2025학년도 수능 - 수학

구성

번호) 단원 - 주제 이름 - 수학1 / 수학2 / 확률과 통계 / 미적분의 전 문항이 수록되어 있습니다.

풀이가 얇은 글씨로 써 있습니다. 풀이의 특징은 다음 페이지에 쓰여있습니다.

첨언할 내용을 왼쪽에 적었습니다.

참고 : 풀이에 사용된 발상이나 중요한 팁

참고할 내용이 (필요할 경우) 수록되어 있습니다. '이건 알고 넘어가자' 싶은 것이나 '이건 내가 원래 쓰는건데 잘 모를까봐 말해주자면~' 싶은 것들입니다.

(주관적인) 총평

1. 유튜브 채널 '스튜디오 샤'의 리뷰 영상에서도 말했지만, '앞으로 이 교육과정으로 보게 될 26/27학년도 수능의 난이도의 기본'이 될 것으로 보인다. 크게 어려운 문항이 없어 최상위권들은 쉽게 풀 수 있는 시험지였으나, 그렇다고 알아야 하는 기본적인 태도가 결여되어있는, '넓고 얕은' 시험지였다.
2. 가장 특징적인 문항은 28(미)였다. 250928(2025학년도 9월 모의고사 28번)와 같이 여러 출제 요소들을 단순히 모아놓은 문제였는데, 그 문항은 출제 요소들이 노골적으로 들어있는 반면 이번(2511미28)에는 출제 요소들이 있는 듯 없는 듯 출제되어서 상대적으로 어렵게(그리고 정교하게) 느껴졌다. 기존의 최고난도 문제(241122, 2411미28)는 하나의 주제를 깊게 다룬 반면, 이제는 최고난도 문제의 추세가 '여러 출제 요소를 모아 내는 것'이 되지 않을까?
3. 2506, 2509, 2511을 지나며 '2025학년도의 평가원의 기조'가 느껴지는 듯 보인다. 11번의 위치/속도/가속도, 12번의 시그마 해석, 13번의 정적분과 넓이, 15/21번의 다항함수의 개형 추론(혹은 극한의 부정형), 22번의 수열의 점화식, 26(미)번의 정적분과 부피, 29(미)번의 등비급수와 같이 '어떤 문항에 어떤 문제'를 정해두고, 그 골자에서 벗어나지 않고 있다. 2506에는 낯설게 느껴졌으나, 2509/2511에도 유지해주면서 어느 정도의 스타일이 되었다. 물론 이 기조를 2026학년도에도 이을지, 2026년도에는 새로운 기조를 밀고갈지는 두고봐야 한다.
4. [확률과 통계]의 경우 250929의 '지엽적인 개념 출제'가 251127에서 나왔다. 사실 [확률과 통계]에서는 내는 문제가 정해져 있었는데(그래서 소위 '개념을 위한 개념'이 있었는데), 이제는 그렇게 '문제로 나오는 주제'가 아닌 주제에서 문제를 종종 냄으로써 변별력을 갖추고, [확통]과 [미적분]/[기하]의 표준점수를 맞추려는 듯 보인다. 그리고 이 태도는 [미적분]에서도 갖출 수 있기 때문에('곡선의 길이', '평면에서의 속력' 등), [미적분] 선택자도 유의깊게 보아야 한다.
5. [미적분]의 경우 26번에서의 계산량이 2411미26에 비해 줄었다. 계산'마저' 많았던 2411에 비해 계산'도' 적었던 2511은 상대적으로 더 쉽게 느껴졌다. 계산이 시험장에서의 체감 난이도를 결정해줌을 알 수 있는 시험이었다.
6. [기하]의 경우 전반적으로 마일드하게 출제되었다. 전반적으로 '이거 하면 되는 거 아닌가?' 하는 생각이 맞고, 그 생각을 하면 문제가 풀리는 식이었다. 오히려 27번이 문항 번호에 비해 다소 어려워서 교훈적인 내용이 많은 문항이었다. .

시간 관계상 [기하] 해설은 하지 못했습니다.

2025학년도 수능 - 수학

시작에 앞서 - 본 해설지의 특징

1. '해설 없는 해설지'

2024년 6/9월 모의고사, 2025년 6/9월 모의고사의 해설지를 작성하면서 느낀 것은, '이게 진짜 해설이 맞나?' 하는 생각이었습니다. '해설'과 '풀이'는 다른 것이니까요. 이번 '해설'지에는 '풀이'와 함께, 문제의 '해설'을 핵심으로 삼아보고자 합니다. '어떤 요소가 있었고, 어떻게 느껴졌을 것이다.'와 같은 서술을 통해, 상세한 풀이 등은 독자에게 맡기고, 해설지는 문항에 담겨있던 교훈에 집중하고자 합니다.

2. 해설지에 첨부한 '풀이 영상'

정리하자면, 해설지에는 문항의 줄거리를 적고, 상세한 플롯은 영상에 담았습니다. 이런 해설 방식은 (현재 작업 진행중인) <볼라레 [미적분]>에서 시도중입니다.

그렇다면 이 해설지는 풀이가 없는가? 당연히 아닙니다. 문항마다 옆에 QR코드를 첨부해, 직접 계산이 되지 않는 문제나, 설명을 들어보고 싶은 문항에서 해설 영상을 보여드립니다. 하지만 가장 기본(이자 최고)는 해설을 읽으며 '직접 풀어보는 것'임을 잊지 말아주세요.

3. 솔직한 모든 생각을 담았다

아무래도 작성일이 수능 당일 밤~수능 다음 날이다보니, 제가 실전에서 푼 풀이에 비해 더 좋은 풀이가 있을 수 있습니다. 저는 제가 생각하는 최선의 풀이를 했으나, 더 좋은 풀이가 있다면 언제든지 의견을 남겨주세요!

4. 같은 말은 같은 색으로

본 해설지는 말하는 듯한 친절한 구어체의 설명을 지향하므로, '이 식이', '이것이'와 같이 지시어가 반복해 등장할 수 있습니다. 이 경우 같은 지시 대상을 갖는 말들을 같은 색으로 색칠하여 오해가 없게 했습니다.

읽어주셔서 감사합니다. 해설 시작하겠습니다!

2025학년도 수능 - 수학

[공통]

1) 수학1 - 지수법칙

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$이므로 $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^1 = 5$이고, 정답은 ①. 해설의 여지가 없다.

2) 수학2 - 미분계수의 정의

묻고 있는 바가 $f'(2)$라는 것은 모를 리가 없다. 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 8$이므로 $x = 2$를 대입하여 $f'(2) = 12 - 8 = 4$를 구할 수 있다. 정답은 ②.

3) 수학1 - 등비수열의 성질

사실 첫째항은 주어진 식을 해석하는 데 영향을 주지 않고, 묻는 바도 공비이므로 첫째항을 제시할 필요가 없긴 했다. 첫째항이 0인 경우($\frac{0}{0}$은 정의되지 않으니까)를 제거하기 위해 쓴 것으로 보인다. $\frac{a_4}{a_2}$를 'a_2에 얼마를 곱하면 a_4가 되나요?'라고 읽어야 함은 등비수열과 관련된 문제에서 자주 쓰인다. 이번 문제에도 적용해보면 $\frac{a_4}{a_2} = k^2$, $\frac{a_2}{a_1} = k$(각각 k^2, k를 곱해야 함)이 되고, $k^2 + k = 30$이 된다. 마침 선지가 모두 자연수이므로 자연수들 몇 개를 넣어보면 $k = 5$가 정답임을 알 수 있다. 사실 이 식을 $k(k+1) = 30$이라고 읽으면 'k(어떤 거)와 그거에 1 차이 나는 걸 곱했더니 30이래. 그러면 k는 얼마일까?'라고 해석할 수 있다. $k = 5$를 바로 얻어낼 수 있음이 더 정당화된다. 정답은 ⑤.

4) 수학2 - 함수의 연속

$x \neq -2$인 부분에서 $f(x)$는 다항함수의 일부이므로 연속이 보장되고, 따라서 $x = -2$만 따지자. 좌극한과 우극한이 같음을 풀면 $a = 7$이 나온다. 정답은 ②.

5) 수학2 - 곱의 미분법

만약 $f(x)$의 식에 $x - 1$이 인수로 곱해져있었다면 말이 달랐겠지만, 그런 상황이 아니므로 그냥 계산하자. 전개해서 미분하는 것은 인륜에 반한다.
$f'(x) = 2x(3x^2 - x) + (x^2 + 1)(6x - 1)$이고, $x = 1$을 대입하면 $f'(1) = 14$이다.
정답은 ④.

6) 수학1 - 삼각함수의 각변환

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$, $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$를 알고 있다. 따라서 $\sin\theta = \frac{1}{5}$이고, 묻는 바가 $\frac{\cancel{\sin\theta}}{\sin^{\cancel{2}}\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$이므로 답은 5이다. 정답은 ⑤.

2025학년도 수능 - 수학

7) 수학2 - 정적분으로 정의된 함수

정적분으로 정의된 함수의 도함수는 (미적분의 기본 정리에 따라) 피적분함수이다. 따라서 주어진 식을 미분하면 $f(x) = 9x^2 + 2$가 되고, $x = 1$을 대입하면 $f(1) = 9 + 2 = 11$이다. 정답은 ②.

8) 수학1 - 로그의 계산

로그를 열심히 정리해보자. $2\log\frac{1}{\sqrt{10}} = 2\log 10^{-\frac{1}{2}} = -\log 10 = -1$이므로 $a = \log_2\frac{20}{2} = \log_2 10$이고, $a \times b = \log_2 10 \times \log_{10} 2 = 1$이다.

9) 수학2 - 정적분

9번 문제의 유행이 '똑똑하게 계산하기'로 옮겨가는 느낌이다. {2025학년도 9월 모의고사 9번} 문제도 내용이 없으나 현명하게 계산하는 것이 중요한 문제였는데, 그때의 시험을 고훈삼아 이번에도 이렇게 똑똑한 계산이 가장 중요한 문제가 나온 것으로 보인다. 문항의 난이도는 크지 않지만 이 시각을 보지 못했다면 힘들었을 것이다. 주어진 식을 $\int_0^a f(x)dx = 0$으로 먼저 조작한다면 적분 계산을 한 번으로 줄일 수 있고, 계산하면 $a^3 - 8a^2 - 20a = 0 \rightarrow a^2 - 8a - 20 = 0 \rightarrow a = 10$(양수만 가능하다고 함)이다. 정답은 ④.

참고로, 홀수형은 선지 배열이 내림차순인데, 짝수형은 선지 배열이 오름차순이다. 오히려 짝수형을 기본으로 하고 홀수형에서 조작이 가해진 흔적이다.

10) 수학1 - 삼각함수의 그래프

평행이동이 포함되어있지 않은 삼각함수 $f(x) = a\cos bx + 3$은 $bx = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$ (a, b가 자연수라고 함)에서. 즉 $x = 0$일 때 무조건 최댓값을 갖는다. 따라서 $a + 3 = 13$이고, $a = 10$이다. $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값을 가진다는 말은 (우선 $x = 0$에서도 동일한 최댓값이 나와야 하고,) $bx = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$인 지점들 중에서 $x = \frac{\pi}{3}$가 있다는 말이다(즉, 주기의 자연수 배가 $\frac{\pi}{3}$). 따라서 $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{b}, \frac{4\pi}{b}, \frac{6\pi}{b}, \cdots$ 중 하나가 성립하고, 정리하면 $b = 6, 12, 18, \cdots$이므로 b의 최솟값은 6, $a + b$의 최솟값은 16이다. 정답은 ③.

11) 수학2 - 위치/속도/가속도

'[수학2]에서 위치/속도/가속도를 묻는 이유는 합법적으로 공통과목에서 두 번 미분을 시키고 싶기 때문이다'라는 말이 있다. 2025학년도 9월 모의고사부터 이렇게 두 번 미분을 묻는 문제가 출제되고 있는데, 앞선 9번 문제와 더불어 한 년도 안의 연계성을 느낄 수 있는 문항이었다. 점의 운동 방향이 바뀌려면 속도의 부호가 바뀌어야 하고, 그러려면 우선 속도가 0이어야 하므로 $v = 0$을 풀면 $3t^2 - 3t - 6 = 0$, $t = 2$가 된다. $t = 2$일 때의 가속도를 풀어보자. $a = 6t - 3$이므로 $a(2) = 12 - 3 = 9$이고, 정답은 ②.

2025학년도 9월 모의고사처럼, 11번까지 (최상위권 기준) 너무 할만하다. 이쯤에서 필자는 '이번 시험지는 2025학년도 9월 모의고사와 기조가 매우 비슷하다'고 느꼈다. 앞으로의 코멘트도 이 모의고사와의 비교가 주가 될 것이다.

2025학년도 수능 - 수학

12) 수학1 - 시그마의 성질

{2024학년도 6월 모의고사 9번}에서도 나온 적 있고, 이미 많은 문제에서 강조된 적 있는 태도가 있다. '어떤 수열의 합이 이차식이라면 각각은 일차식(즉, 등차수열)'이라는 태도를 사용하자. 어떤 수열 $\{c_n\}$의 합 $\sum_{k=1}^{n} c_k$가 $\sum_{k=1}^{n} c_k = n^2$이라면 $c_n = 2n-1$임을 (적어도 〈볼라레 [수학1]〉에서 중요하게) 배웠으므로 $\frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}(2n-1)$이고, $b_{n+1} = 2 + dn$이므로 $a_n = \frac{1}{2}(2n-1)(2+dn)$이다. $a_1 = 2$를 대입하면 $\frac{1}{2}(2+d) = 2$, $d = 2$이다. $a_n = (2n-1)(n+1) = 2n^2 + n - 1$이므로 구하고자 하는 시그마는 $2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k - \sum_{k=1}^{5} 1 = 2 \times 55 + 15 - 1 = 120$이다. $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 55$, $\sum_{k=1}^{5} k = 15$는 외우자.

13) 수학2 - 정적분과 넓이

13번 역시 2025학년도의 세 평가원 모의고사가 그랬듯 '정적분과 넓이' 주제로 밀고 가려는 모양이다. 직선 OP의 식을 구한 다음, 삼차함수의 식에서 빼서 영역의 넓이 차를 정적분으로 표현해보자. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-p)$에서 $f'(0) = -7$(일차항의 계수가 -7)을 반영하면 $p = -3$, $f(x) = x^3 - 7x + 6$이 되고, $P(3,12)$을 구할 수 있다. 직선 OP의 식이 $y = 4x$이므로 $A - B = \int_0^3 \{4x - f(x)\}\,dx$가 되고, 계산하면 $B - A = \int_0^3 (x^3 - 11x + 6)dx = \frac{45}{4}$가 된다. 정답은 ⑤.

2025학년도 수능 - 수학

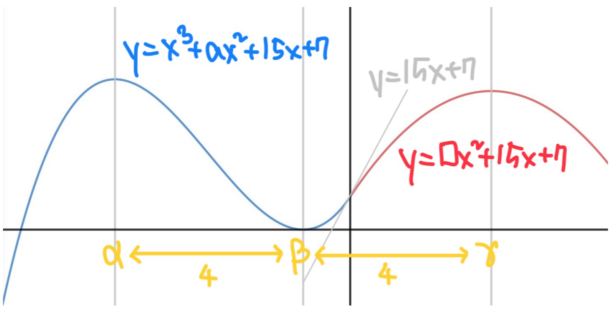
14) 수학1 - 사인법칙/코사인법칙

문장을 하나하나씩 읽으면 빈칸이 채워지고, 문제를 다 읽으면 해야 하는 행동이 정해지는, 그래서 14번 문항들 중에서 가장 쉬운 축의 문제였다. $\overline{AD} : \overline{DB} = 3:2$이므로 $\overline{AD} =$ ③, $\overline{DB} =$ ②를 쓰자. 자연스럽게 $\overline{AE} =$ ③도 쓸 수 있다. 사인법칙에 따르면 '사인의 비는 변의 비'이므로 $\sin A : \sin C = \overline{BC} : \overline{AB}$이고, $\overline{BC} =$ ⑧가 된다. 두 삼각형 ADE, ABC의 변의 길이 중 일부를 알고 있으므로 삼각형의 넓이를 '길이 * 길이 * 끼인각의 사인'으로 해석하면 길이의 비를 구할 수 있겠다.

$\cancel{\frac{1}{2}\sin A} \times ③ \times ③ : \cancel{\frac{1}{2}\sin A} \times ⑤ \times \overline{AC} = 9:35$에서 $\overline{AC} =$ ⑦이다. 삼각형 ABC의 길이를 5:7:8의 상댓값으로 표현할 수 있었다. 우리는 '$5:7:8$ 삼각형의 5와 8 사이에는 $\frac{\pi}{3}$이 숨어있다'는 사실을 알고 있으므로(몰랐다면 외우다기보다는 코사인법칙을 해보자. 삼각형을 많이 보다 보니까 외워지는 것이다) 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 14,\ \overline{AC} = 7\sqrt{3}$이 된다. ⑦ $= 7\sqrt{3}$이고 표시한 상댓값에 $\sqrt{3}$을 곱하면 실제 값이 된다.

한편, 삼각형 PBC는 점 P에서 직선 BC까지의 길이가 최대일 때, 즉 점 P에서 직선 BC에 내린 수선이 A를 지날 때 최대이다. 이때 (편의상) 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AH} =$ ⑤ $\times \sin\frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}$이고, 원의 반지름의 길이가 ③ $= 3\sqrt{3}$, $\overline{BC} =$ ⑧ $= 8\sqrt{3}$이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times \left(\frac{5}{2} + 3\sqrt{3}\right) = 36 + 30\sqrt{3}$이다. 정답은 ④.

15) 수학2 - 다항함수의 개형 추론



조건 (가)의 미분가능성을 통해 $g(0) = 7,\ g'(0) = 15 \rightarrow f(x) = \square x^2 + 15x + 7$의 꼴임을 알 수 있다(단, □는 음수). 조건 (나)는 어떻게 이해할 수 있을까? $y = f(x)$의 그래프는 x가 충분히 커지면 결국 우하향, 즉 감소하는데 $f'(0) > 0$이므로 $f'(0) = 0$인 점이 반드시 1개 있다. 한편, 삼차함수의 미분계수가 0인 지점은 0개 혹은 2개이다(웬만해서는 2개인 그림을 그릴 것이다. 사실 미분계수가 0인 지점이 1개이려면 $a = 3\sqrt{5}$여야 한다).

따라서 왼쪽 그림과 같이 $g(x)$의 그래프를 그릴 수 있는데(삼차함수의 미분계수가 0인 지점이 없다면 $g'(x) = 0$을 만족시키는 실수 x의 개수가 많아봤자 2개이다), 이때 $g'(x)g'(x-4) = 0$이려면 어떻게 되어야 할까? 그림과 같이 미분계수가 0인 점의 x좌표를 α, β, γ라고 둬보면 방정식 $g'(x)g'(x-4) = 0$의 실근은 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha+4, \beta+4, \gamma+4$의 6개이다. 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 저 6개 중 2쌍이 겹쳐야 하는 것이다. $\beta = \alpha + 4,\ \gamma = \beta + 4$가 되어야 한다. 다음 페이지에 계산이 이어진다.

유튜브 채널 '스튜디오 샤'의 리뷰에서 '다항함수의 개형 추론 문항은 원래 22번에 나왔으나, 이제는 22번의 난이도를 나눠서 15번과 21번에 분산 배치하려고 한다'고 코멘트를 붙힌 적이 있다. 2025학년도의 평가원 모의고사/수능 모두가 이 기조를 보였는데, 앞으로는 이런 문항 배치 방식이 기본이 될 듯 보인다.

$\frac{d}{dx}(x^3+ax^2+15x+7)=3x^2+2ax+15=0$에서 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱이 5인데, 두 근의 차가 4이므로 $\alpha=-5,\ \beta=-1$을 알 수 있다(바로 생각나지 않는다면 이차방정식을 풀어보자). 두 근의 합이 −6이므로 $-\frac{2a}{3}=-6,\ a=9$이다. 한편 $\gamma=3$이므로 $f'(3)=0$이고, $f'(x)=2\square x+15 \to \square=-\frac{5}{2}$가 된다. 대입하여 계산하면 $g(-2)=5,\ g(2)=27$이고, 정답은 ②.

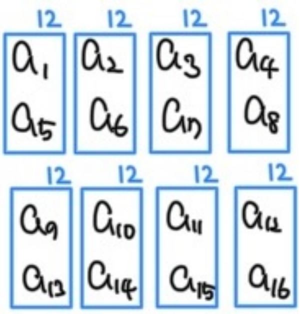
16) 수학1 – 로그방정식

양변에 2를 곱하면 우변은 밑이 2가 되고 좌변은 진수가 제곱이 된다. 밑을 맞췄으므로 진수가 같다고 방정식을 풀면 $(x-3)^2=3x-5 \to x^2-9x+14=0 \to x=2,7$이고, $x=2$는 진수 조건에 맞지 않으므로 정답은 7이다.

17) 수학2 – 부정적분

주어진 식에 양변의 부정적분을 취하면 $f(x)=3x^3+2x^2+C$인데 $f(1)=3+2+C=6$이므로 $C=1,\ f(2)=24+8+1=33$이다. 정답은 33.

18) 수학1 – 수열의 합



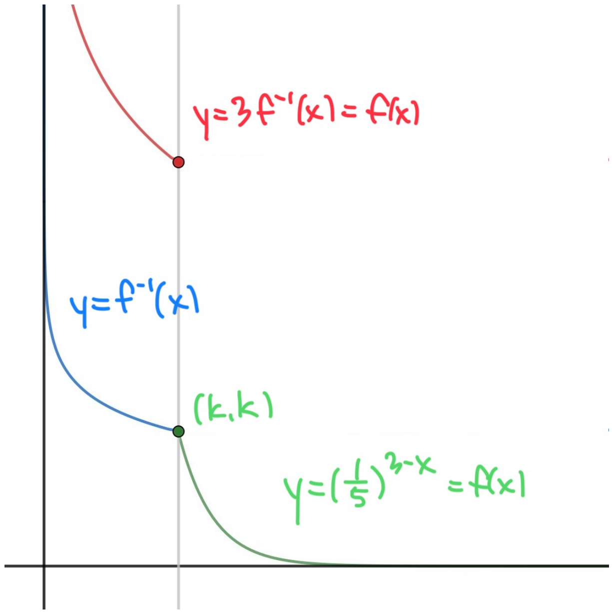
2025학년도 6/9월 모의고사와 같이 18번에 시그마와 관련된 조작 센스를 묻는 문제가 출제되었다. 확실히 당해 모의고사와의 연계성이 느껴지는 부분이다. 사실 각 항의 값에 상관없이 $a_1+a_5=12,\ a_2+a_6=12,\ a_3+a_7=12,\ a_4+a_8=12,\cdots$이므로 $\sum_{n=1}^{16}a_n=12\times 8=96$이다. 왼쪽의 그림을 참고하자.

19) 수학2 – 함수의 극대와 극소

$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2=6(x+a)(x-2a)$이므로 이 함수는 $x=-a$일 때 극대, $x=2a$일 때 극소이다. 따라서 $f(a)=7a^3=\frac{7}{27},\ a=\frac{1}{3}$이고, $f(3)=54-\cancel{3}\times\frac{1}{\cancel{3}}\times 9-\cancel{12}^{4}\times\frac{1}{\cancel{9}}\times\cancel{3}=54-13=41$이다. 정답은 41.

2025학년도 수능 - 수학

20) 수학1 - 지수함수의 그래프



우선 그림을 그려보자. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 의 그래프가 $(3,1)$, $(2,5)$를 지나는데, 직선 $y = x$는 $(2,2)$, $(3,3)$을 지나므로 사잇값 정리에 의해 $2 < k < 3$이다. 그래서 $x > k$인 부분의 $y = f(x)$의 그래프는 그릴 수 있었는데, 나머지 부분에서의 $y = f(x)$의 그래프는 어떻게 생겼을까? 식 $f(f(x)) = 3x$을 통해 구해야겠다. 지수함수에 관련한 문제에서 보통 로그함수와의 역함수 관계가 있으므로 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 생각해봐야 함을 예상할 수 있는데(만약 역함수에서 문제가 생긴다면 구간을 적당히 다시 설정해주면 되겠다), x의 자리에 $f^{-1}(t)$(이때 $x > k$이면 $0 < f(x) < k$이므로 $0 < t < k$)를 대입하면 $f(t) = 3f^{-1}(t)$가 된다. 다시 말해, $x > k$(즉, $0 < f(x) = t < k$)인 부분에서의 $y = 3f^{-1}(x)$(곡선 $y = f(x)$를 직선 $y = x$에 대해 대칭이동시킨 그래프를 3배 한 그래프)가 $y = f(x)$가 된다. 왼쪽과 같이 그래프가 그려진다. $\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}$는 어디에 있다는 것일까? 아직 채우지 못한 구간에 있다면 어떻게 처리해야 하는 걸까? 갈피가 잡히지 않는다. 그래프를 그리는 풀이는 썩 좋은 풀이가 아닌 듯 보인다(물론 그래프를 그리는 과정이 교훈적이지 않은 것은 아니다. 물론 $f(f(x)) = x$였다면 '$f(x)$의 역함수가 자기 자신'이라고 해석할 수 있었을 것이다).

k가 곡선과 직선의 교점의 x좌표이므로 $k = 5^{3-k}$가 성립해야 하는데, $k \times 5^k = 5^3$이므로 $\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}} = 5^{-9}$가 된다! $f(f(x)) = 3x$을 통해 $f(5^{-9})$의 값을 알아내야 하는데, 다시 말해 $f(x) = 5^{-9}$인 x를 찾으면 3을 곱해 정답을 얻을 수 있다. $x > k$, 즉 $f(x) = 5^{3-x}$일 때 $f(x) = 5^{-9}$일 수 있는가? $x = 12$이면 가능하다! 따라서 $f(5^{-9}) = f(f(12)) = 3 \times 12 = 36$이다. 정답은 36.

위 그림에서 초록색과 빨간색 그래프가 $y = f(x)$의 그래프의 일부이다. 점들은 채워져 있지 않다(함숫값을 특정할 수 없다).

'어떤 행동을 해달라는 걸까? ➡️ 안되는데? ➡️ 그러고 보니 이거네? ➡️ 정답!'의 줄거리는 사실 {2025학년도 9월 모의고사 21번}에서 그대로 사용된 바 있다.

그 당시에는 '평균변화율을 생각해야 하나? ➡️ 안되는데? ➡️ 부등식의 양 끝이 같아야 하나? ➡️ 계산했더니 정답'이었다.

이번에는 '그래프를 그려야 하나? ➡️ 안되는데(나머지 부분은?) ➡️ 묻는 식을 정리할까? ➡️ 정답'이다.

사실 어떤 하나의 주제에서 잘 생각나는 주제는 정해져 있었는데, 그 주제에서 출제되지 않았을 때 고정관념을 탈피하고 침착하게 문항을 풀어나갈 수 있는가를 출제하고 싶지 않았을까? 그래서 필자는 이 문제를 {2025학년도 9월 모리고사 21번}(문항 퀄리티가 이상하다는 평을 많이 받았던 문제)의 출제 의도를 설명한 문항이기도 하다고 본다.

2025학년도 수능 – 수학

21) 수학2 – 극한의 부정형

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(2x+1)}{f(x)}$가 존재하려면 어떻게 되어야 하는가? 극한값이 존재하지 '않을' 것으로 의심되는 순간을 우선 생각해보자. $f(x) \to 0$일 때 분자가 0으로 수렴하지 않으면 극한이 발산하므로 $f(x)=0$일 때 $f(2x+1)=0$이어야 한다. $f(x)=0$인 지점은 반드시 하나 이상 존재하므로 그 때의 x값이 얼마인지 생각해보자.

만약 $f(\alpha)=0$이면 $f(2\alpha+1)=0$인데, $\alpha \neq 2\alpha+1$(즉, $\alpha \neq -1$)이면 $f(x)=0$의 근이 2개 이상 존재하게 된다. 그런데 $x=2\alpha+1$일 때 $f(x)=0$이면 $x=2(2\alpha+1)+1=4\alpha+3$일 때도 $f(x)=0$이어야 한다($\alpha=-1$이므로 $2\alpha+1 \neq 4\alpha+3$이다). 마찬가지로 $f(2(4\alpha+3)+1)=f(8\alpha+7)=0, \cdots$이어야 하는데, 이러면 $f(x)=0$의 근이 너무 많아진다! 따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=-1$뿐이어야 한다($f(2x+1)=f(-1)$로, 새로운 절편이 필요하지 않아진다).

따라서 $f(x)$는 $(x+1)$을 인수로 갖고, $f(x)=(x+1)(x^2+?)$의 계수를 맞추면 $f(x)=(x+1)\left(x^2+(a-1)x+4\right)$가 되고, (일차항의 계수를 비교하여) $b=a+3$을 얻을 수 있다. $f(1)=5+a+b=8+2a$이므로 a의 최댓값을 구하면 $f(1)$의 최댓값을 얻을 수 있다. 이 식이 0이 되는 지점이 없어야 하므로 이차식의 판별식이 음수이고, $(a-1)^2-16<0,\ -4<a-1<4,\ -3<a<5$가 된다. 정수 a의 최댓값이 4이므로 정답은 16이다.

'인수분해 식의 계수 맞추기로 조립제법을 생략'하는 아이디어는 〈볼라레 [수학2]〉에도 중요하게 다뤄진다. 조립제법은 최후의 수단임을 잊지 말자.

최근 기출에서 정수와 관련된 조건을 많이 제시하는데({2024학년도 수능 14번} 참조), 이번에도 정수 조건이 나왔다. 다만 이번에는 그 난이도가 크게 하락하여 비슷한 테마의 문항에 비해 쉽다는 평가를 받았다.

22) 수학1 – 수열의 점화식

점화식을 진행하면서 $|a_3|=|a_5|$를 만족시키는 경우를 살펴보자(이 경우들 중 $|a_1|=|a_3|, |a_2|=|a_4|$인 경우를 제거하면 된다). 점화식을 보니 홀수와 짝수를 테마로 한 구분이 보인다. 그러고보니 $|a_n|$이 홀수라면 $a_{n+1}=a_n-3$은 짝수이므로 $|a_3|, |a_5|$가 같은 홀짝성(하나가 홀수이면 나머지도 홀수, 하나가 짝수이면 나머지도 짝수)을 가져야 하고, 케이스 분류를 $|a_3|$의 홀/짝을 기준으로 해야겠다.

만약 $|a_3|$이 홀수라면 $a_3=a$라고 둘 때 $a_4=a-3$은 짝수이고, $a_5=\dfrac{a-3}{2}$가 된다. $|a_3|=|a_5|$는 $a_3=a_5$(둘이 완전히 같음) 혹은 $a_3=-a_5$(둘이 절댓값은 같고 부호가 반대)인데, 만약 전자라면 $a=\dfrac{a-3}{2} \to a=-3$, 후자라면 $a_3+a_5=0 \to a+\dfrac{a-3}{2}=0 \to a=1$이 된다.

글로 풀어 쓴 풀이를 영상에서 시각화하였다.

만약 $|a_3|$이 짝수(혹은 0)라면 $a_3=a$라고 둘 때 $a_4=\dfrac{a}{2}$은 홀수일 수도 있고, 짝수일 수도 있다. 만약 a_4가 ①홀수라면 $a_5=\dfrac{a}{2}-3$이고, $a=\dfrac{a}{2}-3 \to a=-6,\ a+\dfrac{a}{2}-3=0 \to a=2$를 얻을 수 있다. 만약 a_4가 ②짝수라면 $a_5=\dfrac{a}{4}$이고, $a=\dfrac{a}{4} \to a=0,\ a+\dfrac{a}{4}=0 \to a=0$(두 상황의 결과가 동일)를 얻을 수 있다. 다음 페이지에서 각 상황에서의 $|a_1|$ 값을 구해보자.

이상을 정리하면 가능한 a_3의 값은 $-3, 1, -6, 2, 0$의 5가지이고, 각 경우에서 가능한 a_1의 값을 구해보자.

① $a_3 = -3$이면 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, -3, -6, -3, -6, \cdots\}$이다. $a_2 - 3 = -3$ 혹은 $\frac{1}{2}a_2 = -3$이 성립해야하는데, 전자의 경우 $a_2 = 0$이므로 '$|a_2|$가 홀수'($a_2 - 3 = a_3$으로 a_3이 정해질 조건)에 모순이고, 후자의 경우 $a_2 = -6$인데, 그러면 $|a_2| = |a_4|$가 되어 조건 (나)에 맞지 않는다(m의 최솟값이 2가 되어버림). 따라서 이 경우에서는 조건에 맞는 a_1이 만들어지지 않는다.

② $a_3 = 1$이면 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, 1, -2, -1, -4, -2, -1, -4, \cdots\}$이다. $a_2 - 3 = 1$ 혹은 $\frac{1}{2}a_2 = 1$이 성립해야 하는데, 후자의 경우 $a_2 = 2$이 되어 $|a_2| = |a_4|$가 되고, 조건 (나)에 맞지 않는다(m의 최솟값이 2가 되어버림). 전자의 경우 $a_2 = 4$이 되는데, 이때 가능한 a_1의 값은 $a_1 - 3 = 4 \rightarrow a_1 = 7$와 $\frac{1}{2}a_1 = 4 \rightarrow a_1 = 8$이다.

③ $a_3 = -6$이면 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, -6, -3, -6, -3, \cdots\}$이다. $a_2 - 3 = -6$ 혹은 $\frac{1}{2}a_2 = -6$이 성립해야 한다. 전자의 경우 $a_2 = -3$이 되어 $|a_2| = |a_4|$가 되고, 조건 (나)에 맞지 않는다(m의 최솟값이 2가 되어버림). 후자의 경우 $a_2 = -12$이 되어 가능한 a_1의 값은 $a_1 - 3 = -12 \rightarrow a_1 = -9$와 $\frac{1}{2}a_1 = -12 \rightarrow a_1 = -24$이다.

④ $a_3 = 2$이면 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, 2, 1, -2, -1, -4, -2, \cdots\}$이다. $a_2 - 3 = 2$ 혹은 $\frac{1}{2}a_2 = 2$가 성립해야 한다. 전자의 경우 $a_2 = 5$이 되어 가능한 a_1의 값은 $\cancel{a_1 - 3 = 5 \rightarrow a_1 = 8}$('$|a_1|$은 홀수'에 모순)와 $\frac{1}{2}a_1 = 5 \rightarrow a_1 = 10$이다.

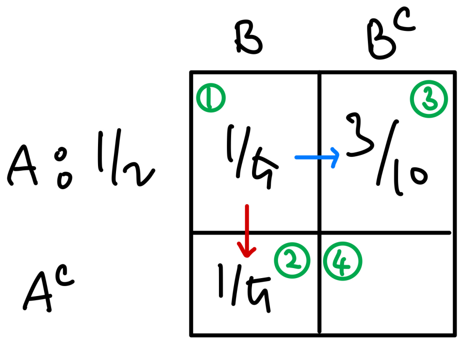
⑤ $a_3 = 0$이면 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, 0, 0, \cdots\}$이다. $a_2 - 3 = 0$ 혹은 $\frac{1}{2}a_2 = 0$이 성립해야 한다. 전자의 경우 $a_2 = 3$이 되어 가능한 a_1의 값은 $a_1 - 3 = 3 \rightarrow a_1 = 6$와 $\frac{1}{2}a_1 = 3 \rightarrow a_1 = 6$(두 경우의 결과가 동일)이다. 후자의 경우 $a_2 = 0$인데, $|a_2| = |a_4|$가 되고, 조건 (나)에 맞지 않는다(m의 최솟값이 2가 되어버림).

이상에서 가능한 a_1의 값은 $7, 8, -9, -24, 10, 6$이고, 정답은 $7 + 8 + 9 + 24 + 10 + 6 = 64$이다. 점화식에서 '홀수에서는 무조건 짝수로 가야 함'과 '따라서 홀수로 도착하려면 짝수에서 출발해야 함'을 발견했다면 역추적의 과정이 상대적으로 쉬웠을 것이다.

23) 이항정리

5개의 인수 중 x^3이 2번 뽑힐 경우의 수가 ${}_5C_3$이므로 정답은 ${}_5C_3 \times 1^3 \times 2^2 = 40$이고, ①이다.

24) 집합과 확률



왼쪽의 표가 편함이 (〈볼라레 [확률과 통계]〉를 비롯한 많은 책에서) 잘 알려져 있다. 이 화살표($P(A|B) = \frac{①}{① + ②} = \frac{1}{2}$이므로 ① = ②)와 이 화살표($P(A) = \frac{1}{2} = ① + ③$이므로 ③ = $\frac{3}{10}$)의 순서로 칸을 채우는 아이디어를 잘 기억하자. $P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$이고, 정답은 ③이다. 참고로, 유한소수로 나타낼 수 있는 상황에서의 연산은 유한소수로 하는 것을 추천한다.

24번과 27번의 풀이이다.

25) 표본평균을 통한 모평균의 추정

표본평균을 구할 필요도 없다. 신뢰구간의 길이 $b - a$는 $2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{256}}$(이 수는 모집단의 크기) $= 1.96 \times \frac{4}{16} = 0.49$이다. 정답은 ①. 참고로, $1.96 = 2^2 \times 7^2 \times 0.01$은 외우면 편해진다.

26) 수학적 확률 (여사건의 확률)

'적어도 한 명'을 보고서 여사건의 확률을 떠올려야 한다. 여사건, 즉 세 명의 학생이 모두 과목 A를 고른 학생인 사건의 확률을 구해보자. 16명 중 무작위로 3명을 뽑았을 때 A를 선택한 9명 중 무작위로 3명이 뽑혔을 확률이므로 여사건의 확률은 $\frac{{}_9C_3}{{}_{16}C_3} = \frac{\cancel{9}^3 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7}/\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{16}^4 \cdot \cancel{15}^5 \cdot \cancel{14}/\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3}{20}$(참고로, 분모가 어차피 같으므로 쓰지 않아도 된다)이고, 구하고자 하는 확률은 $\frac{17}{20}$이다. 정답은 ③.

27) 표본평균도 일종의 확률변수이다

〈볼라레 [확률과 통계]〉에서도 소개된 바 있는 {2020학년도 수능 나형 16번}을 풀어보자. n번의 독립시행에서의 표본평균 $\overline{X}$는 각 시행의 결과를 X_1, X_2, X_3라고 할 때

$\overline{X} = \frac{1}{3}\left(X_1 + X_2 + X_3\right)$이므로 $E(\overline{X}) = \frac{1}{3}\left(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)\right)$,

$V(\overline{X}) = \frac{1}{3^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)\right)$가 성립하게 된다. 이때

$V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = V(X)$($X$는 한 번의 시행에서 얻는 결과)가 성립하므로

$V(\overline{X}) = \frac{1}{3}V(X)$이다. $V(X)$의 값을 구해보자. 1, 3, 5, 7, 9가 5에 대해 대칭이고, 각 수가 뽑힐 가능성이 동일하므로 $E(X) = 5$이고,

$V(X) = \frac{1}{5}\left((-4)^2 + (-2)^2 + 0 + 2^2 + 4^2\right) = 8$이므로 $V(\overline{X}) = \frac{8}{3}$이다.

$V(a\overline{X} + 6) = a^2V(\overline{X}) = \frac{8}{3}a^2 = 24$(평행이동은 분산에 영향을 주지 못한다)이므로

$a^2 = 9,\ a = 3$이다. 정답은 ③.

24번과 27번의 풀이이다.

2025학년도 9월 모의고사에서는 '이항분포를 정규분포에 근사'하는 문제가 나왔는데, 2025학년도 수능에서는 '표본평균의 분산은 각각의 시행으로 찢어서 구한다'는 아이디어가 나왔다. 5년 전 기출에서 제대로 다뤄진 적 있으므로 기출 분석이 잘 되어있던 수험생이라면 '어, 이거 설마 이 문제에서 본 느낌으로 해야 되나?' 했을만한 문제이다. 만약 이 주제가 처음이었다면 (최악의 경우) 가능한 $\overline{X}$의 값을 확률분포표를 그려 직접 분산을 구해야 했을 것으로 보인다(그야말로 재앙이 아닐 수 없다).

2025학년도 9월 모의고사를 보고 '요즘 확통에서 지엽적인 문제가 많아지고 있다'고 평했는데, 이 기조가 계속 유지될지 지켜봐야 한다.

28) 함수의 개수 세기

$f(1), f(6)$이 모두 6 이하의 자연수인데 $f(1)f(6)$이 6의 약수(1, 2, 3, 6)인 경우가 사실 별로 없다. 조건 (나)에 따르면 $f(1) \le f(6)$이므로 $f(1)f(6)$가 얼마가 될지 결정되면 $f(1), f(6)$은 얼추 결정된다. 케이스를 분류해서 각 상황에서의 경우의 수를 세보자.

① $f(1)f(6) = 1$인 경우 $f(1) = f(6) = 1$이다. 이 경우 $2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2$이므로 $f(2), f(3), f(4), f(5)$는 2로 '자동 결정'된다. 따라서 이 경우의 경우의 수는 1이다.

② $f(1)f(6) = 2$인 경우 $f(1) = 1,\ f(6) = 2$이다. 이 경우 $2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 4$가 성립해야 한다. 2, 3, 4 중 중복을 포함하여 4개를 뽑으면 뽑힌 수를 작은 수부터 나열할 때 각 수와 $f(2), f(3), f(4), f(5)$이 일대일대응되고, 가능한 $f(2), f(3), f(4), f(5)$의 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4), f(5))$의 개수는 ${}_3H_4$이다. 따라서 이 경우의 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$이다.

이 아이디어 자체가 중복조합과 함수의 개수를 연결짓는, 매우 중요하면서 기본적인 아이디어이다.

③ $f(1)f(6) = 3$인 경우 $f(1) = 1,\ f(6) = 3$이다. 이 경우 $2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$가 성립해야 한다. 2, 3, 4, 5, 6 중 중복을 포함하여 5개를 뽑으면 뽑힌 수를 작은 수부터 나열할 때 각 수와 $f(2), f(3), f(4), f(5)$이 일대일대응되고, 가능한 $f(2), f(3), f(4), f(5)$의 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4), f(5))$의 개수는 ${}_5H_4$이다. 따라서 이 경우의 경우의 수는 ${}_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{\cancel{8}^2 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} = 70$이다. 다음 페이지에 이어진다.

④ $f(1)f(6)=6$인 경우 $f(1)=2,\ f(6)=3$이거나 $f(1)=1,\ f(6)=6$이다.

① $f(1)=2,\ f(6)=3$의 경우 $4 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$가 성립해야 한다. 2, 3, 4 중 중복을 포함하여 4개를 뽑으면 뽑힌 수를 작은 수부터 나열할 때 각 수와 $f(2), f(3), f(4), f(5)$이 일대일대응되고, 가능한 $f(2), f(3), f(4), f(5)$의 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4), f(5))$의 개수는 ${}_3H_4$이다. 따라서 이 경우의 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$이다.

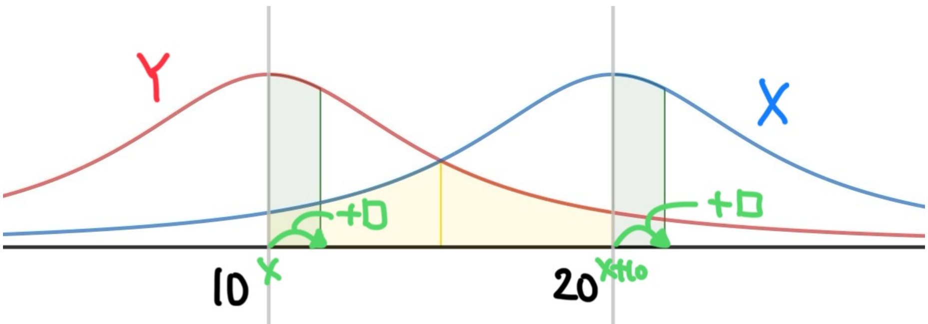
② $f(1)=1,\ f(6)=6$의 경우 $2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$가 성립해야 한다. 2, 3, 4, 5, 6 중 중복을 포함하여 5개를 뽑으면 뽑힌 수를 작은 수부터 나열할 때 각 수와 $f(2), f(3), f(4), f(5)$이 일대일대응되고, 가능한 $f(2), f(3), f(4), f(5)$의 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4), f(5))$의 개수는 ${}_5H_4$이다. 따라서 이 경우의 경우의 수는 ${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$이다.

조건 (가)가 '6의 약수'가 아니라 '6 이하의 자연수' 혹은 '18의 약수' 정도만 되었어도 케이스가 많아져서 까다로운 문제가 되었을 것이다.

이상에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $1+15+70+15+70=171$이고, 정답은 ②이다. 기본적인 '케이스 분류 ➡️ 각 케이스의 경우의 수를 구해 합산하기' 식의 문항이다. 생각보다 분류되는 케이스의 수가 적어서 생각할 것이 적은 문항이었다. 결과적으로는 '주제는 킬러이지만, 속을 알고 보면 쉬운' 문항이 되었다. 기본적인 태도만을 묻고 끝내는 문제였기 때문에 개념서 등에 많이 실릴 것으로 예상된다.

29) 정규분포의 확률

2□ − △ 은 '△을 □에 대칭'시킨 이미지가 있다. $P(X \le x) = P(X \ge 40 - x)$에서 이것과 이것이 20에 대해서 대칭이라는 의미이므로 $m_1 = 20$이다. 사실 $x = 20$을 대입해도 알 수 있지만, 그래프의 넓이를 통한 해석으로 알아내는 것이 더 좋다.



비슷한 방식으로 $P(Y \le x) = P(X \le x + 10)$도 해석해보자. $x = 10$을 대입하면 $P(Y \le 10) = P(X \le 20) = 0.5$이므로 $m_2 = 10$이다. 이제 $x = 10$에서 x를 조금 변화시킬 때(그림 참조, σ_1만큼 움직였다고 생각해도 좋다) 확률의 변화를 생각해보자. $x = 10$일 때 $x + 10$은 $E(X)$와 같게 되는데, 이때 $P(X \le x + 10)$이 증가하는 양은 σ_1에 따라 달라질 것이다(σ_1가 크면 확률의 증가량이 작아지고, σ_1가 작으면 확률의 증가량이 커진다). x가 커지면 x가 증가하는 양과 $x + 10$이 증가하는 양은 동일한데, 표준편차에 따라 확률의 변화량이 달라지므로, x가 증가해도 확률의 증가량이 동일하려면 $\sigma_1 = \sigma_2$이어야 한다. 사실 $x = 10 + \sigma_1$을 대입해도 동일한 결과를 얻을 수 있다.

그림으로 정리하자면 위와 같이 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 확률변수의 확률밀도함수는 $x = 15$에 대해 서로 대칭이고, $P(15 \le Y \le 20) = P(10 \le X \le 15)$가 된다. $P(15 \le Y \le 20) + P(15 \le X \le 20) = P(10 \le X \le 20)$의 값이 $0.4772 = P(0 \le Z \le 2) = P(-2 \le Z \le 0)$가 되려면 $10 = 2\sigma_1,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 5$이어야 한다. $m_1 + \sigma_2 = 20 + 5 = 25$이므로 정답은 25이다.

30) 수학적 확률

주사위를 굴리면 동전 하나를 뒤집거나, 모든 동전을 뒤집는다. 세 번 동전을 뒤집었을 때 모든 동전이 앞면을 보이게 하려면 어떻게 되어야 할까? 세 번 주사위를 굴려서 나온 면이 3, 4, 5(뒷면이 보이도록 놓여져 있는 세 개가 한 번씩 나와 뒤집어짐)인 경우가 먼저 떠오른다. 만약 주사위를 굴려서 6이 나오지 않는다면 이 경우만이 가능하다. 반면, 주사위를 굴려서 6이 나온다면(즉, 모든 동전을 뒤집는 경우가 있다면) 편의상 첫 번째 시행에서 6이 나왔다고 할 때 뒷면/뒷면/앞면/앞면/앞면이 보이게 되므로 나머지 두 번의 시행에서 1/2가 나와 뒷면이 된 두 동전이 한 번 더 뒤집어지면 된다. 1/6/2나 2/1/6과 같이 6이 언제 나오든 상관없이 1/2/6의 조합으로 주사위가 나오게 되면 세 번의 시행 결과 모든 동전이 앞면을 보이게 된다. 6이 두 번 이상 나오는 경우에는 나머지 한 번의 시행에서 어떤 면이 나오든지 모든 면이 앞면이 보이게 놓여질 수 없다.

① 세 번의 시행의 결과가 3/4/5의 조합으로 나올 경우의 확률은 $\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$(전체 경우의 수는 6의 세제곱이고, 분자에는 3/4/5를 배열하는 경우의 수가 놓여짐)이다.

② 세 번의 시행의 결과가 1/2/6의 조합으로 나올 경우의 확률은 $\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$(①과 동일)이다.

이상에서 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$이고, $p = 18, q = 1$이므로 정답은 19이다. 생각보다 허무하게 끝나는 문제였다.

23) 삼각함수의 극한

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=\frac{3}{1^2}=3$이고, 정답은 ③.

24) 분수 함수의 적분

분수 꼴의 적분은 분모의 차수가 분자의 차수보다 크도록 조작한다.
$\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^{10}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x+\ln(x+1)\right]_0^{10}=10+\ln 11$이고,
정답은 ④.

25) 수열의 극한

구하고자 하는 극한 식을 유리화하면
$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{a_n{}^2+n}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}$가 되는데, 주어진 극한 식을

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3}\times\frac{a_n}{n}=1$로 조작하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$이고,
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1^2+0}+1}=\frac{1}{2}$이다. 정답은 ②.

26) 정적분과 부피

높이가 dx이고 밑면이 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$인 정사각형인 직육면체를 생각하면 이 직육면체의 부피가 $\frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+\ln x}\right)dx$이므로
구하고자 하는 입체도형의 부피는 $\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+\ln x}\right)dx$가 된다.
$x+\ln x=t$로 치환하면 $\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=dt$(사실 이게 보여서 치환적분을 생각하는 것이다)
이고, 계산하면
$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+\ln x}\right)dx=\int_1^{e+1}\frac{dt}{t}=\left[\ln t\right]_1^{e+1}=\ln(e+1)$이다. 정답은
①. 동일한 유형의 문제가 {2024학년도 수능 26번}에서는 매우 분량이 많은 계산 문제로 출제되었는데, 이번에는 계산이 적어서 푸는 입장에서는 훨씬 수월한 문항이었다.

27) 합성함수/역함수의 미분법

우선 $g(x)$를 $y=f(x)+x$에 $y=e^x$가 합성되어있는 함수로 생각하는 것이 기본적이다('반복되는 함수가 등장하면 합성을 생각한다'). 합성함수의 미분법을 사용하면 도함수의 값을 오류 없이 구할 수 있기 때문이다. $g'(x)=e^x\left\{f'\left(e^x\right)+1\right\}$가 되고, 주어진 접선 조건에 의해 $g(0)=g'(0)=0$이라는 데에서 $f(1)+1=0 \to f(1)=-1$과 $1\left\{f'(1)+1\right\}=0 \to f'(1)=-1$을 얻을 수 있다. $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x)=(x-1)^2(x-p)-x$라고 쓸 수 있다.

> 여기에서 $y=-x$는 $x=1$일 때의 함숫값과 미분계수가 모두 -1인 직선의 방정식이다. [수학2]에서 배운 적 있을법한 식 작성 태도이다.

한편 $g'(x)=e^x\left\{f'\left(e^x\right)+1\right\}$을 $y=x\left(f'(x)+1\right)$에 $y=e^x$가 합성되어있는 함수라고 생각할 수 있는데, $g(x)$가 역함수를 가지므로(즉, 항상 증가하거나 항상 감소) $g'(x)$의 부호가 바뀌지 않으려면 p가 어떻게 되어야 할지 생각해보자.

$f(x)+x=(x-1)^2(x-p)$이므로 $f'(x)+1=(x-1)(3x-2p-1)$가 된다.

$y=x\left(f'(x)+1\right)$에 $y=e^x$를 합성한 함수 $g'(x)=e^x\left\{f'\left(e^x\right)+1\right\}$에서 이 부분은 항상 양수이므로 이 부분, 즉 $\left(e^x-1\right)\left(3e^x-2p-1\right)$의 부호가 바뀌지 않도록 하자. 이 부분은 $x=0$의 전후에서 부호가 바뀌므로 이 부분도 $x=0$의 전후에서 부호가 바뀌어야 하는데, 그러려면 (이 부분이 연속함수이므로) 우선 $x=0$일 때 값이 0이어야 한다. $3-2p-1=0$이므로 $p=1$이 되고, $f(x)=(x-1)^3-x$가 된다.

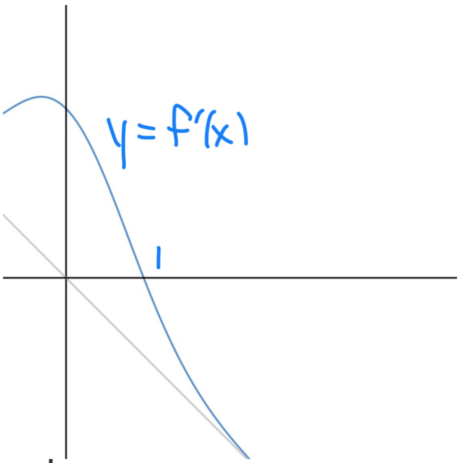
$h'(8)$의 값을 구해보자. $h(8)=k$인 k(즉, $g(k)=8$인 k)를 구하면 $h'(8)=\dfrac{1}{g'(k)}$로 미분계수를 구할 수 있다('역함수의 미분계수는 원래 함수의 어느 점의 미분계수에 대응되는지 찾고, 역수를 취한다'). $f(x)+x=(x-1)^3$이므로 $g(x)=\left(e^x-1\right)^3$이고, $g(k)=8$이려면 $e^k-1=2$이면 되므로 $k=\ln 3$이다. $g'(x)=e^x\left(3(e^x-1)^2\right)$이므로 $g'(k)=3\times 3(3-1)^2=36$이고, $h'(8)=\dfrac{1}{g'(k)}=\dfrac{1}{36}$이다. 정답은 ①. 합성함수와 역함수의 미분법에 대한 숙지를 묻는, 기본적이면서도 잘 짜여진 문항이다. '합성함수의 구조를 파악'하는 내용은 최근에는 출제가 뜸했는데, 까먹었거나 숙지가 덜했다면 다소 헤맸을 수 있는 문항이었다.

> $g(x)$가 '$y=f(x)+1$'에 $y=e^x$가 합성되어있다고 잘못 이해하면 더 헷갈려진다.

> 해설 영상에는 다른 풀이가 소개되어있다.

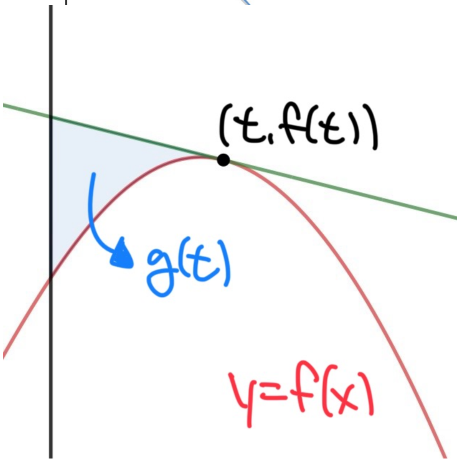
2025학년도 수능 - 수학

28) 정적분으로 정의된 함수 / 적분 퍼즐



왼쪽의 $y = f'(x)$의 그래프를 그릴 수 있는지, 특히 보조선 $y = -x$를 그릴 수 있는지가 매우 중요한 첫 번째 스텝이다. 어떤 함수가 $\square(x) + \triangle(x)$(특히 둘 중 하나가 직선)의 꼴이라면 '어떤 함수의 그래프 위에 다른 함수의 그래프를 얹는' 아이디어(<볼라레 [수학2]>에도 소개되었고, <볼라레 [미적분]>에도 다뤄질 예정이다)를 사용할 수 있다. $f'(1) = 0$도 알 수 있으므로 절편을 표시해보자.

문제 상황을 영상으로 표현하였다. 사실 이런 영상은 <볼라레 시리즈>에 많이 등장하고, <볼라레 [미적분]>에서도 등장할 예정이다.



왼쪽과 같이 개략적인 $y = f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다. 직선의 방정식이 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$이므로 구하고자 하는 영역의 넓이 $g(t)$는 정적분을 사용해 $\int_0^t \left\{ \left(f'(t)(x-t) + f(t)\right) - f(x) \right\} dx$가 되는데, 이때 t는 정적분 안에서 사용되는 변수(적분을 담당하는 변수)가 아니므로 바깥으로 내보내자. 정리하면 $g(t) = \int_0^t f'(t)x - tf'(t) + f(t) - f(x)dx$

$$= f'(t)\int_0^t xdx + t \times \left(-tf'(t) + f(t)\right) - \int_0^t f(x)dx$$

$$= f'(t)\frac{t^2}{2} + -t^2 f'(t) + tf(t) - \int_0^t f(x)dx = -\frac{t^2}{2}f'(t) + tf(t) - \int_0^t f(x)dx$$

가 된다. $g(1) = -\cancel{\frac{1}{2}f'(1)} + f(1) + \int_0^1 f(x)dx$가 되는데, 아직 모르는 게 두 개나 있어서 해결해야 한다. 우선 미분계수도 표현해보자.

$g'(t) = \cancel{-tf'(t)} + -\frac{t^2}{2}f''(t)\cancel{+f(t)}\cancel{+tf'(t)}\cancel{-f(t)} = -\frac{t^2}{2}f''(t)$(곱의 미분법을 했더니 모두 소거되었다)가 되고, $g'(1) = -\frac{1}{2}f''(1)$이 된다. 다음 페이지에서 계산해보자.

정리하자면 정답은 $-\frac{1}{2}f''(1)+f(1)-\int_0^1 f(x)dx$가 되는데, 어떻게 구할 수 있을까? 우선 $f''(x)$는 계산할 수 있으므로 계산하면 $f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}$에서 $f''(1)=-1-2=-3$가 된다. 한편 $\int_0^1 f(x)dx$를 직접 계산하기 위해서는 e^{1-x^2}의 부정적분을 알아야 하는데, 저 함수는 유명한 '그 상태로 적분할 수 없는 함수'이다. 조작이 있거나, 적당한 함수가 곱해져 있어야 적분을 계산할 수 있는 함수인데, 어떻게 하면 저 정적분을 다른 함수의 정적분으로 바꿔줄 수 있을까? $\int_0^1 1\times f(x)dx$로 간주해 부분적분을 해보면 $\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$가 된다. 정리하면 $f(1)-\int_0^1(-x^2+xe^{1-x^2})dx$가 되는데, 이게 이것과 소거되고, 이게 적분할 수 있는 함수임을 발견했는가? 이제 정답을 구할 수 있겠다. 한데 모아 계산하면 답은 $-\frac{1}{2}(-3)\cancel{+f(1)-f(1)}+\int_0^1(-x^2+xe^{1-x^2})dx=\frac{3}{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1$ $=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\left(0-\frac{1}{2}e\right)=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$가 된다. 정답은 ②.

정적분에서의 변수의 분리와 적분 퍼즐(정적분값을 알아내는 퍼즐)을 엮은, 매우 참신하면서 잘 만들어진 문항이다. 그래프를 그리는 데에 있어서 정교함이 있어야 쉽게 초반 스퍼트를 잡을 수 있었을 것으로 보인다($x>0$인 부분에서 도함수가 감소하여 $f(x)$가 위로 볼록함을 알면 문제 그림을 더 정교하게 그릴 수 있다). 사실 다양한 출제 POINT를 섞어놓은 문항은 {2025학년도 9월 모의고사 28번}에서도 출제된 것 있지만, 그때는 들어간 요소들이 다소 노골적이었던(그리고 쉬웠던) 반면, 이번에는 '그래프 그리기'나 '적분 퍼즐' 등이 숨어있어서 '이 생각까지 했어야 하는거구나~' 하는 식으로 풀렸다. 아마 이런 노골성이 {2025학년도 9월 모의고사 28번}과 이번 수능 28번의 평가 차이를 불러온 것이 아닐까?

29) 등비급수

두 번째 줄에 제시된 두 개의 시그마는 사실 매우 유명하다. $|a_n|+a_n$은 '양수인 것만 두 배, 음수는 0으로 바꿈', $|a_n|-a_n$은 '음수인 것만 -2배, 양수는 0으로 바꿈'이라는 의미를 가지고 있으므로 그대로 적용하면 '수열 $\{a_n\}$의 양수인 것들의 합은 $\frac{20}{3}$, 음수인 것들의 합은 $-\frac{10}{3}$라는 결론을 얻을 수 있다. 등비수열은 양수와 음수가 번갈아가며 나타나므로 홀수 번째들의 합은 $\frac{20}{3}$, 짝수 번째들의 합은 $-\frac{10}{3}$이라고 읽을 수 있다(등비급수가 수렴하므로 이 수열은 절댓값이 점점 작아지는 수열이다). 홀수 번째들의 합이 $a_1+a_3+a_5+\cdots$, 짝수 번째들의 합이 $a_2+a_4+a_6+\cdots=r(a_1+a_3+a_5+\cdots)$이므로 $r=-\frac{1}{2}$이고, $a_1+a_3+a_5+\cdots=a_1\times\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}a_1$이므로 $a_1=5$이다. 수열 $\{a_n\}$에 대한 모든 정보를 급수 두 개를 통해 알 수 있었다. $a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

수열의 모든 항의 부호가 같다면 두 시그마 중 하나는 무조건 0이었어야 한다.

이제 부등식을 살펴보자. $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$가 눈에 띄는데, $k=1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots$를 대입해보면 $\frac{k(k+1)}{2}$가 홀, 홀, 짝, 짝, 홀, 홀, 짝, 짝, …을 반복하므로 이 식은 -1, -1, 1, 1을 반복하게 될 것이다. 다시 말해, $\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)$ $=-a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}+a_{m+4}-\cdots+(?)a_{m+2n}$가 된다. 두 항씩 부호가 같게 묶이는 것을 발견했다. 계산해보면 $-(a_{m+1}+a_{m+2})+(a_{m+3}+a_{m+4})-\cdots$

$$=-\left(5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right)+\cdots$$

$$=-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m+\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times\frac{1}{4}-\cdots=-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times\frac{1-(-1/4)^n}{1-(-1/4)}$$

$=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times\left(1-(-1/4)^n\right)$이 된다. 극한을 보내면

$\lim_{n\to\infty}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m\times\left(1-(-1/4)^n\right)=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$가 되고, 주어진 부등식을 최종적으로 $\left(-\frac{1}{2}\right)^m<-\frac{1}{1400}$으로 정리할 수 있다.

두 항씩 묶어서 생각했을 때, $a_{m+3}+a_{m+4}$는 $a_{m+1}+a_{m+2}$의 $r^2=\frac{1}{4}$배이므로 주어진 $2n$개의 항의 합은(2개씩 n쌍으로 묶음)은 공비가 $-\frac{1}{4}$인 수열의 합이 될 것이다.

이 부등식을 만족시키는 자연수 m의 개수를 세 보자. 만약 m이 짝수라면 $\left(-\frac{1}{2}\right)^m$이 양수이므로 이 부등식을 만족시킬 수 없고, m은 홀수여야 한다. m이 홀수인 경우 좌변이 음수이므로 $-\left(\frac{1}{2}\right)^m<-\frac{1}{1400}$, $\frac{1}{2^m}>\frac{1}{1400}$, $1400>2^m$가 된다.

$2^{10}=1024<1400<2^{11}=2048$이므로 이 부등식을 만족시키는 자연수 m은 1,3,5,7,9이다. 정답은 $1+3+5+7+9=25$.

2024학년도 수능과 마찬가지로 급수와 계산을 묶어서 출제했는데, 그 때에는 삼차방정식 등 어려운 방정식을 풀게 한 것과 달리 이번에는 시그마 해석을 어렵게 만들었다. 다만, 여러 개를 대입해보면 그 규칙을 알 수 있었으므로 체감 난이도는 하락했을 것이다.

2025학년도 수능 - 수학

30) 삼각함수의 미분법

조건들을 보면서 a, b의 값을 구해보자. 조건 (가)에 의하면 $\sin b = 0,\ \sin(2\pi a + b) = 2\pi a + b$가 된다. 이 식은 $b =$ 정수 $\times\ \pi$의 꼴임을 말해주고 있고, 이 식은 놀랍게도 $2\pi a + b = 0$을 말해주고 있다! 두 곡선 $y = \sin x$와 $y = x$는 원점에서만 만나므로 방정식 $\sin \square = \square$의 근은 $\square = 0$뿐이다.
$1 \le a \le 2$이므로 가능한 (a, b)는 $(1, -2\pi), (1.5, -3\pi), (2, -4\pi)$의 3가지가 된다. 조건 (나)는 미분계수에 대한 이야기를 하고 있으므로 미분해보면 $f'(x) = (a + \cos x)\ \cos(ax + b + \sin x)$가 되는데, $f'(0) = (a + 1)\ \cos b$ 이므로 방정식 $(a + 1)\cos b = (a + \cos t)\cos(at + b + \sin t)$의 근을 분석하는 문제로 바뀐다. 방정식의 근 중 $t = 4\pi$가 있으므로 $(a + 1)\cos b = (a + 1)\cos(4\pi a + b)$이고, $4\pi a$가 2π의 배수여야 한다(아쉽게도 $a = 1, 1.5, 2$ 중 탈락하는 후보는 없다. 물론 $b + (4\pi a + b) =$ 정수 $\times\ 2\pi$여도 된다).

물론
$b + (4\pi a + b) =$ 정수 $\times\ 2\pi$
여도 된다.

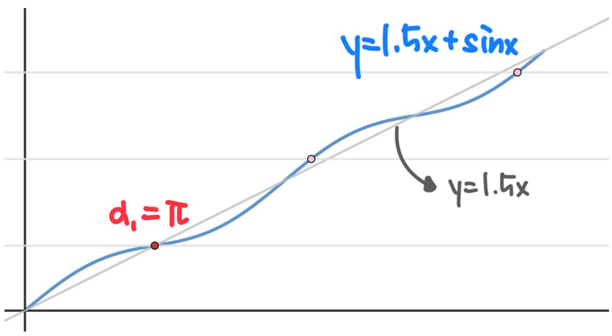
세 경우 중 어떤 경우가 맞는 경우일까? 한 경우씩 대입해서 확인해보자. b의 값이 얼마냐에 따라 식이 정리되는 양상이 다르기 때문이다.

① $a = 1, b = -2\pi$라면 방정식은 $2 = (1 + \cos t)\cos(t + \sin t)$(각변환의 과정에서 b가 사라짐)가 되는데, 이 방정식은 $t = 2\pi$를 또다른 근으로 갖는다! 따라서 방정식의 근 중 최솟값이 4π가 되지 못한다.

② $a = 1.5, b = -3\pi$라면 방정식은 $-2.5 = (1.5 + \cos t)\left(-\cos(1.5t + \sin t)\right)$(각변환의 과정에서 b가 사라짐)가 되는데, 이 방정식은 $t = 2\pi$를 또다른 근으로 갖지 않는다. $2.5 = (1.5 + \cos t)\cos(1.5t + \sin t)$에서 이 부분이 커봤자 2.5이므로 $1.5 + \cos t = 2.5$(즉, $t = 2\pi$)일 때 $\cos(1.5t + \sin t) = 1$인지만 확인하면 된다.

③ $a = 2, b = -4\pi$라면 방정식은 $3 = (2 + \cos t)\cos(2t + \sin t)$(각변환의 과정에서 b가 사라짐)가 되는데, 이 방정식은 $t = 2\pi$를 또다른 근으로 갖는다! 따라서 방정식의 근 중 최솟값이 4π가 되지 못한다.

이상에서 $a = 1.5, b = -3\pi$이다. $f'(x) = -(1.5 + \cos x)\ \cos(1.5x + \sin x)$인데, 이 부분이 항상 음수이므로 $f(x)$가 극대가 되려면 $\cos(1.5x + \sin x)$가 음수에서 ➡️ 양수가 되어야 하고, $1.5x + \sin x = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \cdots$여야 한다(왼쪽의 그림 참조, $1.5x + \sin x$는 증가함수이다). 편의상 $1.5x + \sin x = h(x)$라고 두면 $h(4\pi) = 6\pi$이므로 $h(x)$의 부호가 음 ➡️ 양으로 바뀌는 순간은 3번이고($n = 3$), 이중 가장 작은 근은 $x = \pi$이다. 따라서 $\alpha_1 = \pi$이다(사실 이 내용은 그래프를 그리면서 자연스럽게 알 수 있다).



$n\alpha_1 - ab = 3 \times \pi - 1.5 \times (-3\pi) = 7.5\pi = \frac{15}{2}\pi$이고, $p = 2, q = 15$이므로 정답은 17이다.