제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^3 - 8x + 7$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 8$　$f'(2) = 4$

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30$$

을 만족시킬 때, k 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k^2 + k = 30$　$k=5$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & (x < -2) \\ x^2 - a & (x \geq -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$-10 + a = 4 - a$　$a = 7$

5. 함수 $f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$f'(x)=2x(3x^2-x)+(x^2+1)(6x-1)$

$f'(1)=4+10=14$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$의 값은? [3점]

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$-\sin\theta=-\frac{1}{5}$ $\sin\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=5$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$f(x)=9x^2+2$ $f(1)=11$

8. 두 실수 $a = 2\log\frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20$, $b = \log 2$에 대하여 $a \times b$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$a = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{l\,20}{l\,2} = -1 + \frac{l\,20}{l\,2}$

$ab = -l\,2 + l\,20 = l\,10 = 1$

9. 함수 $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$$

일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 16　② 14　③ 12　④ 10　⑤ 8

$\int_0^a f(x)dx = 0$　$\left[x^3 - 8x^2 - 20x\right]_0^a$

$a^3 - 8a^2 - 20a = 0$　$a(a-10)(a+2) = 0$

$a = 10$

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

$a = 10$　$\frac{b\pi}{3} = 2\pi$　$b = 6$

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-\frac{3}{2}t^2-6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$v=3t^2-3t-6=3(t-2)(t+1)$ $t=2$

$a=6t-3$ $a=9$

12. $a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1=2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$ $a_1=2$ $b_2=4$ $b_n=2n$

$\frac{a_n}{2n+2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2=n-\frac{1}{2}$ $(n\geq 2)$

$a_n=(n+1)(2n-1)$

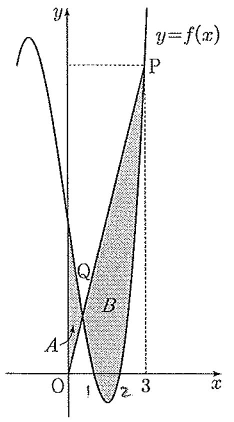
$\sum_{k=1}^{5}a_k=2+3\cdot 3+5\cdot 4+7\cdot 5+9\cdot 6=120$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 P$(3,\ f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



$f(x)=x^3+ax^2-7x+b$

$1+a-7+b=0 \qquad a+b=6$

$8+4a-14+b=0 \qquad 4a+b=6$

$a=0\ \ b=6 \quad \therefore f(x)=x^3-7x+6$

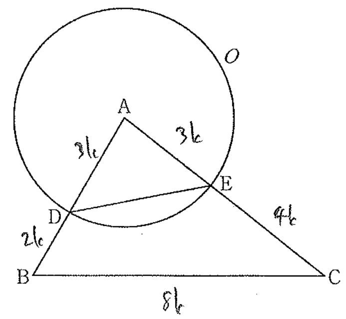
$f(3)=12 \qquad \mathrm{OP}\ \ y=4x$

$B-A=\int_0^3(-x^3+11x-6)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3$

$=-\frac{81}{4}+\frac{99}{2}-18=\frac{-81+198-72}{4}=\frac{45}{4}$

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.
$\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$) [4점]



① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$ ③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$ ⑤ $42+35\sqrt{3}$

$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=14 \qquad BC=\frac{\sin A}{\sin C}\cdot AB=8k$

$8^2=49+25-70\cos A \quad \cos A=\frac{1}{7} \quad \sin A=\frac{4\sqrt{3}}{7} \quad BC=8\sqrt{3}$

$k=\sqrt{3} \quad \sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad B=\frac{\pi}{3} \quad \overline{AH}=5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}$

$\frac{1}{2}\,8\sqrt{3}\left(\frac{15}{2}+3\sqrt{3}\right)=30\sqrt{3}+36$

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5}\,)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 15x + 7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

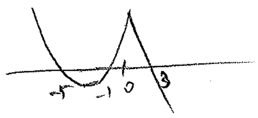
(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2) + g(2)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$g'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$ $g'(0) = 15$ $g(0) = 15$

$f'(0) = 15$ $f(0) = 7$ $f'(x) = -5x + 15$ $a = 9$



$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 15x + 7 & (x \leq 0) \\ -\frac{5}{2}x^2 + 15x + 7 & (x > 0) \end{cases}$$

$-8 + 36 - 30 + 7 - 10 + 30 + 7 = 32$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3) = \log_4(3x-5)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

$x > 3$ $(x-3)^2 = 3x - 5$

$x^2 - 9x + 14 = 0$ $x = 7$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 9x^2 + 4x$이고 $f(1) = 6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 33

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

$f(2) = 24 + 8 + 1 = 33$

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+4} = 12$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값을 구하시오. [3점] 96

48 + 48 = 96

19. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점] 41

$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2 = 6(x+a)(x-2a)$

$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3 = \frac{7}{27}$ $\therefore a = \frac{1}{3}$

$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$ $f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$

20. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x > k$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x)) = 3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점] 36

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$ $k = 5^{-k+3}$ $k^3 \cdot 5^{3k} = 5^9$

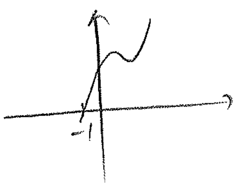
$f(5^{-9}) = ?$ $f(12) = 5^{-9}$ $f(f(12)) = f(5^{-9}) = 36$

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

16

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

$f(\alpha)=0 \Rightarrow f(2\alpha+1)=0 \quad \alpha=2\alpha+1 \quad \alpha=-1$



$f(-1)=0 \quad -1+a-b+4=0 \quad b=a+3$

$f(x)=x^3+ax^2+(a+3)x+4$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & a+3 & 4 \\ & & -1 & -a-1 & -4 \\ \hline & 1 & a+1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(\underline{x^2+(a+1)x+4})$

$D=(a+1)^2-16<0 \quad -3<a<5$

$a=4 \quad f(1)=1+4+7+4=16$

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

64

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (\lvert a_n \rvert \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } \lvert a_n \rvert \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$ 이다.
(나) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+2} \rvert$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

$a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$2n \quad n < \frac{n}{2},\ n-3 \quad |2n|=|\frac{n}{2}| \quad n=0 \quad a_3=0$

$|2n|=|n-3| \quad n=1 \text{ or } -3 \quad a_3=2 \text{ or } -6$

$2n+1 \quad 2n-2 \quad n-1 \quad |2n+1|=|n-1| \quad n=-2 \text{ or } 0 \quad a_3=-3 \text{ or } 1$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$\boxed{6} \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$\cancel{8},\ \boxed{10} > 5 > 2 \quad 1 \quad -2$

$\boxed{7},\ \boxed{8} > 4$

$\cancel{3},\ \boxed{-9} > -6 \quad 3 \quad -6$

$\boxed{-24} > -12$

$-6 \quad -3 \quad -6 \quad m=2\ (\times)$

$\cancel{4},\ 2 > 1 \quad -2 \quad m=2\ (\times)$

$6+10+7+8+9+24=64$

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1} dx$ 의 값은? [3점]

① $10+\ln 5$ ② $10+\ln 7$ ③ $10+2\ln 3$ ④ $10+\ln 11$ ⑤ $10+\ln 13$

$\int_0^{10} \frac{1}{x+1} dx + 10 = \ln 11 + 10$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{n^2+3}=1$일 때,

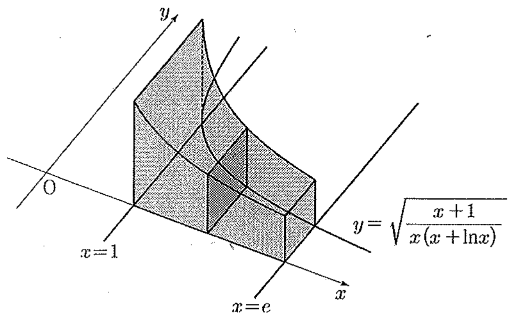
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n}-a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

let $a_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{1}{2}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x(x+\ln x)}}$ 과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

$\displaystyle\int_1^e \frac{x+1}{x(x+\ln x)}\,dx = \int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x+\ln x}\,dx$

let $t = x+\ln x$ $\displaystyle = \int_1^{e+1}\frac{1}{t}\,dt = \left[\ln t\right]_1^{e+1} = \ln(e+1)$

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

$g(0)=0$ $g'(0)=0$ $f(1)=-1$

$g'(x)=f'(e^x)e^x+e^x$ $g'(0)=f'(1)+1$

$f'(1)=-1$ $g'(x)\ge 0$ $e^x\{f'(e^x)+1\}\ge 0$

$f'(e^x)\ge -1$ $f'(x)=3(x-1)^2-1$

$\therefore f(x)=(x-1)^3-x$ $g(\ln t)=f(t)+t=8$

$t=3$ $g(\ln 3)=8$ $g'(\ln 3)=3f'(3)+3=36$

$\therefore h'(8)=\frac{1}{36}$

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$

④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

$f'(1)=0$ let $h(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

$g(t)=\int_0^t \{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$ $f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}$

$g(1)=\int_0^1 \{f'(1)(x-1)+f(1)-f(x)\}dx$

$=f'(1)\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_0^1+f(1)-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$

$g(t)=f'(t)\int_0^t x\,dx-tf'(t)\int_0^t dx+f(t)\int_0^t dx-\int_0^t f(x)dx$

$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+tf(t)-\int_0^t f(x)dx$

$g'(t)=-\frac{1}{2}t^2f''(t)$ $g'(1)=\frac{3}{2}$

$g(1)=f(1)-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-[xf(x)]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx$

$=\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 (-x^2+xe^{1-x^2})dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e$

$\therefore g(1)+g'(1)=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

25

$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \frac{20}{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = 20$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{10}{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 10$ $\frac{a}{1-r} = \frac{10}{3}$ $\frac{a}{1+r} = 10$

$\therefore r = -\frac{1}{2}$ $a = 5$

-1 -1 1 1 -1 -1 1 1 $\cdots$

$\frac{-a_{m+1}-a_{m+2}}{1-(\frac{1}{4})} > \frac{1}{700}$ $-a_{m+1}-a_{m+2} = -\frac{5}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^m$

$-2\cdot(-\frac{1}{2})^m > \frac{1}{700}$ $m=1,3,5,7,9$ $\boxed{25}$

30. 두 상수 $a(1\le a\le 2)$, b에 대하여 함수 $f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$
(나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0,4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 17

$f(0) = \sin b = 0$ $b = k\pi$ (k 정수)

$f(2\pi) = \sin(2\pi a+b) = 2\pi a+b$ $a = 1, \frac{3}{2}, 3$

$f'(x) = \cos(ax+b+\sin x)(a+\cos x)$

$f'(0) = \cos b(a+1)$ $f'(4\pi) = \cos(4\pi a+b)(a+1)$

$b = -2\pi a$ $a = \frac{3}{2}$

$\cos(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x)(\frac{3}{2}+\cos x) = 0$

$\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x = 2m\pi+\frac{\pi}{2}$ (극댓값) m 정수

$-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$ $x = \pi$, ○, ○

$\alpha_1 = \pi$ $n=3$ $3\pi-\frac{3}{2}\cdot(-3\pi) = \frac{15}{2}$ $\boxed{17}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.