A. 거듭제곱근

A001
○ (2006(11)고2-가형5/나형5)

거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? (단, $a>0$, $a\neq 1$) [3점]

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{a}$

ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[12]{a}$

ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a^5}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A002
○○ (2009(6)고2-가형8)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt{x}\text{는 실수}\}$$
$$B=\{\sqrt[3]{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은? [3점]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{6}}$
④ 2 ⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

A003
○○ (2024경찰대(1차)-공통5)

두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, a^3-2b의 값은? [4점]

(가) b는 $-\sqrt{8}a$의 제곱근이다.

(나) $\sqrt[3]{a^2}b$는 -16의 세제곱근이다.

① $-2-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ $4-2\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2+2\sqrt{2}$

A004
○○ (2023(7)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A 지수함수와 로그함수

1	③	2	⑤	3	③	4	②	5	⑤
6	4	7	③	8	①	9	③	10	③
11	①	12	⑤	13	④	14	④	15	④
16	①	17	⑤	18	②	19	⑤	20	②
21	17	22	①	23	⑤	24	③	25	②
26	62	27	②	28	②	29	①	30	10
31	④	32	3	33	①	34	②	35	②
36	②	37	②	38	②	39	②	40	⑤
41	①	42	18	43	②	44	①	45	④
46	32	47	15	48	15	49	56	50	⑤
51	64	52	①	53	81	54	16	55	⑤
56	④	57	③	58	②	59	16	60	①
61	①	62	②	63	①	64	③	65	③
66	22	67	④	68	12	69	③	70	④
71	④	72	⑤	73	45	74	46	75	27
76	③	77	18	78	①	79	③	80	③
81	②	82	①	83	⑤	84	②	85	③
86	②	87	③	88	④	89	①	90	35
91	③	92	⑤	93	32	94	①	95	128
96	3	97	③	98	31	99	④	100	②
101	③	102	③	103	25	104	④	105	②
106	③	107	53	108	②	109	⑤	110	④
111	259	112	④	113	144	114	③	115	④
116	③	117	②	118	⑤	119	⑤	120	④
121	②	122	③	123	①	124	④	125	13
126	②	127	③	128	③	129	⑤	130	①
131	6	132	4	133	11	134	②	135	②
136	①	137	②	138	④	139	①	140	③
141	16	142	②	143	④	144	10	145	④
146	5	147	②	148	5	149	16	150	③
151	①	152	④	153	65	154	3	155	128
156	10	157	13	158	17	159	52	160	⑤
161	10	162	①	163	②	164	25	165	19
166	10	167	12	168	17	169	27	170	7
171	16	172	③	173	16	174	②	175	②
176	①	177	②	178	①	179	③	180	②
181	①	182	10	183	④				

A001 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$$

▸ ㄴ. (거짓)

$(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}\neq\sqrt[12]{a}$

예를 들어 $a=8$일 때,

$(\sqrt[3]{a})^4=16\neq\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{a}$

($\because$ 유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A002 | 답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는 $\sqrt{2}$이다.

집합 A는

$A=\{1,\ \sqrt{2}\}$

-2의 세제곱근 중에서 실수는 $-\sqrt[3]{2}$이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는 $\sqrt[3]{2}$이다.

집합 B는

$B=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2}\}$

집합 $A\cup B$는

$A\cup B$

$=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}\}$

이므로 구하는 값은

$$2^{2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$$

답 ⑤

A003 | 답 ③

[풀이]

(가): $b^2 = -\sqrt{8}a$, 즉 $b^4 = 8a^2$

(나): $(\sqrt[3]{a^2}b)^3 = -16$, 즉 $a^2b^3 = -16$

위의 두 등식을 연립하면

$\frac{b^4}{8}b^3 = -16$, $b^7 = -2^7$, $b = -2$, $a = -\sqrt{2}$

∴ $a^3 - 2b = -2\sqrt{2} + 4$

답 ③

A004 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 풀면

$x^n = 8$, $x^{2n} = 8$

n이 홀수: $x = 8^{\frac{1}{n}}$, $x = \pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (○)

모든 실근의 곱은 음수$(-)$이다.

n이 짝수: $x = \pm 8^{\frac{1}{n}}$, $x = \pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (×)

모든 실근의 곱은 양수$(+)$이다.

모든 실근의 곱은 -4이므로

$8^{\frac{1}{n}} \times 8^{\frac{1}{2n}} \times (-8^{\frac{1}{2n}})$

$= -8^{\frac{2}{n}} = -4$, $\frac{6}{n} = 2$, ∴ $n = 3$

답 ②

A005 | 답 ⑤

[풀이]

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것이다.

$a = 3$일 때, x의 값은

$\sqrt[3]{-9}\,(=-\sqrt[3]{9})$, $\sqrt[3]{-3}\,(=-\sqrt[3]{3})$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$

$a = 4$일 때, x의 값은

$\pm\sqrt[4]{3}$, $\pm\sqrt[4]{9}$

▸ ㄱ. (참)

$\sqrt[3]{-9}$는 집합 X의 원소이다.

▸ ㄴ. (참)

집합 X의 원소의 개수는 8이다.

▸ ㄷ. (참)

집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{9}$

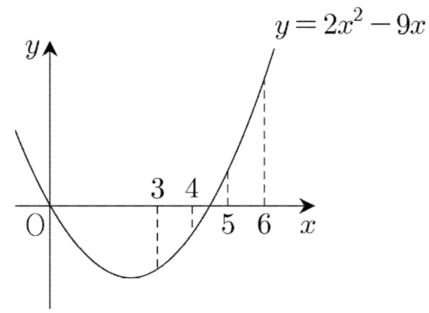
$= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}} = 3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A006 | 답 4

[풀이]



$x = 3$, 4, 5, 6일 때,

함수 $y = 2x^2 - 9x$의 부호가 각각 음$(-)$, 음$(-)$, 양$(+)$, 양$(+)$이므로

$f(3) = 1$, (음수의 3제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(4) = 0$, (음수의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.)

$f(5) = 1$, (양수의 5제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(6) = 2$ (양수의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.)

∴ $f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$

$= 1 + 0 + 1 + 2 = 4$

답 4

A007 | 답 ③

[풀이]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(2n-5)(2n-9) \neq 0$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

- $(2n-5)(2n-9) > 0 \Leftrightarrow n < \frac{5}{2}$ 또는 $n > \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n = 2$, 5, 6, $\cdots$

이므로

$f(2) = 2$, $f(6) = f(8) = 2$, $f(5) = f(7) = 1$

- $(2n-5)(2n-9) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < n < \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n = 3$, 4

이므로

$f(3) = 1$, $f(4) = 0$

∴ $\sum_{n=2}^{8} f(n) = 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$

B061

○○ (2019(3)고3-가형26)

$0\le x\le\pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. a_3+a_5의 값을 구하시오. [4점]

B062

○○ (2020(3)고3-나형7)

$0\le x<2\pi$일 때, 두 곡선 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$와 $y=\sin 4x$가 만나는 점의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

B. 삼각함수와 방정식: 실근의 합

주제: 대칭성

B063

○○ ◇(2017(9)-가형7)

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$2\sin^2 x+3\cos x=3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

B064

○○ ◇(2018-가형7)

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x$$

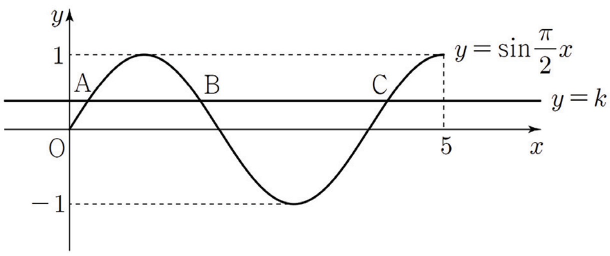
의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

B065

(2022(7)고3-확률과통계10/미적분10/기하10)

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ $(0\le x\le 5)$가 직선 $y=k$ $(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

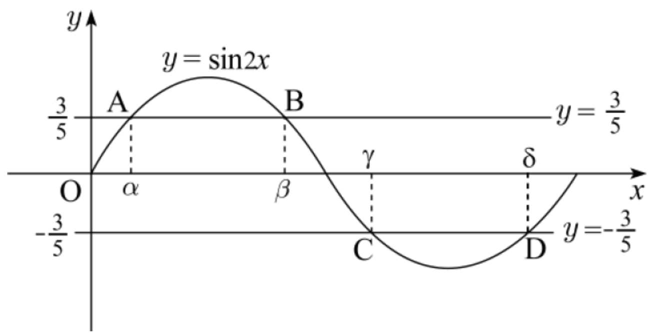


① $\frac{5}{4}$　② $\frac{11}{8}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{13}{8}$　⑤ $\frac{7}{4}$

B066

(2009(3)고2-공통13)

그림과 같이 함수 $y=\sin2x(0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{3}{5}$과 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y=-\frac{3}{5}$과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값은? [4점]



① $\frac{9}{4}\pi$　② $\frac{5}{2}\pi$　③ 3π　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ 4π

B067

(2020(6)고2-공통17)

상수 $k(0<k<1)$에 대하여 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=k$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자.

$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{5}{7}$일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$　② $\frac{\sqrt{26}}{7}$　③ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　④ $\frac{\sqrt{30}}{7}$　⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

B068

(2021사관(1차)-나형10)

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $|\sin2x|=\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은? [3점]

① 4π　② 6π　③ 8π　④ 10π　⑤ 12π

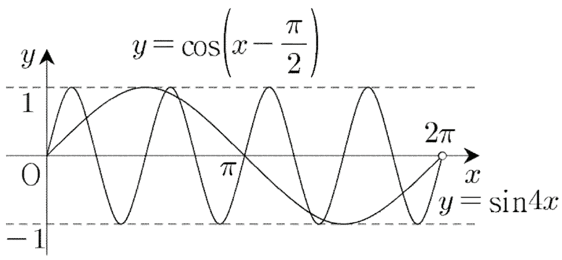
B069

(2022(4)고3-확률과통계11/미적분11/기하11)

자연수 k에 대하여 $0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

$0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx=\frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π　② 6π　③ 7π　④ 8π　⑤ 9π



따라서 문제에서 주어진 두 곡선의 교점의 개수는 8이다.

답 ④

B063 | 답 ④

[풀이]

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 주어진 방정식은

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=3$

정리하면

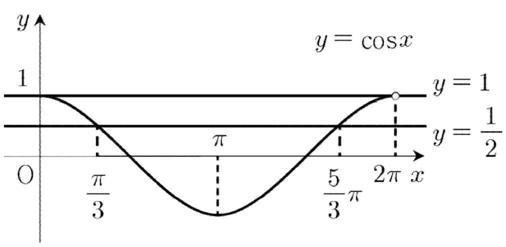
$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

좌변을 인수분해하면

$(2\cos x-1)(\cos x-1)=0$

풀면

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$



$\cos x=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=1$이면 $x=0$

따라서 구하는 값은

$0+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$

답 ④

B064 | 답 ④

[풀이]

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

이므로, 주어진 방정식은

$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\sin x$

정리하면

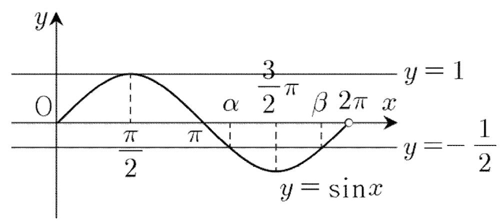
$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

좌변을 인수분해하면

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

풀면

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$



함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $\sin x=-\frac{1}{2}$의 두 실근을 각각 α, β라고 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$ 즉, $\alpha+\beta=3\pi$

방정식 $\sin x=1$을 풀면 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 값은

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=3\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

답 ④

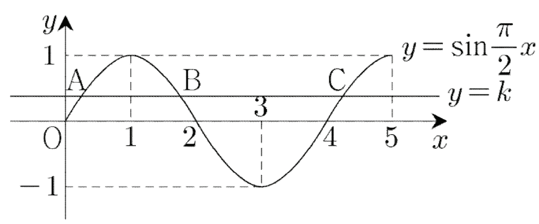
[참고]

α, β의 값은 각각 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이다.

B065 | 답 ③

[풀이]

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 4이고, 이 곡선은 직선 $x=1$, $x=3$, …에 대칭이고, 점 $(2,\ 0)$, $(4,\ 0)$, …에 대칭이다.



점 A의 x좌표를 a라고 하면

점 B의 x좌표는 $2-a$, ($\because x=1$에 대칭)

점 C의 x좌표는 $4+a$이다. ($\because$ 주기가 4)

$a+2-a+4+a=a+6=\frac{25}{4}$, $a=\frac{1}{4}$

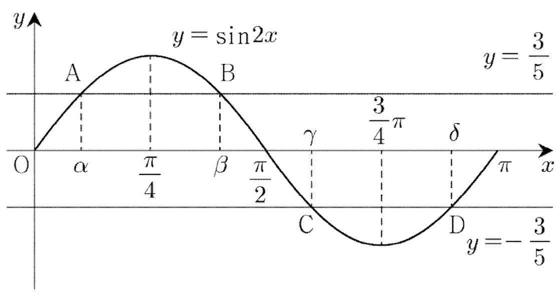
$\therefore\ \overline{AB}=(2-a)-a=2-2a=\frac{3}{2}$

답 ③

B066 | 답 ③

[풀이]

주기가 π인 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ 즉, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$ 즉, $\gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$

함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

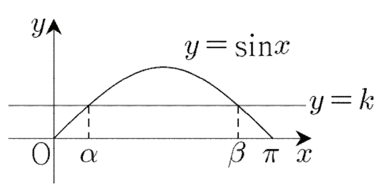
$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\beta+\gamma=\pi$

$\therefore\ \alpha+2\beta+2\gamma+\delta=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+\pi=3\pi$

답 ③

B067 | 답 ①

[풀이]



곡선 $y=\sin x$는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-k^2}=\frac{5}{7}$

$(\because\ \sin\alpha=k)$

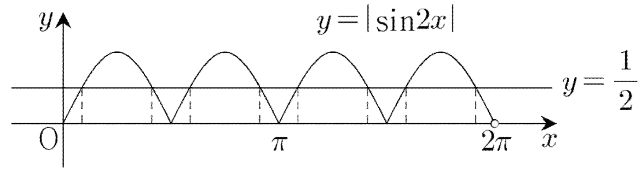
$\therefore\ k=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

답 ①

B068 | 답 ③

[풀이]

함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는



위의 그림에서 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 가장 작은 것부터 크기 순서대로 a_1, a_2, $\cdots$, a_8이라고 하면

$\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_8}{8}=\pi$

즉, $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_8=8\pi$

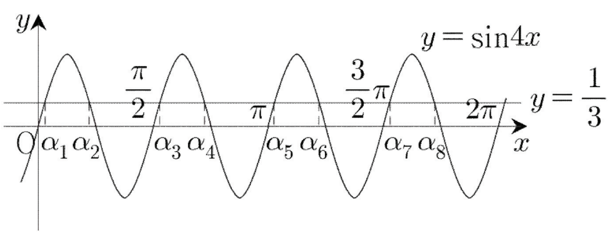
따라서 문제에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 8π이다.

답 ③

B069 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건을 만족시키도록 곡선과 직선을 그리면 다음과 같다.



함수 $y=\sin kx$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$\frac{2\pi}{k}\times 4=2\pi$에서 $k=4$

$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ \cdots\ +\alpha_8}{8}=\frac{\frac{3}{4}\pi+\pi}{2}$

$\therefore\ \alpha_1+\alpha_2+\ \cdots\ +\alpha_8=7\pi$

답 ③

C076
○○ (2024(5)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = 1 - 4 \times S_n$$

이고 $a_4 = 4$일 때, $a_1 \times a_6$의 값은? [4점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

C077
○○○ (2013(6)고2-B형20)

자연수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 최댓값은? [4점]

(가) $a_{10} \le 5120$
(나) n이 2 이상의 자연수일 때, $a_n = 8 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$이다.

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

C. 등차수열과 등비수열

주제: 지수함수와 로그함수

C078
○○ (2011사관(1차)-문과8)

함수 $y = f(x)$의 그래프는 지수함수 $y = a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 $(n,\ a_n)$은 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 두 상수 a, b의 합 $a + b$의 값은? [3점]

① $-\log_3 2$ ② $1 - \log_3 2$ ③ $2 - \log_3 2$
④ $3 - \log_3 2$ ⑤ $4 - \log_3 2$

C079
○○ (2019(11)고2-가형27)

$\frac{1}{4}$과 16 사이에 n개의 수를 넣어 만든 공비가 양수 r인 등비수열

$$\frac{1}{4},\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 16$$

의 모든 항의 곱이 1024일 때, r^9의 값을 구하시오. [4점]

C080

○○
(2021사관(1차)-가형26)

두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

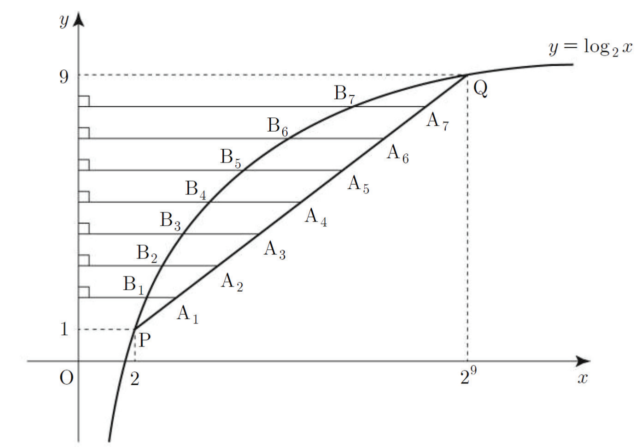
> (가) $(m+2)$개의 수
> a, $\log_2 c_1$, $\log_2 c_2$, $\log_2 c_3$, $\cdots$, $\log_2 c_m$, b
> 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
> (나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

C081

○○○
(2011(11)고2-가형21)

그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2^9,\ 9)$에 대하여 선분 PQ를 8등분하여 점 P에 가까운 점부터 차례로 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7이라 하고, 점 A_n에서 y축에 내린 수선과 곡선 $y=\log_2 x$의 교점을 B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{7} l_n$의 값은? [4점]



① 1291 ② 1391 ③ 1491
④ 1591 ⑤ 1691

C. 시그마(1)

C082

○
◇(2025(6)-확률과통계3/미적분3/기하3)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

C083

○
◇(2024-확률과통계18/미적분18/기하18)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1),\ \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

C084

○
◇(2021-나형10)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=8,\ \sum_{k=1}^{5}b_k=9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

$a_n=8+\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$a_{n-1}=8+\sum_{k=1}^{n-2}a_k$ (단, $n\geq 3$)

위의 두 등식을 변변히 빼면

$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}$, 즉 $a_n=2a_{n-1}(n\geq 3)$

수열 $\{a_n\}$을 쓰면

$a_1,\ a_1+8,\ 2(a_1+8),\ 2^2(a_1+8),\ \cdots$

조건 (가)에 의하여

$a_{10}=2^8(a_1+8)\leq 5120$

$a_1\leq 12$

따라서 a_1의 최댓값은 12이다.

답 ④

C078 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a^{x-b}$

일반항 a_n은

$a_n=2\times 3^{n-1}(n\geq 1)$

점 $(n,\ a_n)$이 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$f(n)=a_n$ 즉, $a^{n-b}=2\times 3^{n-1}$

우변을 정리하면

$a^{n-b}=3^{n-1+\log_3 2}$

n에 대한 항등식이 되기 위해서는

$a=3,\ b=1-\log_3 2$

$\therefore\ a+b=4-\log_3 2$

답 ⑤

C079 | 답 64

[풀이]

등비수열의 정의에 의하여

$16=\frac{1}{4}\times r^{n+1}$, 즉 $r^{n+1}=2^6$ $\cdots$㉠

등차수열의 합의 공식에 의하여

$\frac{1}{4}\times a_1\times\ \cdots\ \times a_n\times 16$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}r^{1+2+3+\ \cdots\ +(n+1)}$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}r^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=2^{10}$ $\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2^{-2(n+2)}2^{6\times\frac{n+2}{2}}=2^{10},\ 2^{n+2}=2^{10},\ n=8$

이를 ㉠에 대입하면

$\therefore\ r^9=2^6=64$

답 64

C080 | 답 10

[풀이]

조건 (나)에서

$c_1\times c_2\times\ \cdots\ \times c_m=32$

조건 (가)에서 주어진 $(m+2)$개의 수를 모두 합하면

$a+b+\log_2(c_1\times c_2\times\ \cdots\ \times c_m)$

$=1+\log_2 32=1+5=6$

그런데 등차수열의 합의 공식에서

$\frac{a+b}{2}\times(m+2)=6$, 즉 $m=10$

답 10

C081 | 답 ①

[풀이]

점 A_n의 x좌표를 a_n이라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1+a_2+\ \cdots\ +a_7$

$=\frac{a_1+a_7}{2}\times 7=\frac{2+2^9}{2}\times 7=1799$

점 B_n의 x좌표를 b_n이라고 하면

아홉 개의 수

$2,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_7,\ 2^9$

는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 공비는 2이다.

등비수열의 합의 공식에 의하여

$b_1+b_2+\ \cdots\ +b_7=\frac{4(2^7-1)}{2-1}=508$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{7}l_n=\sum_{n=1}^{7}a_n-\sum_{n=1}^{7}b_n$

$=1799-508=1291$

답 ①

D023

○○ (2012(4)고3-나형13)

이차함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

D024

○○ (2008사관(1차)-이과26)

$x\neq 2$인 모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다른 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x\to 2}\{2f(x)+g(x)\}=1$

(나) $\lim_{x\to 2}g(x)=\infty$

이때, $\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하시오. [3점]

D. 함수의 극한 계산

주제: 차수, 계수 결정

D025

○○ ◇(2018(9)-나형12)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17

④ 20 ⑤ 23

D026

○○ ◇(2016(9)-A형28)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}f(x)=-7$

D027

(2023(4)고3-확률과통계18/미적분18/기하18)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

D028

(2023(11)고2-공통28)

상수항과 계수가 모두 음이 아닌 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)+g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

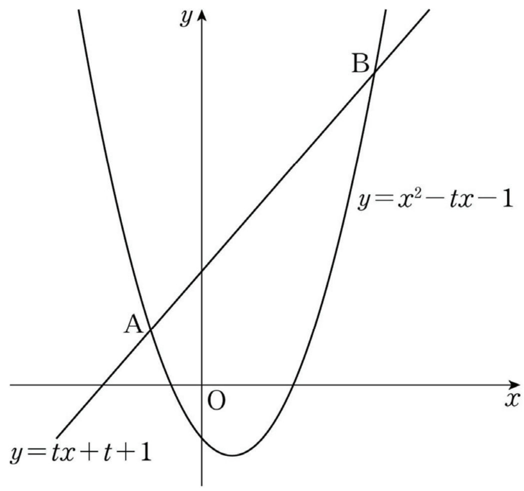
(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2g(x)}{x^5}=4$
(나) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}=2$

D. 함수의 극한 계산: 활용

D029

(2023(10)고3-확률과통계10/미적분10/기하10)

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AB}}{t^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

D024 | 답 21

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2} g(x)\left\{2\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}=1$(←조건(가))

$x\to 2$일 때, $g(x)\to\infty$(←조건(나))이므로

$2\frac{f(x)}{g(x)}+1\to 0$ 즉, $2\frac{f(x)}{g(x)}\to -1$이다.

$\left(\because \lim_{x\to 2}\left\{2\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}\right.$

$\left.=\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)+g(x)}{g(x)}=\frac{1}{\infty}=0\right)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{4\frac{f(x)}{g(x)}-40}{2\frac{f(x)}{g(x)}-1}$

$=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-40}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=21$

답 21

D025 | 답 ②

[풀이1]

함수 $f(x)$를 3차함수로 가정하자.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\frac{f(x)}{x^2}=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}$이므로

$a>0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$이고,

$a<0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-\infty$이다.

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 3차함수가 아니다.

함수 $f(x)$를 4차이상의 함수로 가정했을 때에도

동일한 모순이 발생한다.

따라서 $f(x)$는 1차 또는 2차함수이다.

함수 $f(x)$가 1차함수라고 가정하자.

$f(x)=ax+b(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0\neq 2$

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 2차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+bx+c$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)=3$

그런데 $\lim_{x\to 0}(2x+b)=b$이므로

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)-\lim_{x\to 0}(2x+b)$

$=3-b$ $\cdots$㉠

이때,

$c>0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=-\infty$,

$c<0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=\infty$

이므로 $c=0$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore f(2)=14$

답 ②

[참고1]

함수 $f(x)$가 2차함수임을 엄밀하게 증명하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

으로 두자. (단, $a_n\neq 0$)

$n\geq 3$이라고 가정하자.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(a_nx^{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} \right)$은 수렴하고,

$\lim_{x \to \infty} a_n x^{n-2} = \infty$ ($a_n > 0$인 경우),

$\lim_{x \to \infty} a_n x^{n-2} = -\infty$ ($a_n < 0$인 경우)

이므로, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}$은 발산한다.

이는 가정에 모순이므로 $n=1$ 또는 $n=2$이다.

$n=1$이라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x) = ax + b (a \neq 0)$

으로 두면, 조건 (가)에서

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) = 0 \neq 2$

이는 가정에 모순이므로 $n=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 2차함수이다.

[참고2]

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$

에서 $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$임을 알 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x) = 2x^2 + ax + b$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 4x + a$

$f(0) = b = 0$, $f'(0) = a = 3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 2x^2 + 3x$

$\therefore f(2) = 14$

[풀이2] **시험장**

(가) $\Rightarrow f(x) = 2x^2 + \cdots$

(나) $\Rightarrow f(x) = \cdots + 3x$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 2x^2 + 3x$

$\therefore f(2) = 14$

답 ②

D026 | 답 13

[풀이1]

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x) - x^3$은 다항함수이다.

$f(x) - x^3 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

(단, n은 자연수이고 $a_n \neq 0$이다.)

조건 (가)에서

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_n}{3} x^{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} x^{n-2} + \cdots + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{3x} \right)$$

$= 2$

만약 $n \geq 2$이고 $a_n > 0$이면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{3} x^{n-1} = \infty$$

이므로

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{3} x^{n-1} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

$= \infty$

이는 가정에 모순이다.

만약 $n \geq 2$이고 $a_n < 0$이면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{3} x^{n-1} = -\infty$$

이므로 마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = -\infty$$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $n = 1$이므로 다항함수 $f(x) - x^3$는 일차식이다.

$f(x) - x^3 = ax + b$ (단, $a \neq 0$)

조건 (가)에서

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax + b}{3x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3x} \right) = \frac{a}{3} = 2$$

풀면

$a = 6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^3 + 6x + b$

조건 (나)에서

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 6x + b) = b = -7$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^3 + 6x - 7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)-x^3=6x+a$

(나) $\Rightarrow f(0)=a=-7$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

D027 | 답 8

[풀이]

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$에서

$xf(x)-2x^3+1=5x^2+ax+b$

즉, $xf(x)=2x^3+5x^2+ax+b-1$

$x=0$을 대입하면 $0=b-1$, 즉 $b=1$

$xf(x)=2x^3+5x^2+ax$

양변을 $x(x\neq 0)$로 나누면

$f(x)=2x^2+5x+a$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 즉 $a=1$

$\therefore\ f(1)=8$

답 8

D028 | 답 16

[풀이]

(가): $\{f(x)\}^2g(x)=4x^5+\cdots$

다음의 두 경우로 나누어 생각하자.

$f(x)$, $g(x)$는 각각 2차, 1차 $\cdots$(경우1)

$f(x)$, $g(x)$는 각각 1차, 3차 $\cdots$(경우2)

(경우1) (×)

$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=px+q$

(단, $a\neq 0$, $p\neq 0$)

$f(x)\{g(x)\}^2=ap^2x^4+\cdots$

이므로 (나)에서 주어진 극한은 발산한다.

(경우2) (○)

$f(x)=ax+b$, $g(x)=px^3+qx^2+rx+s$

(단, $a\neq 0$, $p\neq 0$)

$\{f(x)\}^2g(x)=a^2px^5+\cdots$

에서 $a^2p=4$ $\cdots$㉠

(나): $f(x)\{g(x)\}^2=ap^2x^7+\cdots+bs^2$의

x^4, x^3, x^2, x의 계수와 상수항(bs^2)은 모두 0이어야 한다.

즉, $b=r=s=0$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식은

$f(x)=ax$, $g(x)=px^3+qx^2$

(나): $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{ax(px^3+qx^2)^2}{x^5}=\lim_{x\to 0}a(px+q)^2$

$=aq^2=2$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=2$, $q=1$, $p=1$,

$f(x)=2x$, $g(x)=x^3+x^2$

$\therefore\ f(2)+g(2)=4+12=16$

답 16

D029 | 답 ④

[풀이]

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하자.

주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2-tx-1=tx+t+1$, $x^2-2tx-t-2=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2t$, $\alpha\beta=-t-2$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4t^2+4t+8$

그런데 직선 AB의 기울기는 t이므로

$\overline{AB}=t(\beta-\alpha)=t\sqrt{4t^2+4t+8}$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AB}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{4+\frac{4}{t}+\frac{8}{t^2}}=2$

답 ④

D030 | 답 ⑤

[풀이]

$g(x)=\sqrt{x+2}$이므로

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$P(t,\ t^2-2)$, $Q(t,\ \sqrt{t+2})$

$\overline{PQ}=t^2-2-\sqrt{t+2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{t\to 2+}\frac{h(t)}{t-2}$

E. 삼차함수의 그래프: 인수정리

E068

○○
(2018사관(1차)−나형20)

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) $f(2)=f'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq -3$이다.

① 128 ② 144 ③ 160
④ 176 ⑤ 192

E. 삼차함수의 그래프

주제: 비율 관계(1)

E069

○
◇(2011−가형18)

함수 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+a$의 극솟값이 10일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

E070

○○○
(2019(10)고3−나형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, $\beta(\alpha<\beta)$뿐이다.
(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(\alpha)=0$
ㄴ. $\beta=\alpha+3$
ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(x) \leq 0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 감소함수이다.
그리고 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

이므로 함수 $f(x)$는 x축과 오직 하나의 점에서만 만난다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

E068 | 답 ①

[풀이]
조건 (가)에서 주어진 조건에 의하여
$f(x) = (x-2)^2(x-\alpha)$(←인수정리)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = 2(x-2)(x-\alpha) + (x-2)^2$
$= 3x^2 - 2(\alpha+4)x + 4(\alpha+1)$
조건 (나)에 의하여
$3x^2 - 2(\alpha+4)x + 4\alpha + 7 \geq 0$
위의 부등식의 좌변을 $g(x)$로 두고,
이차방정식 $g(x) = 0$의 판별식을 D라고 하자.
$D/4 = (\alpha+4)^2 - 3(4\alpha+7)$
$= \alpha^2 - 4\alpha - 5 \leq 0$ 즉, $(\alpha-5)(\alpha+1) \leq 0$
풀면 $-1 \leq \alpha \leq 5$
$f(6) = 16(6-\alpha)$이므로
$16 \leq f(6) \leq 112$
따라서 구하는 값은 128이다.

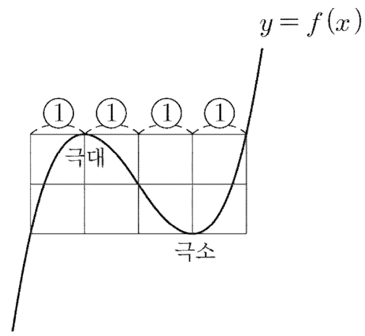
답 ①

E069 | 답 14

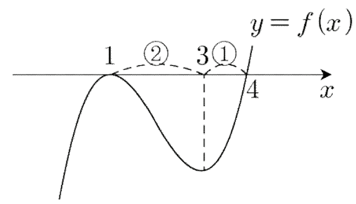
[풀이1]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$
$f'(x) = 0$에서 $x = 1$ 또는 3
$x = 1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극댓값을 갖는다.
$x = 3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극솟값을 갖는다.
주어진 조건에서
$f(3) = -4 + a = 10$
$\therefore\ a = 14$

답 14

[풀이2] 시험장
삼차함수의 비율관계를 이용하면 a의 값을 빠르게 구할 수 있다.



위의 비율관계가 성립하므로

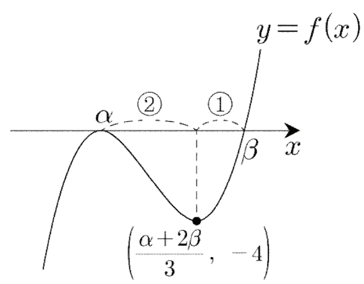


함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극솟값을 갖는다.
$f(3) = a - 4 = 10$
$\therefore\ a = 14$

답 14

E070 | 답 ②

[풀이]
▸ ㄱ. (참)
두 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서
$f'(\alpha) = 0$
▸ ㄴ. (참)
$f(\alpha) = f(\beta) = f'(\alpha) = 0$
이므로 인수정리에 의하여
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$
$f'(x) = 3(x-\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$

$f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)=-4\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right)^3=-4$

$\beta-\alpha=3$, $\therefore\ \beta=\alpha+3$ $\cdots$㉠

▸ ㄷ. (거짓)

$f(0)=-\alpha^2\beta=16$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$-\alpha^2(\alpha+3)=16$, $\alpha^3+3\alpha^2+16=0$,

$(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$, $\alpha=-4$, $\beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=17$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

E071 | 답 21

[풀이1]

주어진 함수의 도함수를 구하면

$y'=3x^2+2$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y=5x+9$

주어진 곡선의 방정식과 접선의 방정식을 연립하면

$x^3+2x+7=5x+9$

정리하면

$x^3-3x-2=0$

인수분해하면

$(x-2)(x+1)^2=0$ 풀면 $x=2$ 또는 $x=-1$

주어진 곡선과 접선의 점 P가 아닌 교점의 좌표는 $(2,\ 19)$이다.

$\therefore\ a+b=21$

답 21

[풀이2] 시험장

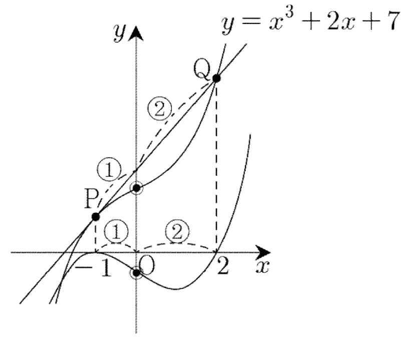
점 $(a,\ b)$를 Q라고 하자.

삼차함수의 비율관계를 이용하면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

$y'=3x^2+2\geq 2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

따라서 곡선 $y=x^3+2x+7$은 점 $(0,\ 7)$에 대하여 대칭이다.



(단, ⦿는 접선의 기울기가 가장 작은 점이다. 즉, '변곡점'이다.)

위의 그림에서 점 Q의 x좌표가 2임을 알 수 있다.

점 Q의 좌표는 $(2,\ 19)$이므로

$a=2$, $b=19$

$\therefore\ a+b=21$

답 21

E072 | 답 ①

[풀이1]

두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x+2$(←접선)

$g(x)=x+2$로 두자.

문제에서 주어진 조건에서

$f(2)=g(2)$, $f'(2)=g'(2)$, $f(-1)=g(-1)$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면

$h(2)=h(-1)=0$, $h'(2)=0$

인수정리에 의하여

$h(x)=f(x)-g(x)=(x-2)^2(x+1)$

즉, $f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)^2(x+1)+x+2$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-2)(x+1)+(x-2)^2+1$

$\therefore\ f'(3)=10$

답 ①

[풀이2] 시험장

$g(x)=f(x)-(x+2)$로 두자.

F. 정적분으로 주어진 함수

F022

○○
◇(2018(9)-나형8)

함수 $f(x)=\int_1^x (t-2)(t-3)dt$에 대하여 $f'(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

F023

○
◇(2016(9)-A형25)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$$

이고 $f'(2)=17$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

F024

○○
(2023(4)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

F. 정적분으로 주어진 함수: 방정식 결정(1)

F025

○
◇(2007-가형19)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3-2ax^2+ax$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.) [3점]

F026

○
◇(2025-확률과통계7/미적분7/기하7)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 3x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

F027

◇(2014(9)−A형28)

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)\,dt$$

일 때, $f(0)=a$라 하자. $60a$의 값을 구하시오. [4점]

F028

(2020사관(1차)−나형27)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (2x-1)f(t)dt = x^3 + ax + b$$

일 때, $40\times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

F029

(2015사관(1차)−A형10)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2\int_1^x f(t)dt - \int_1^x t^2 f(t)dt = x^4 + ax^3 + bx^2$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

F030

(2024경찰대(1차)−공통4)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int xf'(x)dx = x^3 + 3x^2 + C$ (단, C는 적분상수)
(나) $g(x) = \int_{-1}^x tf(t)dt$

$g'(2)=0$일 때, $f(-2)$의 값은? [3점]

① -30 ② -24 ③ -18
④ -12 ⑤ -6

$= \int_{-1}^{1}(-2x^2)dx = 2\int_{0}^{1}(-2x^2)dx = 2\left[-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{4}{3}$

답 ④

F020 | 답 ①

[풀이]

$\int_0^1 f(t)dt = a$로 두면

$f(x) = 4x^3 + ax$ (단, a는 상수)

$a = \int_0^1 f(t)dt = \left[t^4 + \frac{a}{2}t^2\right]_0^1 = 1 + \frac{a}{2}$

풀면 $a = 2$이므로

$\therefore\ f(1) = 6$

답 ①

F021 | 답 ③

[풀이]

(가) : $f(x) = 2x + 2a$ (이때, $a = \int_0^1 g(t)dt$)

$g(x) = \int f(x)dx = x^2 + 2ax + C$ (단, C는 적분상수)

(나) : $C - \left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + Cx\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, 즉

$-\frac{1}{3} - a = \frac{2}{3}$, $a = -1$

$a = \int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{3} + a + C$, $C = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ g(1) = -\frac{4}{3}$

답 ③

F022 | 답 ②

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x) = (x-2)(x-3)$

$\therefore\ f'(4) = 2 \times 1 = 2$

답 ②

F023 | 답 4

[풀이]

정적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x) = 2ax + 1$

주어진 조건에서

$f'(2) = 4a + 1 = 17$

풀면

$\therefore\ a = 4$

답 4

F024 | 답 ①

[풀이]

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - \int_0^0 f(t)dt}{x - 0}$

$= f(0)$ ($\because \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$)

$= 1$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$

(단, C는 적분상수)

이때, $C = 1$

$\therefore\ f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$

답 ①

F025 | 답 16

[풀이]

주어진 등식에 $x = 1$을 대입하면

$0 = 1 - a$ 풀면 $a = 1$

이를 주어진 등식에 대입하면

$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + x$

적분과 미분의 관계에서

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$\therefore\ f(3) = 16$

답 16

F026 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 등식의 양변을 미분하면

$f(x) = 9x^2 + 2$

$\therefore\ f(1) = 11$

답 ③

F027 | 답 40

[풀이1]

문제에서 주어진 항등식에 $x = 1$을 대입하면

$\int_0^1 f(d)dt = -1 - 2\int_0^1 f(t)dt$

정리하면

$\int_0^1 f(d)dt = -\frac{1}{3}$

이를 문제에서 주어진 항등식에 대입하면

$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x$

적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

$\therefore\ 60a = 60f(0) = 40$

답 40

[풀이2]

$\int_0^1 f(t)\,dt = c$로 두자. $\cdots(*)$

주어진 등식은

$\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 - 2cx$

적분과 미분의 관계에서

$f(x) = 3x^2 - 4x - 2c$

이를 (*)에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2 - 4t - 2c)dt = c$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\left[t^3 - 2t^2 - 2ct\right]_0^1 = c$

$-1 - 2c = c$ 풀면 $c = -\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$

$\therefore\ 60a = 60f(0) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

답 40

F028 | 답 50

[풀이]

$(2x-1)\int_1^x f(t)dt = x^3 + ax + b \quad \cdots(*)$

위의 항등식에 $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$을 대입하면 각각

$1 + a + b = 0$, $\frac{1}{8} + \frac{a}{2} + b = 0$

연립방정식을 풀면

$a = -\frac{7}{4}$, $b = \frac{3}{4}$

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2\int_1^x f(t)dt + (2x-1)f(x) = 3x^2 - \frac{7}{4}$

위의 항등식에 $x = 1$을 대입하면

$f(1) = \frac{5}{4}$

$\therefore\ 40f(1) = 50$

답 50

F029 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 항등식에 $x = 1$을 대입하여 정리하면

$0 = 1 + a + b \quad \cdots ㉠$

문제에서 주어진 등식의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$2x\int_1^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$

정리하면

$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + \frac{3}{2}ax + b$

$x = 1$을 대입하면

$0 = 2 + \frac{3}{2}a + b \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$a = -2$, $b = 1$

$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 - 3x + 1$

적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x) = 4x - 3$

$\therefore\ f(5)=17$

답 ①

F030 | 답 ②

[풀이]

(가): $xf'(x)=3x^2+6x$에서 $f'(x)=3x+6$

($\because$ 다항함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.)

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+6x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

(나): $g'(x)=xf(x)$, $g(-1)=0$

$g'(2)=2f(2)=36+2C_1=0$, $C_1=-18$

$\therefore\ f(-2)=6-12-18=-24$

답 ②

F031 | 답 ⑤

[풀이]

$g'(x)=f(x)$이므로 $g'(2)=f(2)=0$이고,

$x=2$의 좌우에서 $g'(x)(=f(x))$의 부호는 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀐다.

$f(2)=6+a=0$, $a=-6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}3(x+2)(x-1) & (x<0)\\ 3(x-2) & (x\ge 0)\end{cases}$$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ 또는 $x=2$

$x=-2$의 좌우에서 $f(x)(=g'(x))$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 값은

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}f(x)dx$$

$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-4}^{-2}=26$$

답 ⑤

F032 | 답 ①

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$S'(x)=f(x)$

방정식 $f(x)=0(S'(x)=0)$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=3$

$x=0$의 좌우에서 $f(x)(S'(x))$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $S(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$x=3$의 좌우에서 $f(x)(S'(x))$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $S(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 그래프에서

$S'(x)=f(x)=ax(x-3)(a>0)$

부정적분을 하면

$$S(x)=\int f(x)dx=\frac{a}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2+C$$

(단, C는 적분상수이다.)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$M-m=S(0)-S(3)=\frac{9a}{2}=6\text{에서 } a=\frac{4}{3}$$

함수 $S(x)$의 방정식은

$$S(x)=\frac{4}{9}x^3-2x^2+C$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{S(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{S(x)-S(1)}{x-1}$$

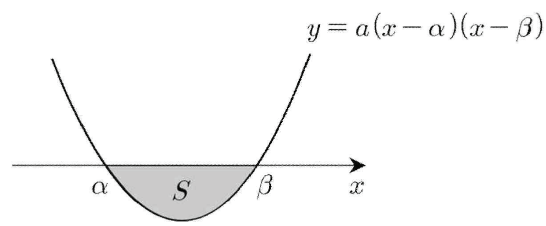
$$(\because S(1)=\int_1^1 f(t)dt=0)$$

$$=S'(1)=-\frac{8}{3}$$

답 ①

[참고] (교육과정 외)

이차함수의 정적분에 대한 아래의 공식을 이용해도 좋다.



$$S=\left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(단, $\beta>\alpha$)

위의 공식을 이용하여 상수 a의 값을 구하자.

$$M-m=S(0)-S(3)=-\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\frac{a}{6}(3-0)^3=6\text{에서 } a=\frac{4}{3}$$

F033 | 답 ①

[풀이]

$f'(x)=3x^2+bx-5$

$f'(-1)=0$, 즉 $-b-2=0$, $b=-2$

G036

○○
◇(2006(6)-나형26)

자연수 n에 대하여 다항식 $f(x)=2^n x^2+3^n x+1$을 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

G037

○○
(2024사관(1차)-미적분23)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=4^{n+1}-3n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^{n-1}}$의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

G038

○○
(2021(3)고3-미적분25)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_1 a_n$을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=12$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

G. 수열의 극한

주제: 치환

G039

○○
(2015(3)고3-A형17)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\frac{1}{n+1}\ (n\geq 1)$

(나) $\lim_{n\to\infty}n^2 b_n=2$

$\lim_{n\to\infty}n^2 a_n$의 값은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

G040

○○
(2023(3)고3-미적분26)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4
④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

G037 | 답 ⑤

[풀이]

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 4^{n+1} - 3n - 4^n + 3(n-1)$

$= 3 \times 4^n + 3$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 \times 4^n + 3}{\frac{1}{4} \times 4^n} = 12$

답 ⑤

G038 | 답 ④

[풀이]

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_1$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 a_1인 등비수열이다.

일반항 a_n은 $a_n = (a_1)^n$ (단, $a_1 > 0$)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3a_{n+3} - 5}{2a_n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3(a_1)^{n+3} - 5}{2(a_1)^n + 1} \qquad \cdots (*)$$

$0 < a_1 < 1$인 경우

$(*) = -5 \neq 12$

$a_1 = 1$인 경우

$(*) = -\frac{2}{3} \neq 12$

$a_1 > 1$인 경우

$(*) = \frac{3}{2}(a_1)^3 = 12$에서

$\therefore a_1 = 2$

답 ④

G039 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 등식의 좌변을 S_n이라고 하자.

$S_n = \frac{1}{n+1}$, $S_{n-1} = \frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$

두 등식을 변변히 빼면

$a_n + b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

이므로

$n^2(a_n + b_n) = -\frac{n}{n+1}$

수열의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n \to \infty} n^2 a_n = \lim_{n \to \infty} \left(-n^2 b_n - \frac{n}{n+1}\right)$

$= -2 - 1 = -3$

답 ①

G040 | 답 ⑤

[풀이]

$c_n = (n^2+1)a_n$으로 두면

$a_n = \frac{c_n}{n^2+1}$이고, $\lim_{n \to \infty} c_n = 3$

$d_n = (4n^2+1)(a_n + b_n)$으로 두면

$a_n + b_n = \frac{d_n}{4n^2+1}$이고, $\lim_{n \to \infty} d_n = 1$

이때, $b_n = \frac{d_n}{4n^2+1} - \frac{c_n}{n^2+1}$

$\therefore \lim_{n \to \infty} (2n^2+1)(a_n + 2b_n)$

$= \lim_{n \to \infty} (2n^2+1)\left(\frac{2d_n}{4n^2+1} - \frac{c_n}{n^2+1}\right)$

$= \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{2(2n^2+1)d_n}{4n^2+1} - \frac{(2n^2+1)c_n}{n^2+1}\right\}$

$= 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5$

답 ⑤

G041 | 답 ④

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k) = \sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n} a_k = 2n + S_n$

시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + S_n$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$$

H143

○
◇(1998-자연4)

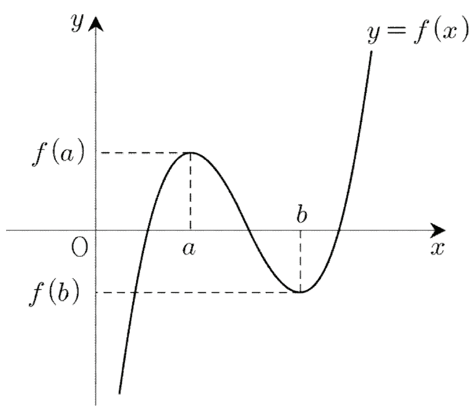
함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$가 최댓값을 가질 때의 x의 값은? [3점]

① 1　② e　③ $\dfrac{1}{e}$
④ $2e$　⑤ e^2

H144

○○
(2012사관(1차)-이과14)

그림과 같이 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 있다. $(0<a<b)$



함수 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $g'(0)>0$
> ㄴ. $f'(a)+g'(a)>0$
> ㄷ. $g(b)g'(b)>0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

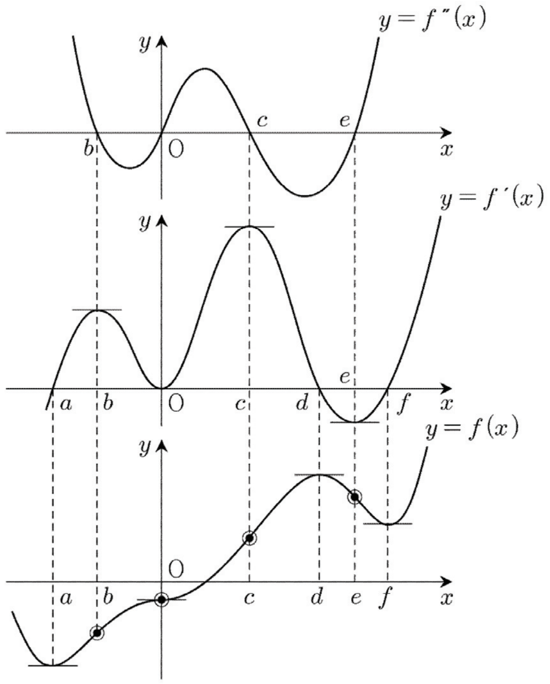
H145

○○
(2010(7)고3-가형19)

함수 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.
> ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이다.
> ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$와 서로 다른 실근의 개수는 2개다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



(단, ◉은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.)

▸ ㄱ. (참)

$f''(b)=0$이고, $x=b$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(b,\ f(b))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(0,\ f(0))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(c)=0$이고, $x=c$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(c,\ f(c))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(e)=0$이고, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(e,\ f(e))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

따라서 구간 $[a,\ f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개다.

▸ ㄴ. (참)

$f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(d)=0$이고, $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1이다.

▸ ㄷ. (거짓)

구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

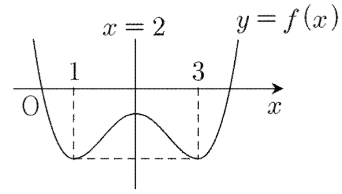
답 ③

H142 | 답 64

[풀이] 시험장

(가): 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

(가)+(나): 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.



인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)-f(1)=(x-1)^2(x-3)^2$

곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나므로

$f(0)-f(1)=9,\ f(1)=-9$

$a=f(2)=-8$

$\therefore\ a^2=64$

답 64

H143 | 답 ②

[풀이]

주어진 함수의 도함수는

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y'=0$에서 $x=e$

$x=e$의 좌우에서 y'의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 주어진 함수는 $x=e$에서 극댓값을 갖는다.

답 ②

H144 | 답 ①

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=e^{-x^2}(-2xf(x)+f'(x))$

▸ ㄱ. (참)

$g'(0)=1\times(0+f'(0))=f'(0)>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$f'(a)+g'(a)$

$=0+e^{-a^2}(-2af(a)+f'(a))$

$=e^{-a^2}(-2af(a)+0)$

$= -2ae^{-a^2}f(a) < 0$

$(\because a > 0,\ f(a) > 0)$

▸ ㄷ. (거짓)

$g(b) = e^{-b^2}f(b) < 0$

$(\because f(b) < 0)$

$g'(b) = e^{-b^2}(-2bf(b) + f'(b))$

$= e^{-b^2}(-2bf(b) + 0)$

$= -2be^{-b^2}f(b) > 0$

$(\because b > 0,\ f(b) < 0)$

$\therefore\ g(b)g'(b) < 0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

H145

| 답 ⑤

[풀이]

$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$

이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = \frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$$

방정식 $f'(x) = 0$을 풀면

$x = 0$ 또는 $x = \frac{4}{3}$

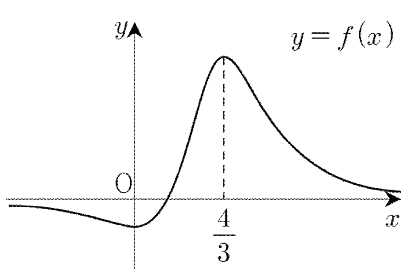
$x = 0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극솟값을 갖는다.

$x = \frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = \frac{4}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

접선의 방정식은

$y = x - \frac{1}{2}$

이므로, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 접선과 원점 사이의 거리는

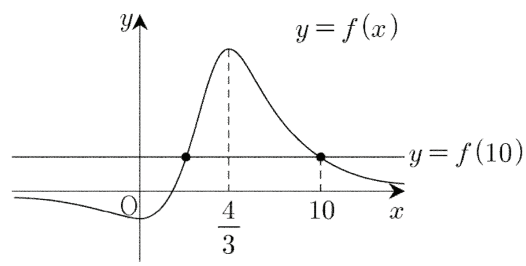
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

▸ ㄴ. (참)

$f(x) \geq f(0) = -\frac{1}{8}$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$이다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = f(10)$의 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식 $f(x) = f(10)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H146

| 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha) = e^\alpha - \frac{1}{\alpha^2} = 0$

$\therefore\ e^\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$

$x > 0$일 때, $f''(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

$f''(\alpha) = e^\alpha + \frac{2}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} > 0$

I. 부정적분: 치환적분법

I001

○○
◇(2025(9)−미적분24)

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다.

$f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $2e^{2e}-1$　② $2e^{2e}$　③ $2e^{2e}+1$
④ $2e^{2e}+2$　⑤ $2e^{2e}+3$

I. 부정적분: 부분적분법

I002

○○
(2023사관(1차)−미적분26)

구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{\ln t}{t^2}$이다. $f(1)=0$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $\frac{e-2}{3e}$　② $\frac{e-2}{2e}$　③ $\frac{e-1}{3e}$
④ $\frac{e-2}{e}$　⑤ $\frac{e-1}{e}$

I003

○○
(2015(7)고3−B형19)

구간 $(0,\ \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$
(나) $F(1)=2e$

$F(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}e^3$　② $\frac{1}{2}e^3$　③ e^3
④ $2e^3$　⑤ $4e^3$

I004

○○ (2019(7)고3-가형26)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$
(나) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=xe^x$

$f(3)\times f(-3)$의 값을 구하시오. [4점]

I005

○ ◇(2016(9)-B형22)

$\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$의 값을 구하시오. [3점]

I006

○ ◇(2017-가형3)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x dx$의 값은? [2점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

I007

○ ◇(2020(6)-가형5)

$\int_0^{\ln 3}e^{x+3}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^3}{2}$ ② e^3 ③ $\frac{3}{2}e^3$

④ $2e^3$ ⑤ $\frac{5}{2}e^3$

I 적분법

1	④	2	④	3	④	4	72	5	6
6	⑤	7	④	8	②	9	②	10	③
11	4	12	④	13	⑤	14	3	15	③
16	⑤	17	①	18	2	19	②	20	③
21	6	22	③	23	⑤	24	325	25	②
26	③	27	12	28	②	29	③	30	③
31	33	32	②	33	④	34	②	35	5
36	⑤	37	①	38	①	39	①	40	10
41	11	42	②	43	③	44	①	45	②
46	50	47	④	48	③	49	③	50	④
51	7	52	②	53	④	54	④	55	②
56	②	57	④	58	④	59	12	60	①
61	①	62	7	63	⑤	64	④	65	④
66	③	67	78	68	8				

I001 |답 ④

[풀이]

$f'(t)=\dfrac{1}{t}+4e^{2t}$이므로 부정적분을 하면

$f(t)=\ln t+2e^{2t}+C$ (단, $t>0$)

$f(1)=2e^2+C=2e^2+1$에서 $C=1$

$f(t)=\ln t+2e^{2t}+1$이므로

$\therefore\ f(e)=2e^{2e}+2$

답 ④

I002 |답 ④

[풀이]

주어진 조건에 의하여

$f'(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$

$f(t)=\displaystyle\int\frac{\ln t}{t^2}dt=\int xe^{-x}dx$

(이때, $\ln t=x$로 두면 $t=e^x$, $\dfrac{1}{t}dt=dx$이다.)

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$ ($\because$ 부분적분법)

즉, $f(e^x)=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

$x=0$을 대입하면

$f(1)=-1+C=0$, $C=1$

$f(e^x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$

$x=1$을 대입하면

$\therefore\ f(e)=1-2e^{-1}=\dfrac{e-2}{e}$

답 ④

I003 |답 ④

[풀이]

조건 (가)에서

$\{xF(x)\}'=F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$

이므로 부분적분법에 의하여

$xF(x)=2xe^x$, 즉 $F(x)=2e^x$

$\therefore\ F(3)=2e^3$

답 ④

I004 |답 72

[풀이]

조건 (나)에서 주어진 등식의 양변을 적분하면

$$\int\frac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}dx=\int xe^x dx$$

$\dfrac{f(x)}{x}=xe^x-e^x+C$ (단, C는 적분상수)

($\because$ 부분적분법)

즉, $f(x)=x^2e^x-xe^x+Cx$

조건 (가)에서

$f(1)=C=0$

$\therefore\ f(3)\times f(-3)=6e^3\times12e^{-3}=72$

답 72

I005 |답 6

[풀이]

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{16}=6$$

답 6

I006 |답 ⑤

[풀이]

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여