TH①. 삼각함수의 활용

출제 : 10번,11번,12번 또는 20번

[Prediction] 30%

6월, 9월 평가원에서 문장형 문제로 삼각함수 활용 문항이 출제가 되었다. 하지만 수능은 똑같이 나온다고 확신할 수는 없기 때문에 기존에 도형이 나오는 문항도 연습을 해야한다.

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

1. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

2025학년도 9월 평가원모의고사

2025 Trend

2. $\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1, \ \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

3. 삼각형 ABC에서

$$\sin A = \sin C,\ \sin A : \sin B = 2 : 3$$

일 때, $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos C}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

4. 예각삼각형 ABC에 대하여

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 + 4\overline{\mathrm{CA}},$$
$$\overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + 8\overline{\mathrm{CA}}$$

가 성립할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}\cos C}{\overline{\mathrm{AB}}\cos A}$ 의 값을 구하시오.

5. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때,

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$의 값을 구하시오.

> (가) $\sin(B+C)+\sin(A+C)\times\cos(A+B)=0$
>
> (나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

6. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC에 대하여 등식 $\sin A=k(\sin B-\sin C)$가 성립하도록 하는 양수 k가 존재할 때, k의 값은?

> (가) $\cos A\cos B\cos C=0$
>
> (나) $(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A)=0$

① $\sqrt{2}-1$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ $\sqrt{2}+1$

7. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin A = \cos B$

(나) $\sin A + \sin B = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, $\dfrac{\overline{BC} \times \overline{CA}}{R^2}$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{6}{5}$ ③ $\dfrac{7}{5}$ ④ $\dfrac{8}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{5}$

2024년도 수능특강
2025 Trend

8. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

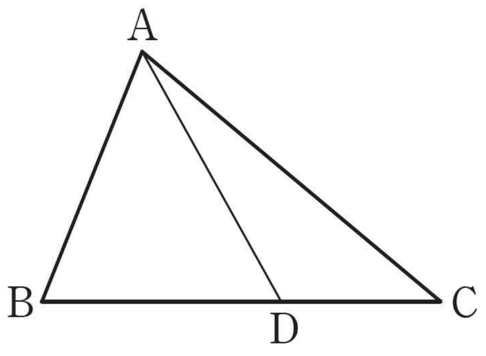
(가) $\sin A = \sin C$

(나) $\cos A + 2\cos B = 3\cos C$

삼각형 ABC의 넓이가 12일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

① $4\sqrt{3}\pi$ ② $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $5\sqrt{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

9. 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 D라 하자. $\dfrac{\cos(\angle ABD)}{\cos(\angle ACD)}=\dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{95}}{10}$ ② 1 ③ $\dfrac{\sqrt{105}}{10}$
④ $\dfrac{\sqrt{110}}{10}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{115}}{10}$

1. [정답] ⑤

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 10 [4.00점]

[해설]

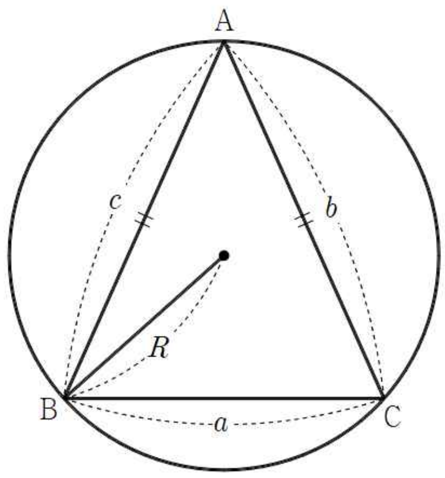
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\quad R=3$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$$\frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R} \qquad \therefore\ 3a=2b$$

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$ 이므로

$$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C} \qquad \therefore\ b=c$$



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+b^2-\left(\frac{2}{3}b\right)^2}{2b^2}=\frac{7}{9}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=2R, \qquad a=2\times3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}a\right)\times\left(\frac{3}{2}a\right)\times\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

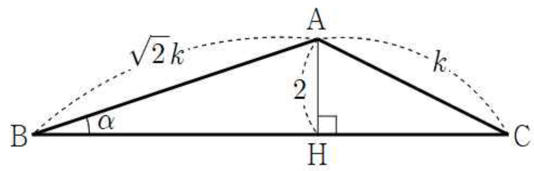
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$=\frac{64\sqrt{2}}{9}$$

2. [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\quad R=5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{AC}}=k\ (k>0)$으로 놓고 $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin\alpha}=2R=10\sqrt{2}, \qquad \sin\alpha=\frac{k}{10\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 ABH에서 $\quad \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{2}k} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{k}{10\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}k}, \qquad k^2=20$$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{2k^2-4}=6$$

3. 정답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

즉, $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$\sin A=\sin C$에서 $a=c$

$\sin A:\sin B=2:3$에서 $a:b=2:3$

$a=2k,\ b=3k,\ c=2k\ \ (k>0)$으로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(3k)^2+(2k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times2k}=\frac{3}{4}$$

$$\cos B=\frac{(2k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\times2k\times2k}=-\frac{1}{8}$$

$$\cos C=\cos A=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\cos A+\cos B}{\cos C}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{6}$$

4. 정답 2

풀이

$\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+4\overline{\mathrm{CA}}$에서

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-4\overline{\mathrm{CA}} \qquad \cdots\cdots ㉠$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos A \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$-4\overline{\mathrm{CA}}=-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos A$

$\overline{\mathrm{AB}}\cos A=2$

$\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+8\overline{\mathrm{CA}}$에서

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 8\overline{CA}$ …… ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$-8\overline{CA} = -2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$

$\overline{BC}\cos C = 4$

따라서

$$\frac{\overline{BC}\cos C}{\overline{AB}\cos A} = \frac{4}{2} = 2$$

5. **정답** 50

길잡이

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC의 모양을 알아낸다.

풀이

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로 $B+C=\pi-A$,

$A+C=\pi-B$, $A+B=\pi-C$

$\sin(B+C)+\sin(A+C)\times\cos(A+B)=0$에서

$\sin(\pi-A)+\sin(\pi-B)\times\cos(\pi-C)=0$

$\sin A-\sin B\times\cos C=0$

$\sin A=\sin B\times\cos C$ …… ㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$이므로 $\overline{AB}=c$,

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{5}$, $\sin B=\frac{b}{5}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{5}=\frac{b}{5}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $a^2+c^2=b^2$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다

이때 직각삼각형 ABC의 빗변이 외접원의 지름이므로

$b=\overline{CA}=5$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2&=c^2+a^2+b^2\\&=2b^2=2\times5^2=50\end{aligned}$$

6. **정답** ⑤

풀이

$\cos A\cos B\cos C=0$ 에서

$\cos A=0$ 또는 $\cos B=0$ 또는 $\cos C=0$

즉, 삼각형 ABC의 내각 중 하나는 직각이다.

$(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A)=0$ 에서

$\cos A=\cos B$ 또는 $\cos B=\cos C$ 또는 $\cos C=\cos A$

즉, 삼각형 ABC의 내각 중 적어도 두 각의 크기가 서로 같다.

이때 삼각형 ABC의 한 내각이 직각이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하고 $\overline{AB}=c$,

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 등식 $\sin A=k(\sin B-\sin C)$

$\frac{a}{2R}=k\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right)$

$a=k(b-c)$ …… ㉠

한편, 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로 세 변의 길이의 비는

$a:b:c=1:1:\sqrt{2}$ 또는 $a:b:c=1:\sqrt{2}:1$ 또는

$a:b:c=\sqrt{2}:1:1$

이때 등식 ㉠이 성립하도록 하는 양수 k가 존재하려면

$a:b:c=1:\sqrt{2}:1$, 즉 $a=c$, $b=\sqrt{2}a$이어야 하므로

등식 ㉠에서

$a=k(\sqrt{2}a-a)$

$$k=\frac{a}{(\sqrt{2}-1)a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

7. **정답** ②

풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$$

이므로

$\overline{BC}=2R\sin A$

$\overline{CA}=2R\sin B$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{R^2}&=\frac{2R\sin A\times2R\sin B}{R^2}\\&=4\sin A\sin B\end{aligned}$$

조건 (나)의 $\sin A+\sin B=\frac{2\sqrt{10}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2A+\sin^2B+2\sin A\sin B=\frac{8}{5}$ …… ㉠

이때 조건 (가)의 $\sin A=\cos B$를 ㉠에 대입하면

$\cos^2B+\sin^2B+2\sin A\sin B=\frac{8}{5}$

$1+2\sin A\sin B=\frac{8}{5}$

$\sin A\sin B=\frac{3}{10}$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{R^2}&=4\sin A\sin B\\&=4\times\frac{3}{10}\\&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

8. **정답** ⑤

풀이

조건 (가)의 $\sin A=\sin C$를 만족시키려면 $A=C$ 또는 $A=\pi-C$이어야 한다. 이때 $A=\pi-C$, 즉 $A+C=\pi$이면 $B=0$이 되어 삼각형 ABC가 될 수 없다.

따라서 $A=C$

$A=C$를 조건 (나)의 $\cos A+2\cos B=3\cos C$ 에 대입하면

$\cos A+2\cos B=3\cos A$

$\cos A=\cos B$

$A=B$

따라서 세 내각의 크기가 모두 같으므로 삼각형 ABC는 정삼각형이고,

$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a $(a>0)$이라 하면 이 삼각형의 넓이가 12이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=12$

$a^2=16\sqrt{3}$

정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

$R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 S라 하면

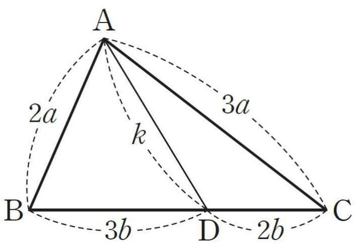
$S=\pi R^2$

$=\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$

$=\dfrac{\pi}{3}a^2$

$=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

9. 정답 ⑤



$\overline{AB}=2a$, $\overline{AC}=3a$ $(a>0)$으로 놓고 $\overline{BD}=3b$, $\overline{DC}=2b$ $(b>0)$을 으로 놓자.

$\overline{AD}=k$ $(k>0)$으로 놓으면

$\dfrac{\cos(\angle ABD)}{\cos(\angle ACD)}=\dfrac{1}{2}$에서

$2\cos(\angle ABD)=\cos(\angle ACD)$

$2\times\dfrac{(2a)^2+(3b)^2-k^2}{2\times 2a\times 3b}=\dfrac{(3a)^2+(2b)^2-k^2}{2\times 3a\times 2b}$

$k^2=14b^2-a^2$ …… ㉠

$\cos(\angle BDA)=\cos(\pi-\angle CDA)=-\cos(\angle CDA)$ 이므로

$\dfrac{(3b)^2+k^2-(2a)^2}{2\times 3b\times k}=\dfrac{(2b)^2+k^2-(3a)^2}{2\times 2b\times k}$

$k^2=7a^2-6b^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $14b^2-a^2=7a^2-6b^2$

즉, $b^2=\dfrac{2}{5}a^2$이므로 ㉡에 대입하면 $k^2=7a^2-\dfrac{12}{5}a^2=\dfrac{23}{5}a^2$

따라서 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{k}{2a}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{23}{5}}=\dfrac{\sqrt{115}}{10}$