[**대문제 1번**] 1부터 30까지의 수가 적힌 카드가 한 장씩 들어있는 주머니에서 카드를 한 장씩 뽑는다. 처음 뽑은 카드의 숫자를 m, 다시 넣지 않고 두 번째로 뽑은 카드의 숫자를 n이라 하자.

[1-1] 확률변수 $X = \int_1^e \{m - n(\ln x)^2\}\, dx$라 하자. 이때 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오.

[1-2] 다음 조건을 만족하는 자연수 x, y, z에 대하여, 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 확률변수 Y라 할 때, $\mathrm{E}\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right)$의 값을 구하시오.

(가) $xyz = \frac{30!}{mn}$ (나) $x > y > z$ (다) x와 y, y와 z, x와 z는 각각 서로소이다.

Solution:

[1-1]

m, n의 확률변수를 각각 M, N이라 하자.

먼저 1 이상 30 이하인 자연수 k에 대해,

$$P(M = k) = \frac{1}{30}$$
$$P(N = k) = \frac{29}{30} \times \frac{1}{29} = \frac{1}{30}$$
$$E(M) = \sum_{k=1}^{30} kP(M = k) = \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{30} k = \frac{30 \times 31}{2} \times \frac{1}{30} = \frac{31}{2}$$
$$E(N) = \sum_{k=1}^{30} kP(N = k) = \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{30} k = \frac{30 \times 31}{2} \times \frac{1}{30} = \frac{31}{2}$$

이다.

$X = m \int_1^e 1dx - n \int_1^e (\ln x)^2 dx$이고,

$$\int_1^e 1dx = e - 1,$$
$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_0^1 t^2 e^t dt = [(t^2 - 2t + 2)e^t]_0^1 = e - 2$$

($x = \ln t$로 치환적분, 부분적분 사용) 이므로,

$X = m(e-1) - n(e-2)$ 이고,

$E(X) = (e-1)E(M) - (e-2)E(N) = (e-1) \times \dfrac{31}{2} - (e-2) \times \dfrac{31}{2} = \dfrac{31}{2}$

[1-2]

$\dfrac{30!}{mn}$의 소인수가 k개라고 하자. $(k \geq 2)$

이 때, x, y, z의 대소를 고려하지 않은 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3^k이다.

$(\dfrac{30!}{mn} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$이고, 각각의 소인수에 대해 x, y, z를 배정하는 경우의 수는 3이다. 각 소인수마다 3가지 경우가 있으므로, 3^k가지이다.)

3^k가지 순서쌍 중 세 수가 모두 동일한 경우는 존재하지 않고, 두 수가 동일한 경우는 3가지이다. (x, y, z 중 두 수가 1인 경우)

따라서 세 수가 모두 다른 경우는 $3^k - 3$가지이고, 세 수의 대소를 고려한 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $\dfrac{3^k - 3}{3!}$이다.

이제 30!의 소인수분해를 생각해보자.

$30! = 2^{26} \times 3^{13} \times 5^7 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29$

이다.

$\dfrac{30!}{mn}$의 소인수는 mn이 30!의 소인수를 얼마나 제거하는지에 따라 결정된다.

- $k = 8$일 때,

  m, n은 17, 19, 23, 29 중 하나이다. 따라서 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$가지

- $k = 9$일 때,

  m, n 중 하나가 17, 19, 23, 29 중 하나이고 다른 하나가 17, 19, 23, 29 중 하나가 아닐 때 경우의 수는 $2 \times 4 \times 26 = 208$가지 (순서 고려)

  m, n이 11 또는 13의 소인수를 제거할 때 경우의 수는 (11, 22), (22, 11), (13, 26), (26, 13), 총 4가지

- $k=10$일 때, 전체 경우의 수가 $30\times 29=870$이므로 위의 경우를 제외하면 $870-12-208-4=646$가지

따라서

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right) &= \frac{1}{3^7}(2E(Y)+1) \\
&= \frac{1}{3^7}\left(2\times\frac{1}{30\times 29}\left(12\cdot\frac{3^8-3}{6}+208\cdot\frac{3^9-3}{6}+646\cdot\frac{3^{10}-3}{6}\right)+1\right) \\
&= \frac{1}{3^7}\cdot\frac{1}{30\times 29}\cdot\left(12\cdot 3^7+212\cdot 3^8+646\cdot 3^9\right) \\
&= \frac{12+212\times 3+646\times 3^2}{30\times 29} \\
&= \frac{1077}{145}
\end{aligned}$$

[**대문제 2번**] 함수 $f(x)$는 연속이고 미분가능하며, $f'(x)=0$이고, 좌표평면상의 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에 대하여, 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

를 만족하는 점 Q의 x좌표와 y좌표를 각각 X, Y라 하자. (단, O는 좌표평면상의 원점이다.)

[2-1] 양의 실수 a, b에 대하여 $f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$ $(0<x<a)$라 할 때, XY의 최솟값을 구하시오.

[2-2] 다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$가 있다.

(가) $f(1)=3$
(나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 P에 대하여, XY $=c$ (c는 상수)이다.

이때, $\{f(x)\}^2+\dfrac{1}{f(x)}$이 $x=k$에서 최솟값을 가질 때, k의 값을 구하시오.

Solution:

[2-1]

$y=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$ $(0<x<a)$는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 중 제1사분면에 속하는 부분이다.

제1사분면의 타원 위의 점 $P(x_1, y_1)$에 대하여, 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1}{a^2}x+\dfrac{y_1}{b^2}y=1$이다.

접선이 x축과 만나는 점은 $\left(\dfrac{a^2}{x_1}, 0\right)$, y축과 만나는 점은 $\left(0, \dfrac{b^2}{y_1}\right)$이다.

따라서 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$로 계산하면, $\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{a^2}{x_1}-x_1, \dfrac{b^2}{y_1}-y_1\right)$이다.

이 때, $X=\dfrac{a^2}{x_1}-x_1=\dfrac{a^2}{x_1}\left(1-\dfrac{x_1^2}{a^2}\right)=\dfrac{a^2}{x_1}\cdot\dfrac{y_1^2}{b^2}$,

$Y=\dfrac{b^2}{y_1}-y_1=\dfrac{b^2}{y_1}\left(1-\dfrac{y_1^2}{b^2}\right)=\dfrac{b^2}{y_1}\cdot\dfrac{x_1^2}{a^2}$이다.

따라서 $XY=\dfrac{a^2}{x_1}\cdot\dfrac{y_1^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{y_1}\cdot\dfrac{x_1^2}{a^2}=x_1y_1$이다.

(x_1, y_1)이 타원 위의 점이므로, $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$을 만족한다.

산술기하 평균 부등식에 의해, $1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{x_1^2y_1^2}{a^2b^2}}=\frac{2x_1y_1}{ab}$이고, 따라서 $xy\leq\frac{ab}{2}$ 이다.

따라서 XY의 최댓값은 $\frac{ab}{2}$이다.
(등호는 $\frac{x_1^2}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{1}{2}$일 때, 즉, $x_1=\frac{a}{\sqrt{2}}, y_1=\frac{b}{\sqrt{2}}$일 때 성립한다.)

[2-2]

$y=f(x)$ 위의 점 $P(t,f(t))$에 대하여, 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이다.

이 접선의 x축과 만나는 점은 $\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)},0\right)$이고, y축과 만나는 점은 $(0,f(t)-tf'(t))$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{OA}=\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)},0\right)$, $\overrightarrow{OB}=(0,f(t)-tf'(t))$이고,
$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)}-t,f(t)-tf'(t)-f(t)\right)=\left(-\frac{f(t)}{f'(t)},-tf'(t)\right)$이다.
따라서 $X=-\frac{f(t)}{f'(t)}$, $Y=-tf'(t)$이다.
$XY=\frac{f(t)}{f'(t)}\times tf'(t)=tf(t)$이다.
$XY=c$이므로 $tf(t)=c$이다.

따라서 $f(t)=\frac{c}{t}$이다.

$f(1)=3$이므로 $c=3$이다.

$g(x)=f(x)^2+\frac{1}{f(x)}=\frac{9}{x^2}+\frac{x}{3}$이다.
$g'(x)=-\frac{18}{x^3}+\frac{1}{3}$이고 $g'(x)=0$일 때, $x=3\sqrt[3]{2}$이다.
$g'(x)$는 $x<3\sqrt[3]{2}$에서 음수이고 $x>3\sqrt[3]{2}$에서 양수이므로 $x=3\sqrt[3]{2}$에서 최솟값을 가진다.

[**대문제 3번**] 좌표평면 위의 원점 O와 네 개의 점 P,Q,R,S가 다음 조건을 만족한다. 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(f(t), g(t))$이고, 점 P'의 좌표는 $\mathrm{P}'(f'(t), g'(t))$이다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} // \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} < 0, a\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\rvert$ (단, a는 $a > 1$인 실수이다.)
(나) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = 0, \overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} > 0, \lvert\overrightarrow{\mathrm{PR}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\rvert$
(다) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} // \overrightarrow{\mathrm{PS}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PS}} < 0, b\lvert\overrightarrow{\mathrm{PR}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\mathrm{PS}}\rvert$ (단, b는 실수이다.)

[3-1] $a = 2, b = 5, f(t) = t, g(t) = 4 - 2t$일 때, $\displaystyle\int_0^2 (\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PS}})^2 dt$의 값을 구하시오.

[3-2] $a = 5, f(t) = 2\cos t, g(t) = \sin t$일 때, $\mathrm{T}(0,1)$에 대하여, $(\overrightarrow{\mathrm{OT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}})^2$의 최댓값을 구하시오.

[3-3] $a > 2, f(t)g(t) = 1, f(t) > a, f'(t) > 0$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} > 0$임을 보이시오.

Solution:

[3-1]

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = (1, -2)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = k(2, 1)$이라 할 수 있다.

$\lvert\overrightarrow{\mathrm{PS}}\rvert = b\lvert\overrightarrow{\mathrm{PR}}\rvert = b\lvert\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\rvert = ab\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert$이므로 $\lvert k\rvert\sqrt{5} = ab\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert$가 성립한다.

따라서 $k = \pm\dfrac{ab\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert$이다.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PS}})^2 dt &= \int_0^2 k^2\left((t, 4-2t)\cdot(2,1)\right)^2 dt \\
&= \int_0^2 (2\sqrt{5}\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert)^2 (2t + (4-2t))^2 dt \\
&= 320\int_0^2 (5t^2 - 16t + 16) dt \\
&= 320\left[\frac{5t^3}{3} - 8t^2 + 16t\right]_0^2 \\
&= \frac{12800}{3}
\end{aligned}$$

[3-2]

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (f(t), g(t))$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -a\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-af(t), -ag(t))$

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = (f'(t), g'(t))$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = 0$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = k(g'(t), -f'(t))$

$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = a|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ 이므로 $|k|\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} = a\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}$

따라서 $k^2 = a^2 \cdot \dfrac{f(t)^2 + g(t)^2}{f'(t)^2 + g'(t)^2}$

$(\overrightarrow{\mathrm{OT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}})^2 = k^2 \left((0,1) \cdot (g'(t), -f'(t))\right)^2 = a^2 \cdot \dfrac{f(t)^2 + g(t)^2}{f'(t)^2 + g'(t)^2} \cdot f'(t)^2$

$a = 5, f(t) = 2\cos t, g(t) = \sin t$를 대입하면,

$(\overrightarrow{\mathrm{OT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}})^2 = 25 \cdot \dfrac{4\cos^2 t + \sin^2 t}{4\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot 4\sin^2 t = 100 \cdot \dfrac{4 - 3\sin^2 t}{3\sin^2 t + 1} \sin^2 t$로 표현할 수 있다.

$\sin^2 t = s\ (0 \le s \le 1)$로 치환하면 $100 \cdot \dfrac{4-3s}{1+3s} \cdot s$로 표현할 수 있다.

따라서 $0 \le s \le 1$에서 함수 $100 \cdot \dfrac{4-3s}{1+3s} \cdot s$의 최댓값을 구하면 된다.

$h(s) = 100 \cdot \dfrac{4-3s}{1+3s} \cdot s$라 하면, $h'(s) = 100 \cdot \dfrac{-9s^2 - 6s + 4}{(1+3s)^2}$이고, $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{3}$에서 극값을 가진다. $0 \le s \le 1$이므로 $s = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}$에서 최댓값 $\dfrac{200}{3}(3 - \sqrt{5})$를 가진다.

[3-3]

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -a\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -a(f(t), g(t))$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = k(g'(t), -f'(t)), \quad k = \pm a \cdot \dfrac{\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} > 0$ 이므로

$-ka(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) > 0$

여기서 $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$, $g'(t) = -\dfrac{f'(t)}{f(t)^2}$를 대입하면

$k = \pm a\dfrac{f(t)}{f'(t)}, \quad ka \cdot \dfrac{f'(t)}{f(t)} > 0$

$f(t) > a > 0,\ f'(t) > 0$ 이므로 $k > 0$이어야 한다.

또한,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}) \\ &= (f(t), g(t)) \cdot (f(t) + kg'(t), g(t) - kf'(t)) \\ &= f(t)^2 + g(t)^2 + k(f(t)g'(t) - f'(t)g(t))\end{aligned}$$

이고, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$, $g'(t) = -\dfrac{f'(t)}{f(t)^2}$, $k = a\dfrac{f(t)}{f'(t)}$를 대입하면,

$$f(t)^2 + \frac{1}{f(t)^2} - 2a > 0$$

임을 보이면 충분하다.

한편, $f(t) > a$ 이고, $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$은 $x > a > 2$ 범위에서 증가함수이므로 $f(t) = a$일 때 최솟값을 가진다.

따라서 $f(t) = a$일 때, $f(t)^2 + \dfrac{1}{f(t)^2} - 2a \geq a^2 + \dfrac{1}{a^2} - 2a = a(a-2) + \dfrac{1}{a^2} > 0$이다.