제 2 교시

2025학년도 LAST DANCE 모의고사

수학 영역

짝수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

> 이 순간을 기억해 언제까지라도
>
> Just one Last Dance.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 문제지를 잘 확인하고, 답을 **정확히** 표시하시오. **(마킹실수 금지)**

○ 공통과목 ··········· 1~8쪽

○ 미적분 ··········· 9~12쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

한국교육과정평가원

제 2 교시

수학 영역

짝수형

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

5. $\tan\theta < 0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)[3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

9. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

10. $x \ge 0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 양의 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고
>
> $f(x+1)=\dfrac{1}{f(x)}$ 이다.

$\int_0^2 f(x)dx$ 의 값이 최소이도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x+1)dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{f(x)+\frac{1}{f(x)}}_{\ge 2} dx$$

≥ 2 (산술기하)

$\therefore [0,1]$ $f(x)=1$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$는

$$x(t)=t^3+at^2+2t+b\ (a<0)$$

이다. $x(t)$와 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 시각 t에 대하여 $x(t) \geq v(t)$이다.
(나) $x(t)=v(t)$인 t의 개수가 2이다.

$x(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

12. 함수 $f(x)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ (0<x\leq 1)$이 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+1)=f(x)+c$$

를 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3일 때, $a+c$의 값의 최댓값은? (단, a는 양의 실수이다.)[4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

i) $f(x)$가 연속함수

⇒ f는 감소함수가 되니 $y=x$와 교점 1개, 모순

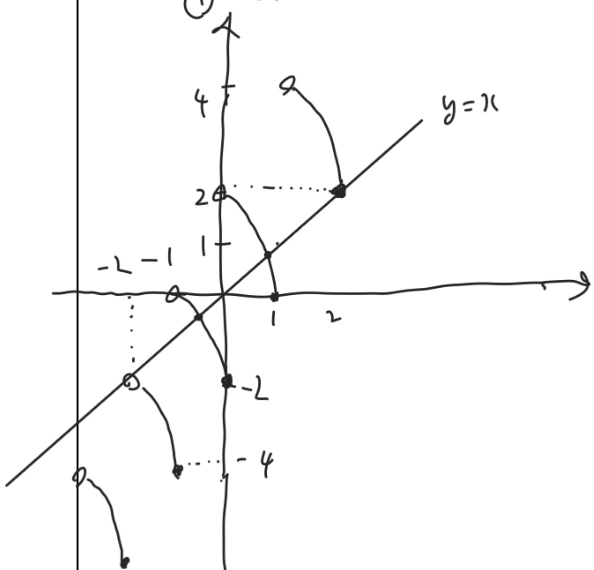
ii) $f(x)$가 불연속함수

⇒ $c>0$ 이고 일대일 대응이 되려면 $a=c$

$\therefore a=c>0$

주요개념: 불연속이여도 일대일대응이면 역함수 존재

① $a=2$



⇒ 교점 3개

② $a>2$ → 교점 2개

③ $\frac{1}{2}<a<2$ → 교점 3개 보다 많음.

④ $a=\frac{1}{2}$ → 교점 3개

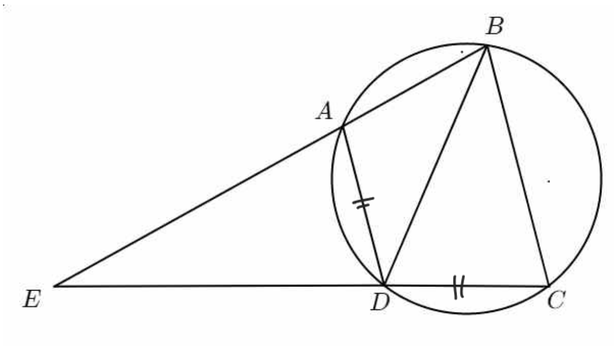
⑤ $0<a<\frac{1}{2}$ → 교점 2개

$\therefore$ $a+c$의 최댓값은 4

13. 그림과 같이 원 O에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 두 직선 AB, CD의 교점을 E라 할 때, 아래 도형이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{EB}=6$, $\overline{BC}=3$
>
> (나) $\overline{AD}=\overline{CD}$이고, 선분 AD와 선분 BC가 평행하다.

선분 BD의 길이는? [4점]



① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

14. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{5}{3}a_n & (a_n\text{을 4로 나눈 나머지가 3인 경우}) \\ a_n-5 & (\text{그 외의 경우})\end{cases}$$

을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<100$일 때, a_1의 최댓값은? [4점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

만약 모든 n에 대해 $a_{n+1} = a_n - 5$이면

모든 항이 자연수가 안되니 $a_{m+1} = \frac{5}{3}a_m$인

자연수 m이 존재한다.

이때 $\frac{5}{3}a_m$도 자연수이고, $a_m = 4k+3$ 이므로

(k는 음이 아닌 정수)

k는 3의 배수이다.

∴ $a_m = 3, 15, 27, 39 \cdots$ 이 될 수 있다

이때 $a_m = 3, 27$ 이면 모든항이 자연수인 조건 위배.

a_m이 39부터 그 이후이면 $\forall n, a_n < 100$에 모순.

∴ $a_m = 15$

⇒ a_n이 15, 25, 20, 15, 25, ⋯

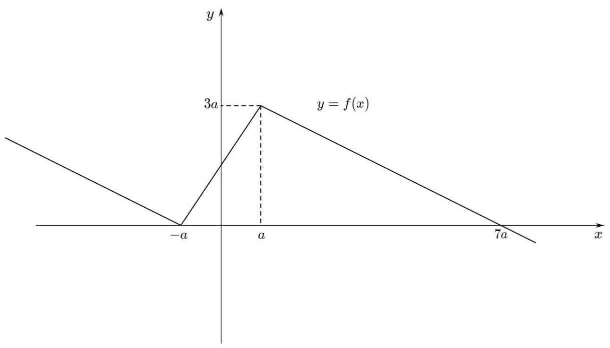
주기수열이 된다. 이때 a_1의 최대는

$a_2 = 25$ 일때 $a_1 = 30$ 인 경우이다.

15. 함수 $f(x)=|x+a|-|x-a|-\frac{1}{2}(x-3a)\ (a>0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{p}^{x}\{f(t)-k\}dt$$

가 가지는 서로 다른 모든 극값의 합이 0이 되도록 하는 서로 다른 실수 p의 개수를 $h(k)$라 하자. $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱이 $9\sqrt{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는? [4점]



① $36+24\sqrt{2}$ ② $36+25\sqrt{2}$ ③ $37+24\sqrt{2}$

④ $37+25\sqrt{2}$ ⑤ $38+24\sqrt{2}$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55, \quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

20. 이차함수 $f(x)=x(x-a)$와 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\frac{\{g(x)-f(x)\}\times\{g(x)-f'(x)\}}{g(x)+f'(x)}=0$$이다.

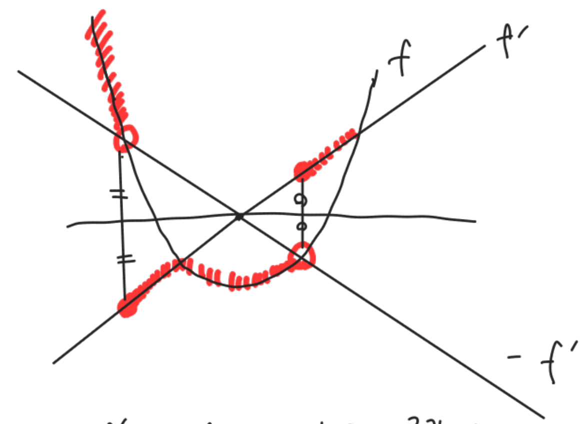
(나) 함수 $\{g(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이다.

함수 $g(x)$가 극값을 가질 때의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, …. , α_m (m은 자연수) 이다. $\alpha_3+g(\alpha_3)=0$일 때, $\boxed{g(\alpha_1)\times g(\alpha_2)}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{g(m-1)\ \times}$

(가) $g <$ f or f' $\cap$ $g \neq -f'$

(나) $x=k$ 에서 g 불연속 $\Rightarrow$ $g(k+)=-g(k-)$
$g(k)$는 $g(k+)$ or $g(k-)$



g가 f'과 만나지 않고 극값의 개수가 최대일때
는 위 그림이 유일하고 $\alpha_3+g(\alpha_3)=0$ 이므로
g는 최소 극값은 3개 가지니 위그림이 정답인 상황이다.
(불연속 일때 는 극소이지만, 는 극값 ×)

주요개념

한편 $\alpha_3+g(\alpha_3)=0$ 이므로 $a=2$

$g(\alpha_1)\times g(\alpha_2)$는 $|f$ 와 f'의 교점의 y좌표 곱$|$
으로 생각하고 근과 계수관계 쓰면 계산 편함.

21. 두 상수 a $(0<a<1)$, b와 x축 위의 점 A에 대하여 곡선 $y=\log_a x$가 곡선 $y=-\log_a(b-ax)$와 두 점 A, B에서 만나고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC가 이등변 삼각형일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

22. 수열 $\{a_n\}$의 제 1항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = a_n + na_{n+1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{6} S_k = 1214$, $\sum_{k=1}^{4} S_k = 640$일 때, $\sum_{k=1}^{6} ka_k$의 값을 구하시오. [4점]

$S_n = a_n + n a_{n+1}$

$S_n - a_n = S_{n-1} = n a_{n+1}$

$\therefore S_n = (n+1) a_{n+2}$

① $\sum_{k=1}^{6} S_k = \begin{matrix} a_1 + a_1 + a_1 & \cdots & + a_1 \\ + a_2 \quad + a_2 & & + a_2 \\ + a_3 & & \vdots \\ & & a_6 \end{matrix} = \sum_{k=1}^{6} (7-k) a_k$

$\therefore 7S_6 - \sum_{k=1}^{6} k \cdot a_k = 1214 \cdots\cdots$ ㉠

② $\sum_{k=1}^{4} S_k = \sum_{k=1}^{4} (k+1) \cdot a_{k+2} = \sum_{k=1}^{4} \{(k+2) a_{k+2} - a_{k+2}\}$

$= \begin{matrix} a_1 + 2a_2 + \\ -a_1 - 2a_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 \\ -a_3 - a_4 - a_5 - a_6 \end{pmatrix}$

$= \sum_{k=1}^{6} k \cdot a_k - S_6 - a_2 \quad \left(\begin{matrix} S_1 = a_1 + a_2 \\ \therefore a_2 = 0 \end{matrix} \right)$

$= \sum_{k=1}^{6} k \cdot a_k - S_6 = 640 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 연립하면 $\sum_{k=1}^{6} k \cdot a_k = 949$

* 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. 마킹실수하면 가만 두지 않겠습니다 잘 확인해야 해요

◦ 이어서, 「필수과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목은 중요하지 않습니다.

cf) 노가다 해도 할만함.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

짝수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

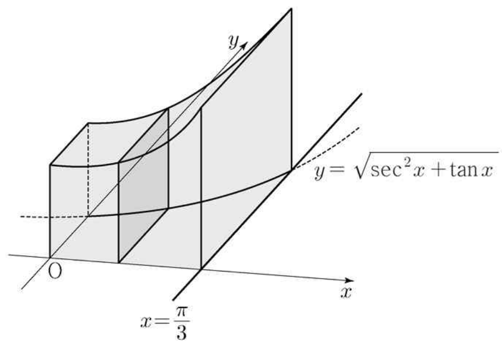
24. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t \to \pi-} \frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

(28번)

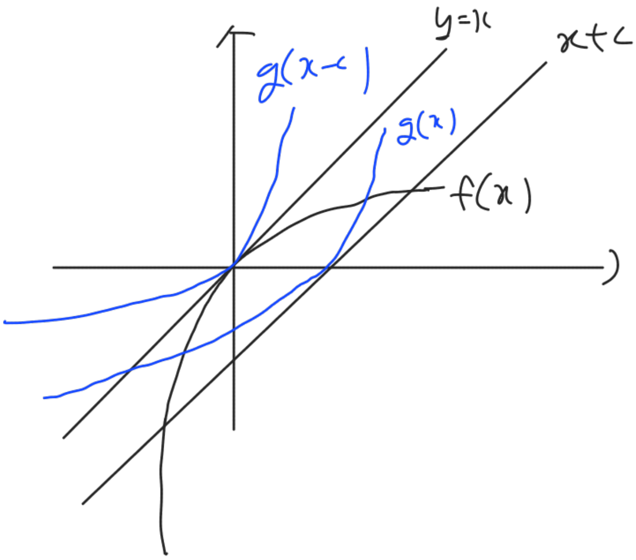
$f'(g)g'=1$

$f(g(x))=x+c$, $f(g(x-c))=x$

g가 일대일대응 → f도 일대일대응

∴ $f(x)$와 $g(x-c)$는 역함수

i) $c<0$ 일경우 주요 개념.



$x<0$ 에서 $f(x)$가 4차함수이므로

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 이고 $\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\infty$ 이므로

$\lim_{x\to-\infty} g'(x)=0$ 이다. ∴ g와 f 교점 발생

⇒ $h(t)$의 최소는 2가 아닌 0이 되므로 모순.

28. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 어떤 사차함수의 일부이다.

(나) 실수 전체의 집합에서 $f(x) \le x$이고, $f(0)=0$이다.

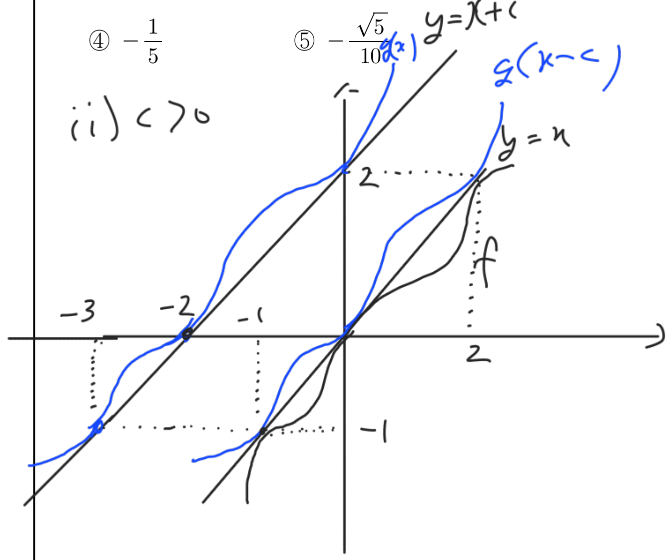
함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 일대일 대응인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

을 만족시킨다. 직선 $y=t$(t는 모든 실수)가 함수 $f(x)$와 만나는 점과 함수 $g(x)$와 만나는 점 사이의 거리를 $h(t)$라 정의하자. $h(t)$는 t의 값이 $a,\ a+1,\ a+3\ (a<0)$ 일 때만 최솟값 2를 가진다. $\int_{-3}^{a-1}(x+2)g'(x)dx+\frac{g(0)}{4}$의 최솟값은? [4점]

① $-\frac{1}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{10}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{5}}{10}$

ii) $c>0$



$h(t)$의 최소는 c이고 ∴ $c=2$

(∵ $f(x)\le x$, $f(0)=0$)

$a,\ a+1,\ a+2$ 중 하나는 0 이고 $a<0$ 이므로

$a+1=0$ or $a+2=0$ 이다. 그러나 4차함수 개형 특성상 $a+1=0$ 이다. ∴ 위 그림이 정답

계산) $\int_{-3}^{-2}(x+2)g'(x) = \int_{-1}^{0} x g'(x-2)$

$= \int_{-1}^{0} f(x)dx$ 로 계산.

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 제 1항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 0이 아닌 두 상수 k, c에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{a_n}-c\right)=\frac{4}{27c},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_{n+2}}{a_{n+1}}-a_1\right)=k$$

이 성립한다. $\frac{a_4}{k}$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim \frac{S_n}{a_n} = c$

$\frac{S_n}{a_n} = \frac{\frac{a_1}{r-1}r^n - \frac{a_1}{r-1}}{a_1(r)^{n-1}} = \frac{r}{r-1} - \frac{1}{(r-1)(r)^{n-1}}$

$\therefore |r|>1$ 이고 $\frac{r}{r-1} = c$, $\frac{S_n}{a_n} - c = -\frac{1}{(r-1)(r)^{n-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(r-1)(r)^{n-1}} = -\frac{1}{(r-1)} \times \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{-r}{(r-1)^2}$

$\therefore \frac{-r}{(r-1)^2} = \frac{4}{27c} = \frac{4(r-1)}{27r}$

$\therefore r = \frac{1}{4}$ or -2

$|r|>1$ 이므로 $r=-2$, $c = \frac{2}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_{n+2}}{a_{n+1}} - a_1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+2}+S_{n+1}}{a_{n+1}} - a_1\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} + r - a_1\right\}$

$\lim\left(\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} + r - a_1\right) = c + r - a_1 = \frac{2}{3} - 2 - a_1 = 0$

$\therefore a_1 = -\frac{4}{3}$, $k = \frac{2}{9}$

$\therefore \frac{a_4}{k} = 48$

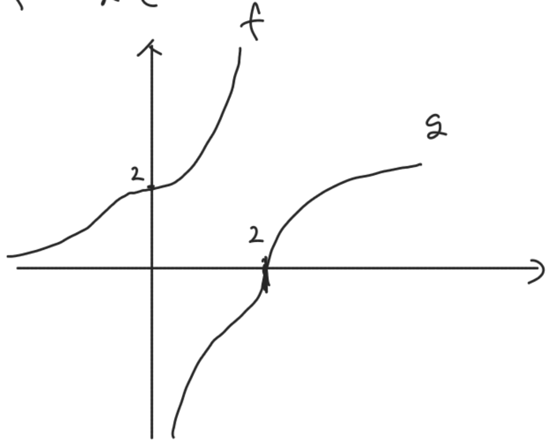
30. 함수 $f(x)=e^x(x^2-2x+2)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\{g(x)\}^n$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 n이 최소일 때 $h'(2)$의 값을 구하시오. [4점]

x^2-2x+2

$f' = x^2 e^x$



$f(0)=2$, $f'(0)=0$, $g(2)=0$ 이므로

$x=2$에서만 $g(x)$는 미불이다 주요개념.

$\therefore x=2$에서만 $h(x)$를 관찰.

$\lim_{x\to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} h'(x)$

$= \lim_{x\to 2} n\{g(x)\}^{n-1} \cdot g'(x)$

$= \lim_{x\to 2} \frac{n \cdot g^{n-1}}{f'(g(x))}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{n \cdot g^{n-1}}{e^g \cdot g^2}$

$\therefore n$ 최소는 3이고

$h'(2) = 3$

※ 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. 마킹실수하면 가만 두지 않겠다고 말했습니다!!!!

◦ 수고하셨습니다. 2025학년도 수능 화이팅~!!