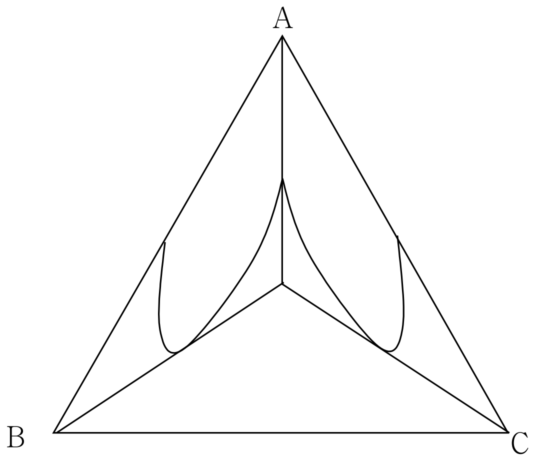
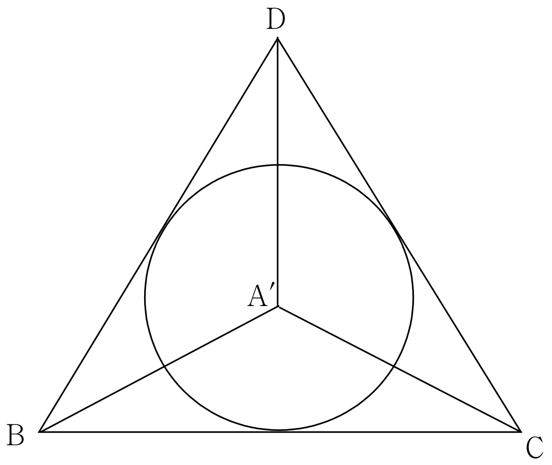
베르테르 모의고사 4회 정답표

1번. ①	2번. ④	3번. ①	4번. ①	5번. ①
6번. ④	7번. ③	8번. ②	9번. ②	10번. ①
11번. ③	12번. ④	13번. ④	14번. ⑤	15번. ⑤
16번. ④	17번. ⑤	18번. ③	19번. ③	20번. ⑤
21번. ①	22번. 12	23번. 6	24번. 300	25번. 3
26번. 30	27번. 400	28번. 95	29번. 102	30번. 170

10번 해설



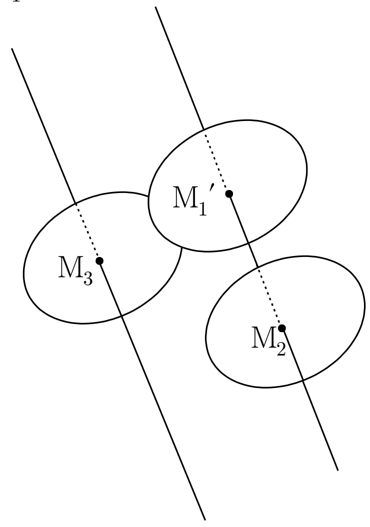


$S\cos\theta = S\times\frac{1}{3} = \pi$이고 ($S$는 선분 CA,AD와 곡선으로 둘러싸인 넓이) 평면ACD,ABC가 이루는 이면각의 크기에 대한 코사인값은 $\frac{1}{3}$이다. 고로 $3\pi\times\frac{1}{3} = \pi$이므로 이것에 두 배를 곱한 ①번이 정답입니다.

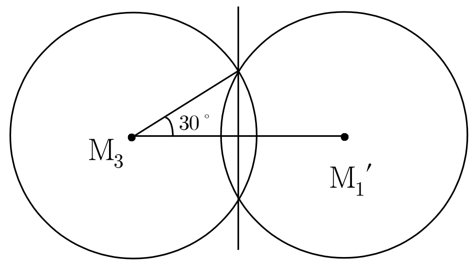
13번 해설

삼각형AB,BC,CA의 각 중점을 $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$라 하면, $\overline{CA} // \overline{M_1M_2}$이므로 다음 그림과 같습니다.

그림과 같이 두 원판 M_1',M_2가 겹치는 부분의 넓이를 구하면 됩니다. 점M_1'는 평행이동한 점입니다.

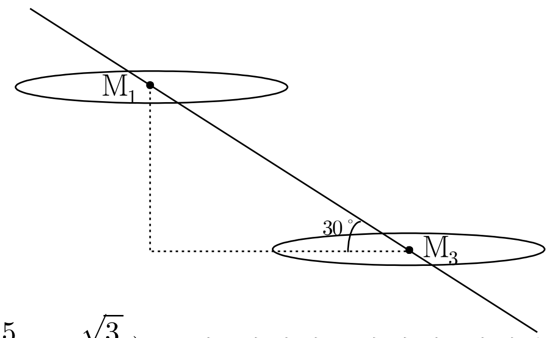


$\overline{M_1'M_3} = 2\cos 30^\circ$이므로 선분$M_1'M_3$의 절반은 $\cos 30^\circ$가 됩니다.



선분CA와 지면의 법선과 이루는 각을 α라 하면

$(\frac{5}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{1}{\cos\alpha} = S_1$, $(\cos\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}+2})$이고 직선$M_1M_3$는 선분BC와 평행하므로, 직선 M_1M_3은 지면과 30°의 각을 이룹니다.

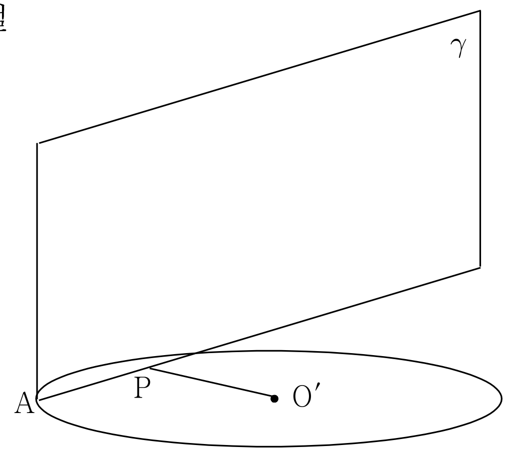


고로 $S_2 = (\frac{5}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \pi$가 됩니다. 따라서 정답은 ④이 되고,

(선분 M_1M_2의 정사영의 길이가 2보다 크기 때문에 원판M_2의 지면 위의 그림자는 겹치는 부분이 없기 때문에 원의 넓이와 같습니다.)

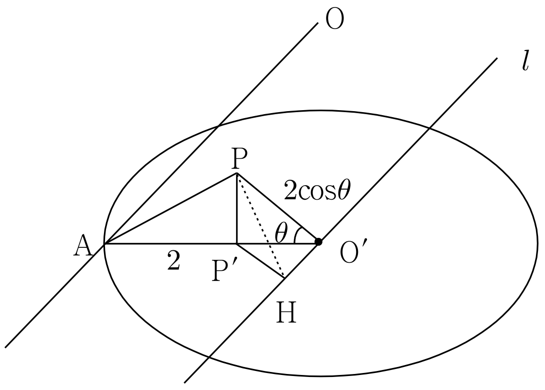
14번 역시 직선M_2M_3와 직선AB가 서로 평행합니다. 똑같은 방식으로 풀어주시면 되겠습니다.

15번 해설

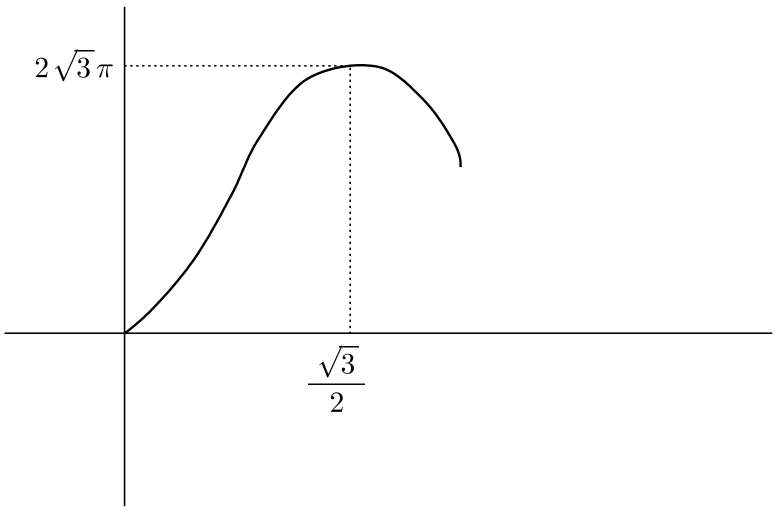


평면β와 수직이면서 점A를 포함하는 평면 γ라 하고, 점O의 평면 β위로의 정사영을 O′라 합니다. 점O′의 평면γ 위로의 정사영을 P라 하면, 다음과 같습니다.

그림과 같이 $\angle \mathrm{PO'A}=\theta$라 하면 점P에서 평면OO'A과 직선$l$에 내린 수선의 발을 각각 P',H라 합니다. 여기서 직선l은 α의 법선입니다. (그러니 직선 OA와 평행합니다.)즉, $\cos\angle \mathrm{PO'H}$가 두 평면 α,γ가 이루는 이면각에 대한 코사인값입니다.



$\overline{\mathrm{O'H}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{O'P'}}$, $\overline{\mathrm{O'P'}}=2\cos\theta\times\cos\theta$, $\cos\angle\mathrm{PO'H}=\dfrac{\overline{\mathrm{O'H}}}{\overline{\mathrm{O'P}}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\cos^2\theta}{2\cos\theta}$입니다. 원$C$의 넓이는 $(9-4\cos^2\theta)\pi$이므로 정사영의 넓이는 $(9-4\cos^2\theta)\pi\times\dfrac{2}{3}\cos\theta$이다 $\cos\theta=x$로 치환하여 최대 최소를 구합니다. $0<x\le 1$라 하면 최댓값은 $2\sqrt{3}\pi$입니다.



16번 해설

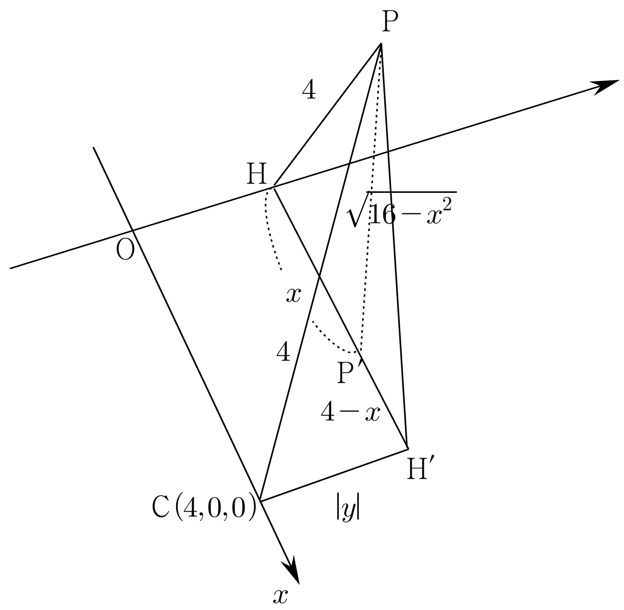
$\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{PC}}$이므로 점 C의 직선 위로의 수선의 발이 점P가 됩니다. 점P좌표는 $(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$이고, 점P의 좌표를 알고 있으므로 선분PC의 길이를 구하면 4가 나옵니다. 고로 $\overline{\mathrm{PA}}=4$가 되며 $\mathrm{A}(t,t,\sqrt{2}t)$라 하면, $4(t-\sqrt{2})^2=16$이고 $t>0$이므로 $t=2+\sqrt{2}$가 됩니다. 평면 ABCD의 법선은 선분CA의 중점을 M이라 할 때 직선PM이 법선이 됩니다. 즉, 선분CA의 중점의 좌표를 구하고 직선PM의 방향벡터를 구하시면 됩니다. $\vec{d}=(\sqrt{2}+1,1-\sqrt{2},\sqrt{2})$이므로 평면 ABCD와 xy평면이 이루는 각θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+2}}=\frac{1}{2}$$이므로 $16\cos\theta=16\times\dfrac{1}{2}=8$이 됩니다. 답은 ④이 됩니다.

17번 해설

점P의 xy평면 위로의 정사영을 P'라 하면 점P'의 자취는 2가지 방법으로 구해보도록 하겠습니다.

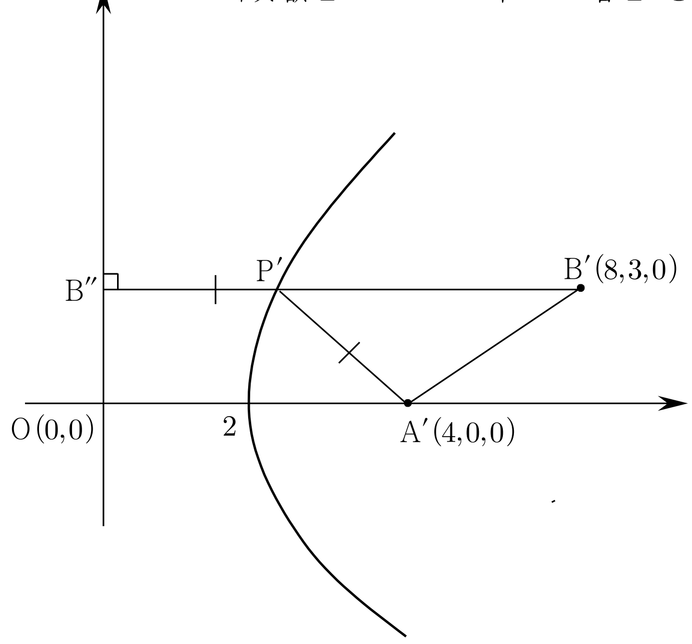
$\overline{\mathrm{PH'}}^2+|y|^2=\overline{\mathrm{PC}}^2=16,\ y^2=8(x-2)$(단, $2\le x\le 4$) 가 됩니다.



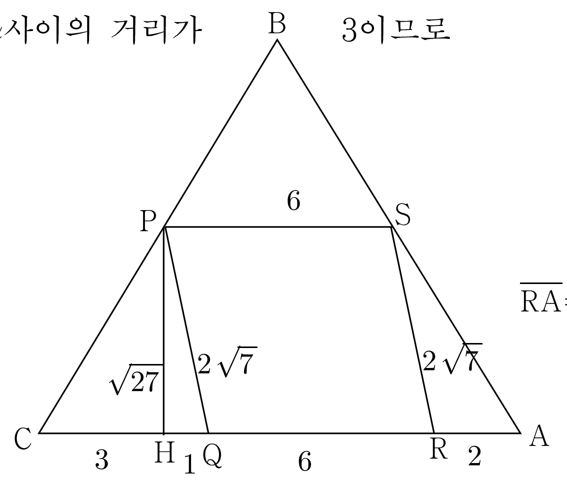
아니면 방정식을 연립하여 생각해도 좋습니다. $x^2+z^2=16$과 구의 방정식 $(x-4)^2+y^2+z^2=16$을 연립하여 $\mathrm{P'}(x,y,0)$의 자취의 방정식을 구하여도 상관없습니다.

포물선이 되므로 $\overline{\mathrm{A'B'}}+\overline{\mathrm{PA'}}+\overline{\mathrm{PB'}}$의 최솟값은 다음과 같습니다.

최솟값은 $5+8=13$이므로 답은 ⑤

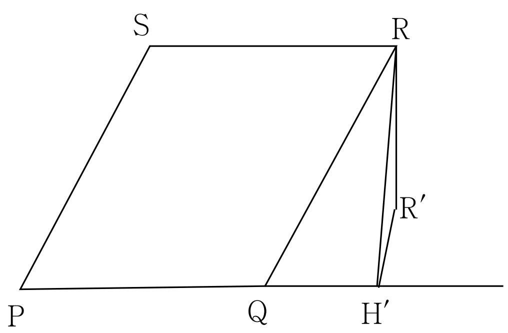


18번 해설. $\overline{CH}=6\cos60^\circ=3$이므로 $\overline{HQ}=1$입니다. 사각형PQRS는 평행사변형이고, $\overline{PS}=\overline{QR}=6$, $\overline{PQ}=\overline{RS}=\sqrt{1+27}=2\sqrt{7}$ 입니다. 점B와 평면α사이의 거리가 3이므로



$\overline{RA}=12-\overline{QR}-\overline{CQ}=2$

점B와 평면β사이의 거리를 a라 하면 AB의 중점이 평면β위에 있으므로 점A와 평면β사이의 거리도 a입니다. 선분AQ의 1:3 내분점 역시 평면β위에 있으므로 점Q와 평면β사이의 거리는 $3a$가 됩니다. 고로 $3+a=3a$이므로 $a=\frac{3}{2}$가 됩니다. 따라서 $d=\frac{9}{2}$



$\angle PQH=\angle PQH'$이므로 $\overline{RH'}=6\times\sin\angle PQH=\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$이므로

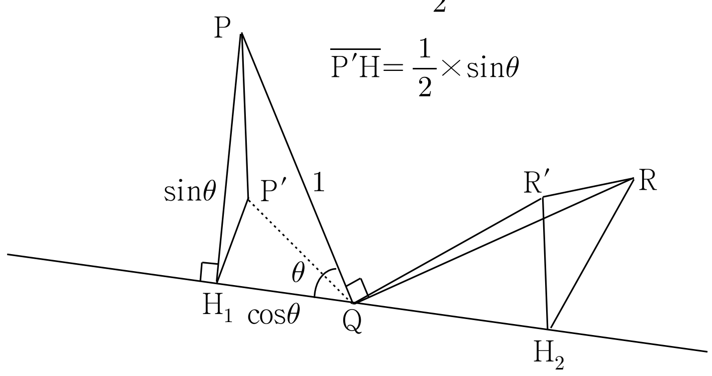
$(\overline{PH'})^2=81(\frac{3}{7}-\frac{1}{4})=81\times\frac{5}{28}, 81\times\frac{5}{28}\times28\times\frac{4}{81}=20$ 답은 ③

19번 해설

점P에서 직선l에 내린 수선의 발을 H_1라 하고 선분PQ, QR의 길이를 편의상 1이라고 하면

$\overline{PP'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$\overline{P'H}=\frac{1}{2}\times\sin\theta$



$\angle QRH_2=\angle P'QH_1$이므로 $\overline{QH_2}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}$입니다. 선분 $\overline{R'H_2}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}$이므로 $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}{2}, \cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}$ 입니다. 고로 $2(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\geq2\sqrt{2}$가 되므로 정답은 ③이 됩니다. 산술기하평균을 이용해도 좋고, $\sqrt{4-3\sin^2\theta}$을 치환하여 미분 등의 다른 방법으로 최솟값을 구해도 좋습니다.

20번 해설

직선l위의 점R에 대하여 점R에서 x축에 내린 수선의 길이가 1인 점R에 좌표를 구하면 됩니다. $R(4\sqrt{3}t, \sqrt{3}t+\frac{1}{4}, -t+\frac{\sqrt{3}}{4})$에서

$(\sqrt{3}t+\frac{1}{4})^2+(-t+\frac{\sqrt{3}}{4})^2=1, t=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$A(-3,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), B(3,1,0)$를 중심으로 하는 두 원임을 알 수 있습니다. $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})$이므로 최댓값은 $39+3\sqrt{17}$이 됩니다.

21번 해설.

점$P(t,t,t)$와 점$Q(2s,-s+2,-s-2)$에서 $\overline{PQ}=\sqrt{14}$이므로

$(t-2s)^2+(t+s-2)^2+(t+s+2)^2=3t^2+6s^2+8=14$

$\frac{t^2}{2}+s^2=1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ (ㄱ)

$\overrightarrow{PQ}=(2s-t,-t-s+2,-t-s-2)$이고,

평면$x+4y+z=6$의 법선벡터 $\vec{h}=(1,4,1)$이고, $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{14}$

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{h}|}{|\overrightarrow{PQ}|\sqrt{1+16+1}}=\frac{|-6t-3s+6|}{\sqrt{14}\times3\sqrt{2}}=\frac{|2t+s-2|}{2\sqrt{7}}$

$2t+s-2=k$라 하면, $s=-2t+2+k$

(ㄱ)에 의한 기울기가 -2인 타원의 접선의 방정식은

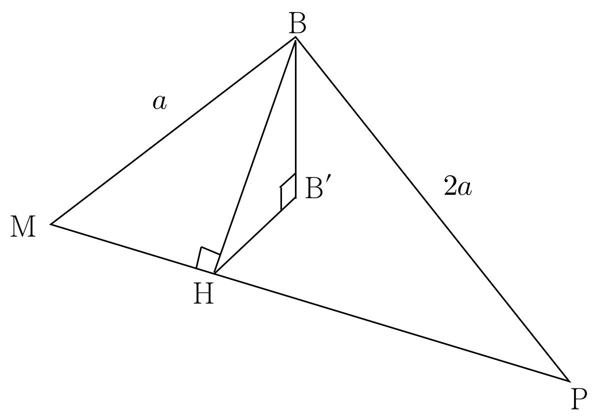
$s=-2t\pm\sqrt{2\times4+1}$이므로 $-5\leq k\leq1$이고, $|k|$의 최댓값은 5가 됩니다.

$\cos\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$가 최대일 때 $\sin\theta$ 최소, $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$이므로

$\sqrt{14}\sin\theta=\sqrt{14}\times\sqrt{1-\frac{25}{28}}$

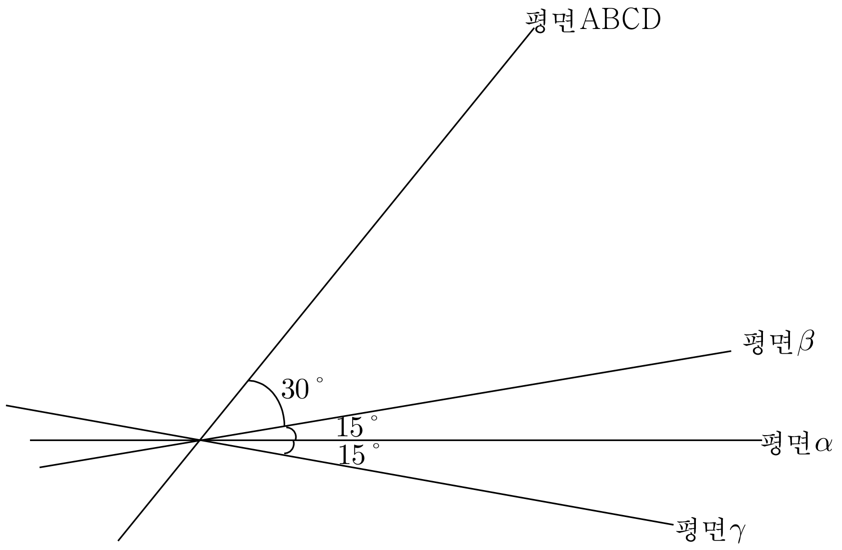
정답은 ①이 됩니다.

27번 해설. 직선AB가 평면α와 만나는 교점을 P라 하면 다음과 같습니다. 정사각형 한변의 길이를 $2a$라 하면, $\overline{B'M}=\frac{\sqrt{15}}{5}a$이므로



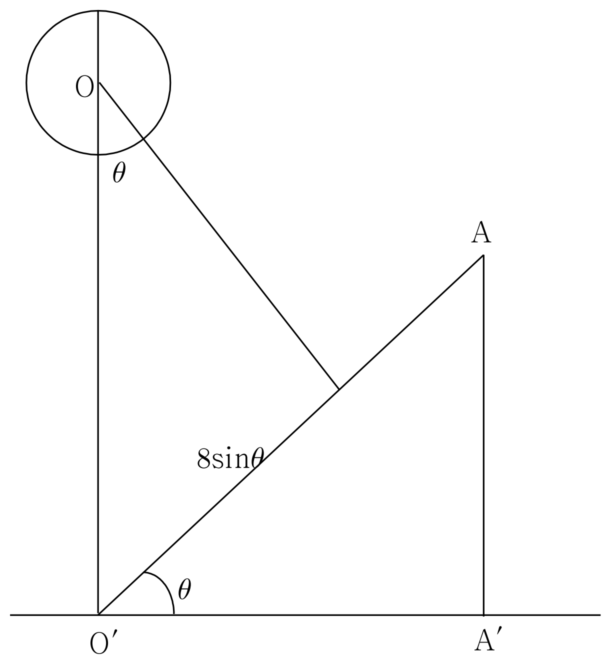
$\overline{BB'}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a$이고, $\overline{BH}=\frac{2}{\sqrt{5}}a$이므로 평면ABCD가 평면$\alpha$와 이루는 각의 크기는 45°가 되고 (나) 조건을 이용하면 정사각형의 한변의 길이는 $\sqrt{30}$이 됩니다.

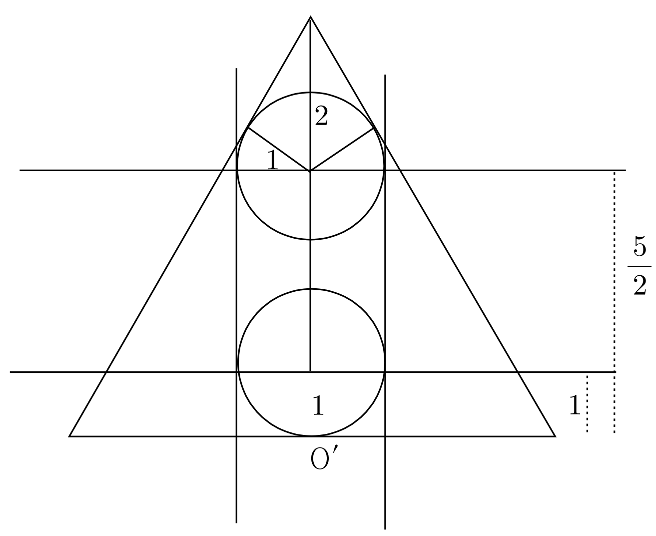
이것을 직선DM이 점으로 보이도록 단면화하면 다음과 같습니다.



따라서 $\frac{300+900}{3}=\frac{1200}{3}=400$이므로 정답은 400이 됩니다.

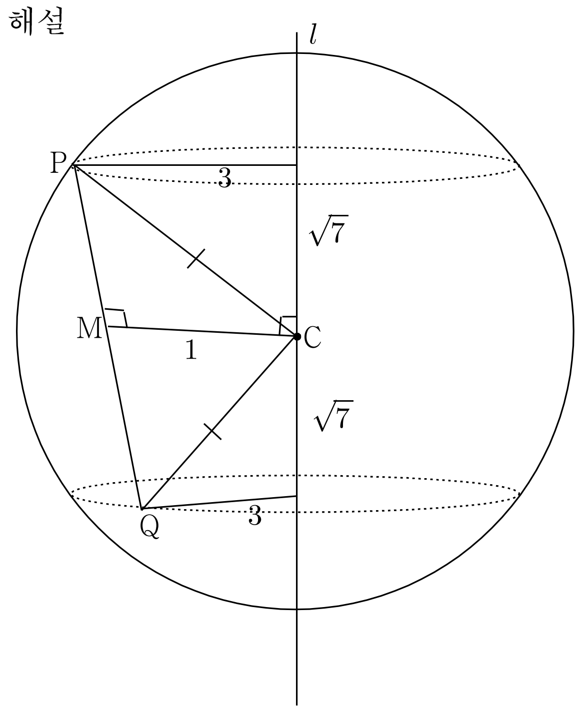
28번 해설.





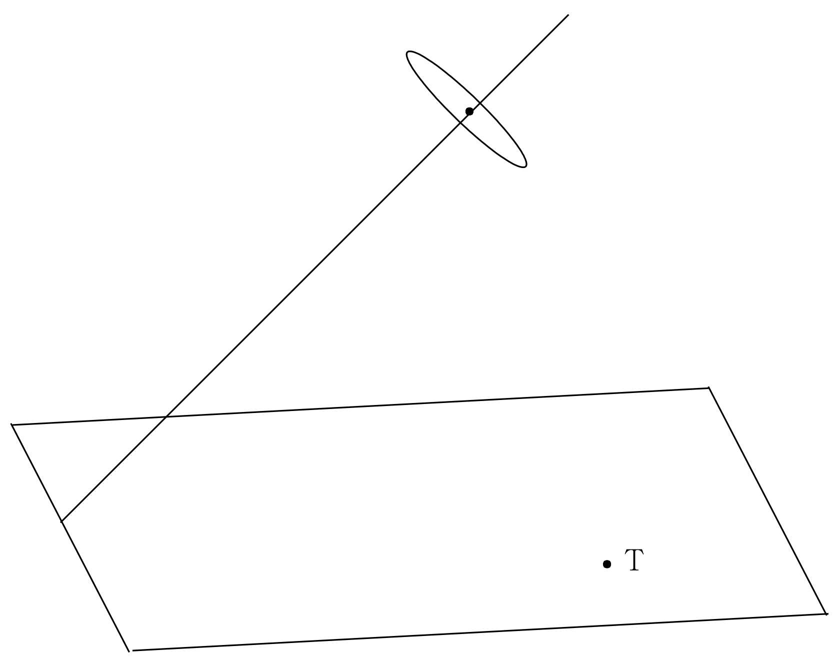
고로 $1\le 8\sin\theta\le\frac{5}{2}$이므로 $\frac{9}{16}\le\frac{9}{2}\sin\theta\le\frac{45}{32}$이므로 정답은 95가 됩니다.

29번 해설



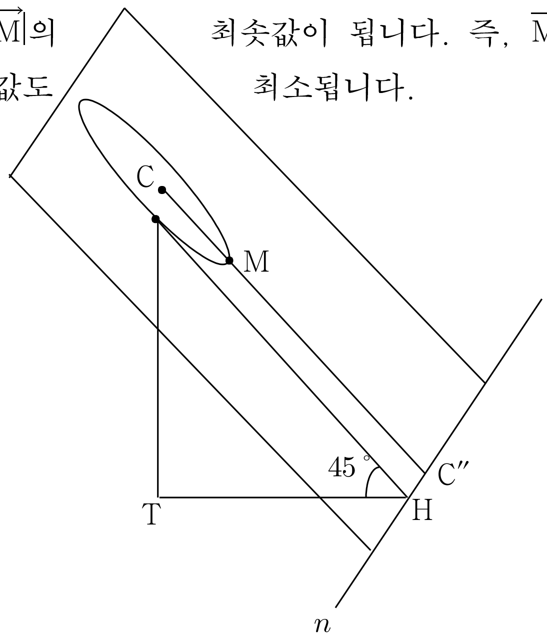
직선l에 내린 수선의 발의 길이가 3인데, 직선l이 구의 중심을 지나므로 그림과 같은 두 점P,Q는 반지름의 길이가 3인 원 위에 있게 됩니다. 구의 중심을 C라 하고, 점Q를 중심으로 하는 원을 포함하는 평면β라 하면 삼각형PQC는 이등변삼각형이므로 $\overline{PQ}\perp\overline{CM}$이 됩니다. 그런데 선분PQ의 중점의 평면$\beta$와의 거리는 점C와 평면$\beta$사이의 거리와 같습니다. 즉, 선분CM은 평면β와 평행한 것입니다. 그런데 평면β는 직선l에 수직이므로 평면β의 법선l은 선분CM과 수직이 되며, $\overline{CM}\perp l$ 이 되면서 선분CM의 길이가 1이 되도록 두 점P,Q가 움직입니다. 점C에서 두 원을 포함하는 평면에 이르는 거리는 각각 $\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$이 됩니다.

29번에서 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=(\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{MQ})$이므로 $4|\overrightarrow{TM}|^2-60$의 최솟값을 구하면 됩니다. 점M과 점T사이의 거리의 최솟값을 구하면 됩니다.



점M의 자취는 점C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원입니다. 이 원을 품는 평면을 γ라고 하면 다음과 같습니다.

평면γ와 xy평면이 만나서 생기는 교선을 n이라고 하면, $\overline{\mathrm{MH}}\sin45^{\circ}$의 최솟값이 $|\overrightarrow{\mathrm{TM}}|$의 최솟값이 됩니다. 즉, $\overline{\mathrm{MH}}$가 최소가 될 때, $|\overrightarrow{\mathrm{TM}}|$의 값도 최소됩니다.



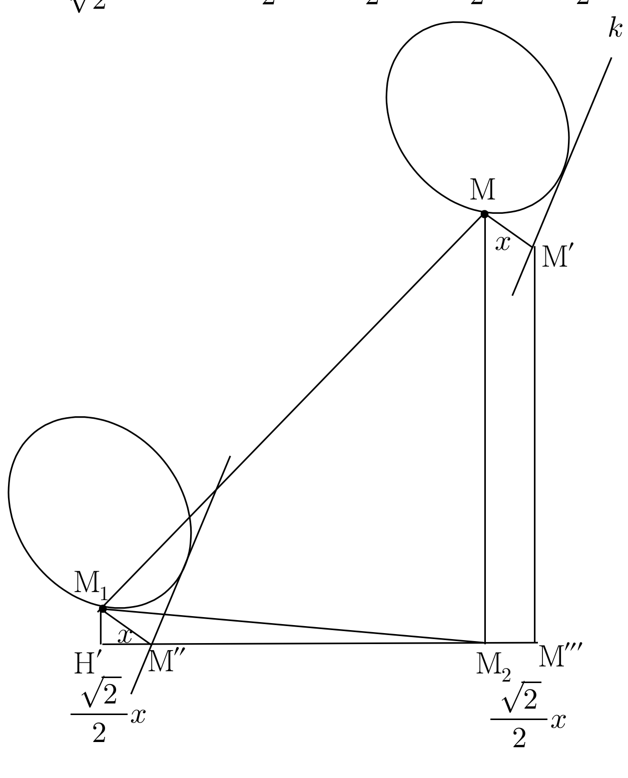
점C와 xy 평면 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$이므로 선분 CC″의 길이는 10이 되고 $\overline{\mathrm{CC''}}-1=\overline{\mathrm{C''M}}=9$입니다. 따라서 정답은 $162-60=102$가 됩니다.

30번 해설. 점M의 두 평면$\alpha, z=0$위로의 정사영을 각각 $\mathrm{M_1}, \mathrm{M_2}$라 하면,

$|\overrightarrow{\mathrm{P_1C}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ_2}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_1C}}+\overrightarrow{\mathrm{CP_2}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{CM_2}}-\overrightarrow{\mathrm{CM_1}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}|$이 됩니다.

두 평면의 교선과 평행하고 원과 접하는 직선k라 하고, 점M에서 직선 k에 내린 수선의 발을 M′라 할 때, $\overline{\mathrm{MM'}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{M_2M'''}}=\overline{\mathrm{M''H'}}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$이고, 점$\mathrm{M_1}$의 xy평면 위로의 정사영을 H′라 하면, $\overline{\mathrm{M_1H'}}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $\overline{\mathrm{H'M_2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}x}{2}+\dfrac{\sqrt{2}x}{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$입니다.



고로 $4|\overline{\mathrm{M_1M_2}}|^2=162+2x^2$이고 $0\le x\le 2$이므로 최댓값은 170이 됩니다. 정답은 170