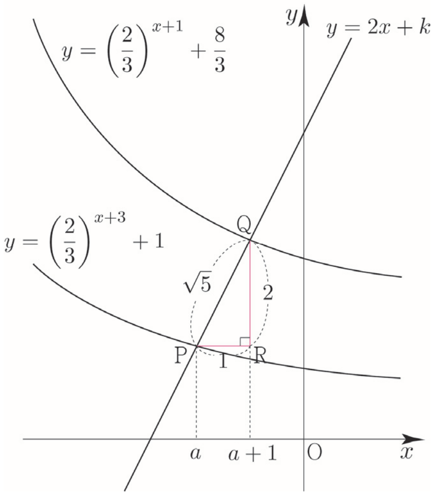
그래프가 익숙해지면 기본함수가
$y=-\log_2(-x)$ 가 되는 날이 온다.
익숙해질 때까지 많이 그려보자.



점근선 : $x=0$

$\overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2$

$\Rightarrow t^2 + 4t^2 = 5 \Rightarrow 5t^2 = 5 \Rightarrow t = 1 \ (\because t > 0)$



점 P의 x좌표를 a라 하면 점 Q의 x좌표는 $a+1$이고,
(점 P의 y좌표) + 2 = (점 Q의 y좌표)이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3} + 1 + 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} + \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{a+3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2} \Rightarrow a = -2$$

직선 $y = 2x + k$가 점 $P\left(-2, \frac{5}{3}\right)$를 지나므로

$-4 + k = \frac{5}{3} \Rightarrow k = \frac{17}{3}$이다.

답 ④

Tip

〈잘못된 사고과정〉
문제를 보자마자 어? 이거 training-1step 043번에서 했었는데! 개꿀~

함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$의 그래프는

함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$의 그래프를 x축의 방향으로

2만큼, y축의 방향으로 $\frac{5}{3}$만큼 평행이동한 것이니

training-1step 043번과 마찬가지로

$\overline{PR} = 2$, $\overline{QR} = \frac{5}{3}$ 아닐까? 라고 판단할 수 있다.

하지만 이는 잘못된 판단이다.
training-1step 043번 해설에서도 명시했듯이

043번에서는 기울기가 맞아 떨어졌기에 가능했지만

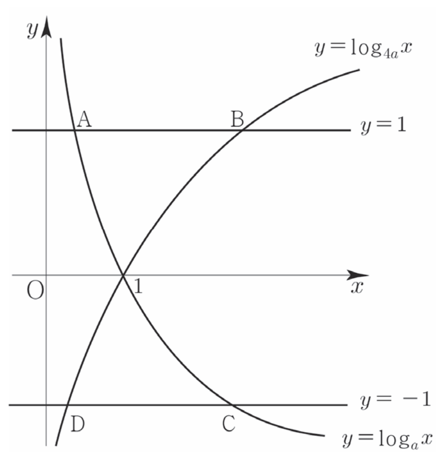
이 문제에서는 $\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{2} = \dfrac{5}{6} \neq 2$ 이므로

기울기가 같지 않아 성립하지 않는다.
초기접근에서 그렇게 생각할 수는 있으나
기울기를 확인해본 뒤 빠져나오는 것이 바람직하다.
만약 빠져나오지 않았다면 반성하도록 하자.
물론 기울기뿐만 아니라 $\overline{PQ} = \sqrt{5}$도 만족시키지 않는다.

102

$\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로 $1 < 4a < 4$

두 곡선 $y = \log_a x$, $y = \log_{4a} x$을 그리면



$A(a,\ 1)$, $B(4a,\ 1)$, $C\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, $D\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$

ㄱ. 선분 AB를 1 : 4로 외분하는 점은

$\frac{4A - B}{4 - 1} = \frac{4A - B}{3}$ 이므로

$\left(\frac{4a - 4a}{3},\ \frac{4 - 1}{3}\right) \Rightarrow (0,\ 1)$

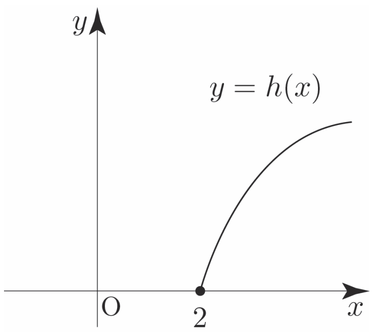
따라서 ㄱ은 참이다.

Tip

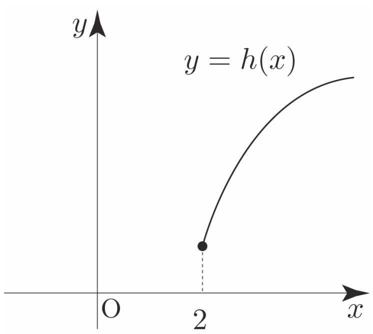
외분점을 구하는 것이 낯설었다면
아래강의를 참고하도록 하자.
내분점과 외분점 강의 (19분)
https://youtu.be/kAYtpoXFh24

$y=5\log_2 x-b$ 에서 $x=2$ 를 대입하면 $5-b$ 이므로
b 와 5 의 대소관계에 따라 case분류하여
$y=h(x)$ $(x \geq 2)$ 를 그리면 다음과 같다.

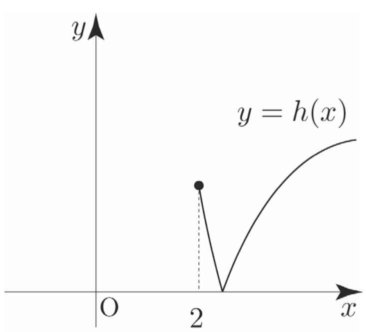
① $b=5$



② $b<5$



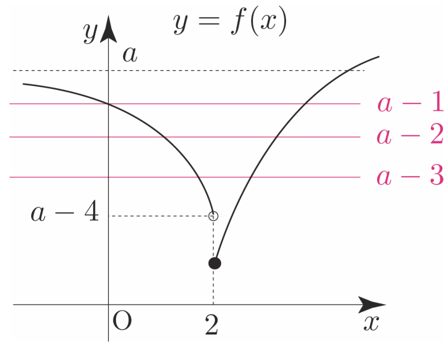
③ $b>5$



이제 $y=f(x)$ 와 $y=h(x)$ 를 동시에 고려해보자.

여기서 주목해야 할 점은 $y=f(x)$ 의 치역 중에서
자연수인 것은 $a-1$, $a-2$, $a-3$ 이렇게 3 개만 가능하다는
점이다.

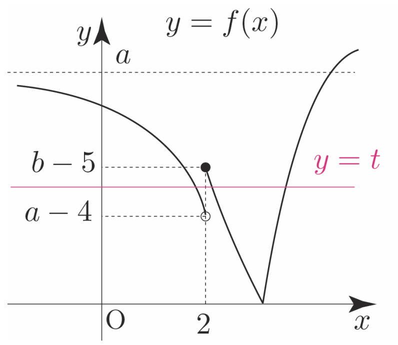
만약 $y=f(x)$ 와 ①, ②인 $y=h(x)$ 를 조합하면
$g(t)=2$ 를 만족시키는 자연수 t 의 개수는 최대 3 이므로
(나) 조건을 만족시킬 수 없다.



즉, $y=f(x)$ 와 ③ $y=h(x)$ 를 조합해야 함을 알 수 있다.

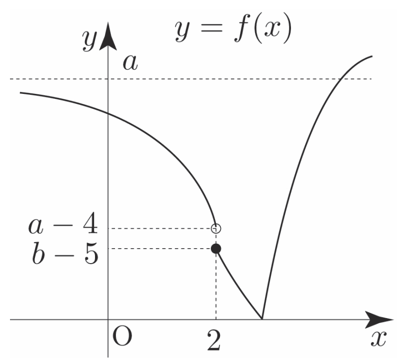
$b-5$ 와 $a-4$ 의 대소 관계에 따라 case분류하면

❶ $b-5>a-4$



$g(t)=3$ 인 t 가 존재하므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

❷ $b-5 \leq a-4$



$g(t)=2$ 인 자연수 t 의 개수가 6 이어야 하므로
$t=a-1$, $a-2$, $a-3$ 을 제외하고 $g(t)=2$ 를
만족시키는 자연수 t 의 개수가 3 개 더 있어야 한다.
즉, $b-5=3 \Rightarrow b=8$
이때 $b-5 \leq a-4 \Rightarrow 7 \leq a$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 $7+8=15$ 이다.

답 15

여기서 주의해야 할 점은 $t>0$에서 주어진 부등식이 성립하면 되기 때문에 $k\le 0$이어도 된다는 사실이다. (여기서 k는 직선 $y=kt$의 기울기를 의미한다.)

접할 때 k를 구하면

$t^2+25=kt \Rightarrow t^2-kt+25=0 \Rightarrow D=k^2-100=0$

$\Rightarrow k=10$

(우리가 구하고 싶은 접할 때 k는 양수이므로 -10이 아니라 10이어야 한다.)

따라서 실수 k의 범위는 $k\le 10$이다.

답 $k\le 10$

Tip

1 이 문제에서 나오는 정점 테크닉은 모의고사에 자주 출제되는 테크닉 중 하나이니 반드시 기억하자. 만약 $y=k(x-2)+1$이라면 k와 관계없이 항상 지나는 정점은 $(2,\ 1)$이 된다.

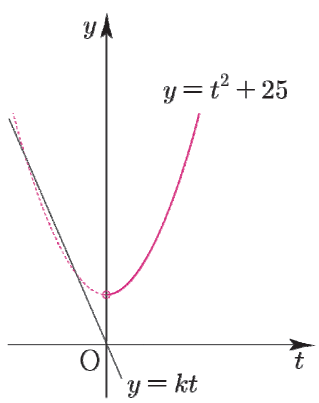
2 질문이 매우 자주 나오는 문제인데 정의역이 양수라는 사실을 절대 놓치면 안 된다. 즉, $t>0$에서만 부등식 $t^2+25\ge kt$을 만족시키면 된다.

3 〈범위가 있을 때, 판별식 유의사항〉

아마 판별식 $D\le 0$이라고 푼 학생이 있을 수 있다. 범위가 $t>0$이므로 판별식을 쓸 수 없다.

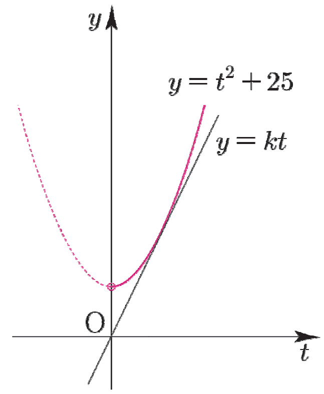
도대체 왜 그럴까?

판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고 가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.



위와 같이 $k<-10$일 때, 판별식을 쓰면 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만 실제로는 정의역이 $t>0$이므로 실근을 갖지 않는다.

$t>0$에서 $y=kt$와 $y=t^2+25$가 접할 때의 k의 값을 구하기 위해서 판별식을 쓸 수 없을까?



정답은 "쓸 수 있다" 이다. $t>0$이지만 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

〈요약〉

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.

2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.

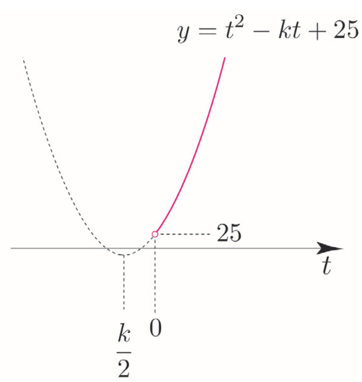
이번에는 다른 방식으로 풀어보자.

$t^2-kt+25\ge 0\ (t>0)$이므로 곡선 $y=t^2-kt+25$와 t축($y=0$)의 위치관계를 이용하여 풀어보자.

이차함수의 대칭축이 $t=\dfrac{k}{2}$이므로

k의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $\dfrac{k}{2}<0 \Rightarrow k<0$일 때



$t>0$에서 곡선 $y=t^2-kt+25$가 t축보다 위에 있으므로 조건을 만족시킨다.

Tip

사실 이 문제에서는 A, B의 좌표를 구하지 않아도 답을 구할 수 있다. 점의 좌표가 중요한 것이 아니라 $\overline{AB}$의 길이가 중요하기 때문이다.
주어진 구간에서 $\overline{AB}$의 최댓값은 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 주기 8π와 같으므로 넓이의 최댓값을 보다 빠르게 구할 수 있다. 혹시나 점 A, B좌표를 구하는데 조금이라도 시간이 걸렸거나 어려웠다면 익숙해지도록 반드시 체화시키자.

085

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수

k의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $k>0$

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+k^2-6$이므로
이 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하려면
최댓값 $k+k^2-6\le 0$이어야 한다.
$(k-2)(k+3)\le 0 \Rightarrow -3\le k\le 2$
전제조건 $k>0$까지 고려하면 $0<k\le 2$이다.

② $k=0$

$y=-6$이므로 제 1사분면을 지나지 않으므로
조건을 만족시킨다.

Tip

Tip : 빼먹기 쉬운 case이므로 각별히 유의해야한다.
$y=ax^2+x+2$는 2차함수인가? 답은 "모른다"이다.

$a\neq 0$이어야 2차함수이지 $a=0$이면 1차함수가 되기 때문이다. 만약 방정식 $ax^2+x+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하기 위해 판별식을 쓸 때에도 $a\neq 0$라는 전제조건을 붙인 후 써야한다.

이는 2010학년도 수능 가형 8번 문제에서 확인할 수 있으니 찾아서 풀어보길 추천한다. 썰을 풀자면 재수생시절 2010학년도 수능 가형을 현장에서 풀 당시 a가 0인지 0이 아닌지 고려했던 기억이 아직까지 생생하다.

③ $k<0$

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $-k+k^2-6$이므로
이 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하려면
최댓값 $-k+k^2-6\le 0$이어야 한다.

$(k+2)(k-3)\le 0 \Rightarrow -2\le k\le 3$
전제조건 $k<0$까지 고려하면 $-2\le k<0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 모든 정수 k의 개수는 5이다.

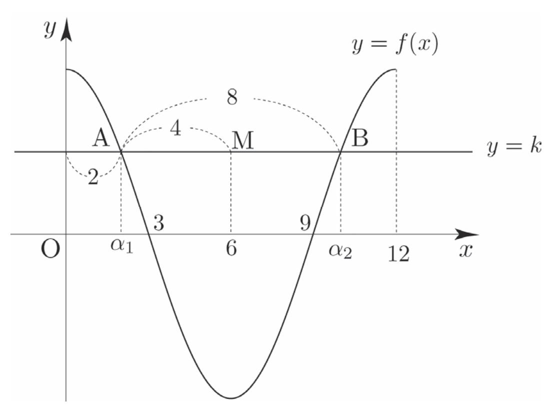
답 5

다르게 풀어보자.

$k\ (k\neq 0)$의 부호를 모두 고려하여 주어진 함수의 최댓값을 구하면 $|k|+k^2-6$이다. 이 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로
$k^2+|k|-6\le 0 \Rightarrow |k|^2+|k|-6\le 0$
$\Rightarrow (|k|+3)(|k|-2)\le 0 \Rightarrow |k|\le 2\ (k\neq 0)$
$k=0$일 때도 성립하므로 $-2\le k\le 2$이다.

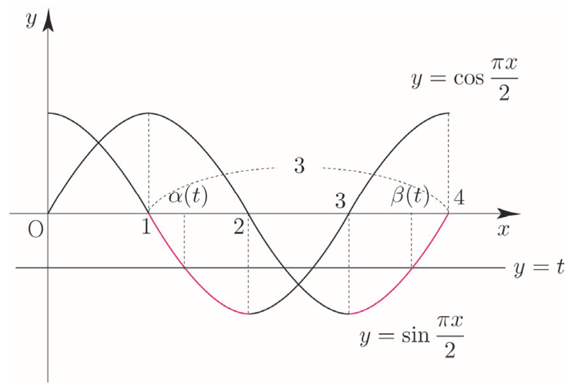
086

$y=f(x)$의 주기는 12
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 두 점 A, B의 중점을 M이라 하자.
두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_2)$라 하자.



$|\alpha_1-\alpha_2|=8$이므로 대칭성에 의해서 $\overline{AM}=4$이고,
점 M의 x좌표가 6이므로 $\alpha_1=6-4=2$이다.
점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(2)=k \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=k \Rightarrow k=\frac{1}{2}$이다.

④ $-1 \le t < 0$ 일 때,



$1 \le \beta(t)-\alpha(t) < 3$

①, ②, ③, ④에 의해서

$\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=3\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

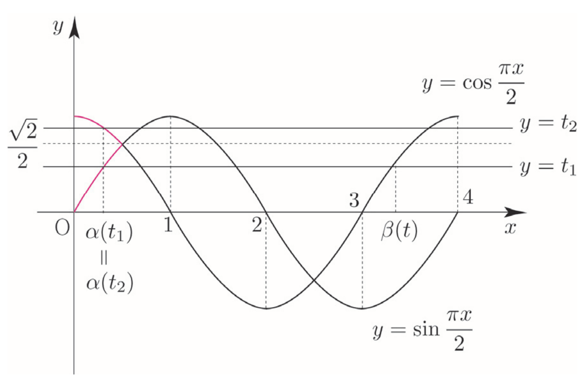
이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ 인 두 실수 t_1, t_2에 대하여

$t_2-t_1=\frac{1}{2}$ 이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$ 이다.

$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ 이려면 $0 < t_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_2$ 이어야 하고

그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\theta$ 라 하면 $t_1=\sin\frac{\pi}{2}\theta$, $t_2=\cos\frac{\pi}{2}\theta$

$(t_2-t_1)^2=t_2^2+t_1^2-2t_1t_2$ 이고,

$t_2^2+t_1^2=\cos^2\frac{\pi}{2}\theta+\sin^2\frac{\pi}{2}\theta=1$ 이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-2t_1t_2 \Rightarrow t_1t_2=\frac{3}{8}$

따라서 ㄷ은 거짓이다.

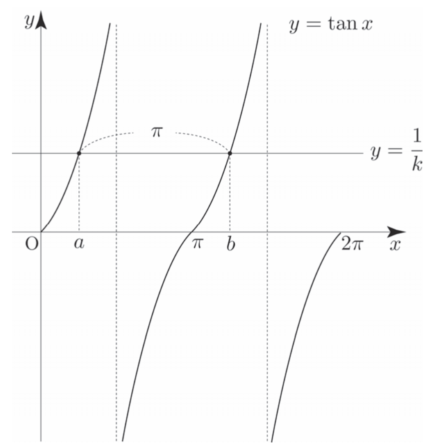
답 ②

108

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b $(a<b)$라 하면

방정식 $f(x)=g(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$의 두 실근은 a, b이다.

$f(x)=g(x) \Rightarrow k\sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=\frac{1}{k}$



즉, 방정식 $\tan x=\frac{1}{k}$ $(0 \le x \le 2\pi)$의 두 실근은 a, b이고

$\tan x$의 주기가 π이므로 $b=a+\pi$이다.

$A(a,\ \cos a),\ B(a+\pi,\ \cos(a+\pi))$

$\Rightarrow A(a,\ \cos a),\ B(a+\pi,\ -\cos a)$

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이 C이므로

$\frac{A-3B}{1-3}=C \Rightarrow \frac{A-3B}{-2}=C$

$C\left(\frac{a-3(a+\pi)}{-2},\ \frac{\cos a-3(-\cos a)}{-2}\right)$

$\Rightarrow C\left(a+\frac{3}{2}\pi,\ -2\cos a\right)$

점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2\cos a=k\sin\left(a+\frac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow -2\cos a=k\times(-\cos a)$

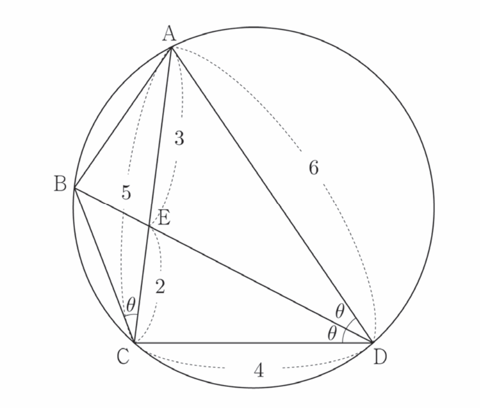
$\Rightarrow k=2$

즉, $\tan a=\frac{1}{2}$

Core 해석법으로 접근해보자.

우선 a가 예각이라고 생각하고 직각삼각형을 그린 후

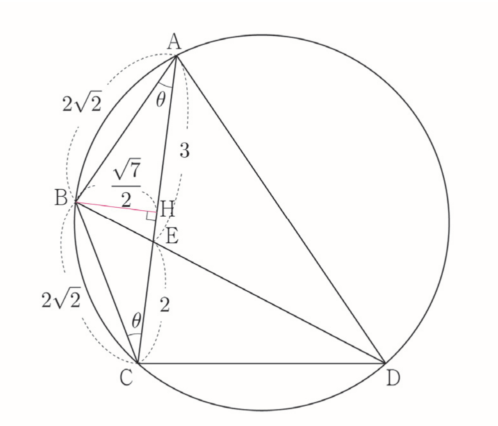
$\tan a=\frac{1}{2}$ 가 되도록 적절히 변의 길이를 설정한다.



이제 삼각형 BCE 의 넓이를 구해보자.
$\overline{BC}=2\sqrt{2}$, $\overline{CE}=2$ 이므로 $\sin\theta$ 의 값만 구하면 된다.

여러 가지 방법이 있지만 삼각형 ABC 가 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 인 이등변삼각형임을 이용하여 구해보자.
점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{BH}=\sqrt{(\overline{BC})^2-(\overline{CH})^2}=\sqrt{8-\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$



$$\sin\theta=\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{8}$$ 이므로

삼각형 BCE 의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CE}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{2}=b$$

따라서 $a\times b=\frac{8}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=4$ 이다.

답 4

사인법칙과 코사인법칙 | Training – 2 step

38	⑤	56	98
39	21	57	①
40	③	58	②
41	10	59	27
42	④	60	③
43	41	61	①
44	①	62	②
45	25	63	84
46	①	64	③
47	②	65	13
48	50	66	③
49	64	67	⑤
50	5	68	①
51	⑤	69	①
52	①	70	②
53	21	71	①
54	⑤	72	⑤
55	①	73	④

038

삼각형 ABC 의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}\times\sin\theta=\sqrt{6}\ \Rightarrow\ \sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\sqrt{1-\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}\quad\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

답 ⑤

039

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R\ \Rightarrow\ \overline{AC}=30\times\frac{7}{10}=21$$

답 21