121 GEOMETRY PROBLEMS

이호주 hojoolee@korea.com [1]

I. 이론

논증 기하의 잘 알려진 정리들을 증명없이 소개한다.

1. *(Pythagoras) $\angle B = 90^\circ$인 삼각형 ABC에서 다음을 얻는다.*

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

2. *(Pappus) 삼각형 ABC의 변 BC의 중점 M에 대해, 다음을 얻는다.*

$$AB^2 + AC^2 = 2\left(AM^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right)$$

3. *(Stewart) 평면위의 임의의 세 점 A, B, C와 선분 BC위의 임의의 점 P에 대해, 다음을 얻는다.*

$$PC \cdot AB^2 + PB \cdot AC^2 = BC \cdot (AP^2 + BP \cdot CP)$$

4. *(Ptolemy) 한 원에 내접하는 볼록 사각형 $ABCD$에서, 다음이 성립한다.*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

5. *(Ptolemy-Euler) 평면위의 임의의 네 점 A, B, C, D에 대해, 다음이 성립한다.*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

Remark 1. *Pappus의 중선 정리는 Pythagoras의 정리의 한 일반화이고, Stewart의 정리는 Pappus의 중선 정리의 한 일반화이다. 또한, Ptolemy의 정리는 Pythagoras의 정리의 한 일반화이다.*

[1] 이 글은 http://my.netian.com/~ideahitme/eng.html 에서 다운 받을 수 있습니다.

6. *(Euler) 사각형 $ABCD$의 두 대각선의 중점을 M, N이라 하면, 다음이 성립한다.*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

7. *평면위의 임의의 네 점 A, B, C, D에 대해, 다음이 성립한다.*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2$$

8. *(Carnot, Leibniz) 무게 중심이 G인 삼각형 ABC가 놓여 있는 평면위의 임의의 점 P에 대해, 다음이 성립한다.*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$$

9. *(Heron) 넓이가 K인 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c이고, $s = \frac{a+b+c}{2}$라 할 때, 다음이 성립한다.*

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

10. *(Brahmagupta) 네 변의 길이가 a, b, c, d이고, 한 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 넓이 K는 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$라 할 때, 다음과 같이 주어진다.*

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Remark 2. *Brahmagupta의 공식에서 $d \to 0$하면, Heron의 공식을 얻는다.*

11. *삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r, 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면, 다음이 성립한다.*

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

12. *삼각형 ABC의 외접원, 내접원, 세 방접원의 반지름의 길이를 각각 R, r, r_A, r_B, r_C라 하면, 다음이 성립한다.*

$$r_A + r_B + r_C = 4R + r\ ,\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$$

13. *(Euler) 외접원의 반지름의 길이가 R, 내접원의 반지름의 길이가 r인 삼각형 ABC의 외심을 0, 내심을 I라 하면, $OI^2 = R^2 - 2Rr$이다.*

14. *(Euler) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면, $R \geq 2r$이고, 등호는 ABC가 정삼각형일 때, 성립한다.*

Remark 3. *정리 11, 12, 13을 각각 이용하여, 정리 14를 얻을 수 있다.*

15. *삼각형 ABC의 수심을 H, 무게중심을 G, 외심을 O라 하면, 세 점 H, G, O는 이 순서로 한 직선위에 놓여 있고, $HG = 2GO$이다. 세 점 H, G, O가 이루는 직선을 삼각형 ABC의 Euler 직선이라 부른다.*

16. *세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC의 수심을 H, 외심을 O, 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면, 다음이 성립한다.*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\ ,\ OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

17. *삼각형 ABC의 내심을 I, 무게 중심을 G, 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면, 다음이 성립한다.*

$$IG^2 = r^2 + \frac{1}{36}\left(5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(ab + bc + ca)\right)$$

18. *세 변의 길이가 a, b, c이고, 내심이 I인 삼각형 ABC가 놓여 있는 평면 위의 임의의 점 P에 대해, 다음이 성립한다.*

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = (a + b + c) \cdot PI^2 + abc$$

19. *(Steiner-Lehmus) 두 내각의 이등분선의 길이가 같은 삼각형은 이등변 삼각형이다.*

20. *삼각형 ABC에서 각 B, C의 이등분선이 대변과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 직선 PQ위의 임의의 점 X에 대해, (적당히 부호를 취하면) 다음을 얻는다.*

$$\pm d(X, BC) \pm d(X, CA) \pm d(X, AB) = 0$$

(단, $d(S, TU)$는 점 S에서 직선 TU까지의 거리를 나타낸다.)

21. *(Carnot) 외접원의 반지름의 길이가 R, 내접원의 반지름의 길이가 r인 삼각형 ABC의 외심을 O라 할때, (적당히 부호를 취하면) 다음을 얻는다.*

$$\pm d(O, BC) \pm d(O, CA) \pm d(O, AB) = R + r$$

22. *(Pampeiu)* *정삼각형* ABC*의 외접원을* ω*라 하면, 다음을 얻는다.*

(1) $P \in \omega$*일 때, (적당히 부호를 취하면)* $\pm PA \pm PB \pm PC = 0.$
(2) $P \notin \omega$*일 때,* PA*,* PB*,* PC*는 한 삼각형의 세 변의 길이를 이룬다.*

23. *한 변의 길이가* k*인 정삼각형* ABC*가 놓여 있는 평면위의 임의의 점* P*에 대해, (적당히 부호를 취하면) 다음을 얻는다.*

$$\pm d(P,AB) \pm d(P,BC) \pm d(P,CA) = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

24. *(Morley)* *삼각형* ABC*의 세 내각의 삼등분선이 서로 이웃한 것끼리 만나는 점을 각각* X,Y,Z*라 하면,* XYZ*는 정삼각형이다.*

25. *(나비 정리) 한 원* ω*위의 한 현* XY*의 중점을* M*이라 하자.* M*을 지나는 임의의 두 현* TU*,* VW*에 대해,* TW*와* VU*가* XY*와 만나는 점을 각각* E*,* F*라 하면,* M*은* EF*의 중점이다.*

26. *외접원의 반지름의 길이가* R*인 삼각형* ABC*의 외심을* O*, 수심을* H*라 하자.* A*,* B*,* C*에서 대변에 내린 세 수선의 발을 각각* H_a*,*H_b*,*H_c*,* BC*,* CA*,* AB*의 중점들을 각각* M_a*,* M_b*,* M_c*, 세 변* AH_a*,* BH_b*,* CH_c*의 중점들을 각각* N_a*,* N_b*,* N_c*라 하자. 그러면, 9개의 점들* H_a*,*H_b*,*H_c*,* M_a*,* M_b*,* M_c*,* N_a*,* N_b*,* N_c*은 한 원위에 놓여 있고, 이 원을 삼각형* ABC*의 구점원이라 부른다. 삼각형* ABC*의 구점원의 중심* N*은* OH*의 중점이고, 구점원의 반지름의 길이는* $\frac{R}{2}$*이다.*

27. *(Hamilton)* *삼각형* ABC*의 수심을* H*라 할 때, 네 삼각형* ABC*,* HBC*,* AHC*,* ABH*의 구점원은 일치한다.*

28. *(Feuerbach)* *한 삼각형의 구점원은 그 삼각형의 내접원과 세 방접원에 접한다.*

29. *삼각형* ABC*의 외접원을* ω*라 하자. 삼각형* ABC*가 놓여 있는 평면위의 한* P*점에서 세 직선* BC*,*CA*,*AB*에 내린 수선의 발을 각각* D*,* E*,* F*라 하면, 다음 두 명제는 서로 동치이다.*

(1) 점 P*가* ω*위에 놓여 있다.*
(2) 세 점 D*,* E*,* F*는 한 직선위에 놓여 있다.*

점 P*가* ω*위에 놓여 있을 때, 세 점* D*,* E*,* F*가 이루는 직선을 점* P*에 대한 삼각형* ABC*의 Simson 직선이라 부른다.*

30. *수심이 H인 삼각형 ABC의 외접원위의 점 P의 Simson 직선은 PH를 이등분한다.*

31. *삼각형 ABC의 외접원을 ω라 하고, PQ가 ω의 한 지름이라 하자. 그러면, P에 대한 삼각형 ABC의 Simson 직선과 Q에 대한 삼각형 ABC의 Simson 직선은 서로 직교하고, 이 두 직선의 교점은 삼각형 ABC의 구점원위에 놓여 있다.*

32. *삼각형 ABC의 세 꼭지점 A, B, C에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 H_a,H_b,H_c라 하자. H_a에서 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 H_{ab}, H_{ac}라 하고, H_b에서 BC, BA에 내린 수선의 발을 각각 H_{bc}, H_{ba}라 하고, H_c에서 CA, CB에 내린 수선의 발을 각각 H_{ca}, H_cb라 하자. 이 때, 6개의 점들 H_{ab}, H_{ac}, H_{bc}, H_{ba}, H_{ca}, H_{cb}은 한 원위에 놓여 있다. 이 원을 삼각형 ABC의 Taylor 원이라 부른다.*

33. *(Brahmagupta) 한 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 두 대각선 AC와 BD가 서로 직교할 때, 두 대각선의 교점 T에서 사각형의 한 변에 수직인 직선을 그으면, 그 직선은 대변을 이등분한다.*

34. *(Menelaus) 한 직선위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 주어져 있을 때, 임의의 $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$에 대해, 다음 두 조건은 서로 동치이다.*

(1) A_1, B_1, C_1이 한 직선위에 놓여 있다.
(2) $\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1$

35. *(Ceva) 한 직선위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 주어져 있을 때, 임의의 $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$에 대해, 다음 두 조건은 서로 동치이다.*

(1) AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만나거나, 서로 평행하다.
(2) $\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1$

36. *(Van Obel) 한 직선위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 주어져 있을 때, $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$이 있어서, 세 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만나면, 다음이 성립한다.*

$$\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1B} + \frac{AC_1}{C_1C}$$

37. *(Pappus) 두 직선 l, m이 주어져 있다. $P_1, P_2, P_3 \in l$이고, $Q_1, Q_2, Q_3 \in l$일 때, 세 점 $P_1Q_2 \bigcap P_2Q_1$,$P_2Q_3 \bigcap P_3Q_2$,$P_3Q_1 \bigcap P_1Q_3$는 한 직선위에 놓여 있다.*

38. *(Desargues)* 두 삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_2$에 대하여, 이 두 삼각형이 한 점으로부터 배경의 위치에 있을 필요 충분 조건은 이 두 삼각형이 한 직선으로부터 배경의 위치에 있는 것이다.

Remark 4. 두 삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_2$에 대해, 세 직선 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2가 한 점 P에서 만나면, 이 둘은 점 P로부터 배경의 위치에 있다하고, $A_1B_1 \bigcap A_2B_2$, $B_1C_1 \bigcap B_2C_2$, $C_1A_1 \bigcap C_2A_2$이 한 직선 l위에 있으면, 이 두 삼각형은 직선 l로부터 배경의 위치에 있다고 한다.

39. *(Gauss)* 삼각형 ABC가 주어져 있다. 임의의 직선 l에 대해, $D = l \bigcap BC$, $E = l \bigcap CA$, $F = l \bigcap AB$라 하면, AD, BE, CF의 중점들은 한 직선위에 놓여 있고, 이 직선을 삼각형 ABC의 Gauss 직선이라 부른다.

40. *(Pascal)* 한 원에 내접하는 육각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$이 주어져 있다.이 때, $A_1A_2 \bigcap A_4A_5$, $A_2A_3 \bigcap A_5A_6$, $A_3A_4 \bigcap A_6A_1$은 한 직선위에 놓여있다.

41. *(Brianchon)* 한 원에 외접하는 육각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$이 주어져 있다.이 때, 세 직선 A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6은 한 점에서 만난다.

42. *(Archimedes)* $AC > AB$인 삼각형 ABC의 외접원의 호 ACB의 중점 M에서 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면, $AD = DC + CB$이다.

43. 한 원에 두 삼각형 A_1BC, A_2BC가 내접하고 있다. 두 삼각형의 수심을 각각 H_1, H_2라 두면, $A_1A_2 = H_1H_2$이다.

II. 연습 문제

44. $\angle ABC + \angle BCD < 180°$인 볼록사각형에서, AB와 CD가 E에서 만날 때, $AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE$일 필요충분조건은 $\angle ABC = \angle ADC$임을 보여라.

45. 한 원에 내접하는 사각형 $ABCD$가 주어져 있는데, AB와 CD가 E에서 만나고, AC와 BD가 F에서 만난다. AFD의 외접원과 BFC의 외접원이 H에서 다시 만날 때, $\angle EHF = 90°$임을 보여라.

46. $AB = AC$인 이등변 삼각형 ABC에서 각 B의 이등분선이 AC와 만나는 점을 D라 하자. $BC = BD + AD$일 때, 각 A의 크기를 구하여라.

47. 삼각형 ABC의 수심을 H라 하고, 점 A에서 BC가 지름인 원에 그은 접선이 이 원과 만나는 접점을 각각 P,Q라 할 때, 세 점 P,Q,H가 한 직선 위에 있음을 보여라.

48. 두 반직선 CX와 CY가 이루는 각의 크기가 예각이고, CX와 CY위에 각각 A와 B가 있어서 $CX < CA = CB < CY$를 만족한다. 이 때, 다음을 만족하는 한 직선 l을 작도하여라.

> 직선 l과 반직선 CX, 선분 AB, 선분 AC의 교점을 각각 K, L, M이라 하면, $KA \cdot YB = XA \cdot MB = LA \cdot LB \neq 0$이 성립한다.

49. 삼각형 ABC외부에 정사각형들 $ABED, BCGF, ACHI$가 주어져 있다. 이 때, 여섯 개의 점들 D, E, F, G, H, I가 한 원위에 있을 필요 충분 조건은 ABC가 정삼각형이거나 직각 이등변 삼각형임을 보여라.

50. K, L, M은 각각 삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB위의 점들인데, $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$을 만족한다. 세 삼각형 AKM, BLK, CML의 외접원이 합동이면, 삼각형 ABC의 내접원도 이 들과 합동임을 보여라.

51. 삼각형 ABC에서 D,E,Z,H,G는 각각 BC, AD, BD, ED, EZ의 중점이고, BE와 AC가 I에서, HG와 AC가 K에서 만난다. $AK = 3CK$,$HK = 3HG$, $BE = 3EI$을 보이고, 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 EGH의 넓이의 32배임을 보여라.

52. 수심이 H인 삼각형 ABC의 세 수선을 AD,BE,CF라 하고, AI와 AJ를 각각 A의 내각의 이등분선과 외각의 이등분선이라 하자. BC,AH의 중점을 각각 M,N이라 할 때, MN이 EF와 수직임을 보이고, MN이 AI, AJ와 각각 K, L에서 만날 때, $KL = AH$임을 보여라.

53. $\angle A = 60^\circ$인 ABC의 외심,수심,내심, 각A에 대한 방심을 각각 O, H, I, I'라 하자. B', C'은 각각 반직선 AC, AB위에 있는데, $AB' = AB$, $AC' = AC$를 만족한다. 이 때, 다음을 보여라.

(1) $B, C, H, O, I, I', B', C'$은 한 원위에 있다.
(2) OH가 AB와 E에서 만나고, AC와 F에서 만날 때, 삼각형 AEF의 둘레의 길이는 $AB + AC$이다.
(3) $OH = |AB - AC|$이다.

54. 이등변 삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 세 꼭지점 A, B, C로부터의 세 중선이 ABC의 외접원과 각각 L, M, N에서 만난다. 만약, $LM = LN$이면, $2BC^2 = AB^2 + AC^2$임을 보여라.

55. 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC위에 각각 D, E가 있어서, DE가 BC에 평행하다. ABC내부의 임의의 점 P에 대해, PB, PC가 DE와 각각 F,G에서 만날 때, 두 삼각형 PDG, PFE의 외심을 각각 O_1, O_2라 하면, AP와 O_1O_2는 서로 수직임을 보여라.

56. 삼각형 ABC의 외부에 직각이등변 삼각형 ABD, ACE를 잡고, BC의 중점을 F라 하자. (단, $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$) 이 때, DEF는 직각 이등변 삼각형임을 보여라.

57. 예각 삼각형 ABC의 세 수선을 AD, BE, CF라 하고, A, B, C에서 EF, FD, DE에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라 하자. 세 직선 AP, BQ, CR은 한점에서 만남을 보여라.

58. 원 C밖에 한 점 A가 주어져 있다. C위의 각 점 P에 대해, 정사각형 $APQR$을 잡는다. (단, A,P,Q,R은 이 순서로 시계 반대 방향으로 놓여 있다.) 점 P가 원 C위를 움직일 때, 점 Q의 자취를 구하여라.

59. $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ABD = \angle BDC$인 사면체 $ABCD$가 주어져 있다. $AB = CD$임을 보여라.

60. 삼각형 ABC내부에 한 점 P가 있어서, $\angle PBC = \angle PCA < \angle PAB$를 만족한다. 직선 PB가 ABC의 외접원과 각각 B, E에서 만나고, 직선 CE가 APE의 외접원과 각각 E, F에서 만난다. 사각형 $APEF$의 넓이와 삼각형 ABP의 넓이의 비율은 P의 위치에 무관함을 보여라.

61. $AC = BC$인 이등변 삼각형 ABC의 외심을 O, 내심을 I라 하자. BC위의 점 D가 있어서, OD와 BI가 수직이다. DI와 BC가 평행함을 보여라.

62. 볼록사각형 $ABCD$의 변 BC위에 E, F가 놓여 있는데, E가 F보다 B에 더 가깝고, $\angle BAE = \angle CDF$이고, $\angle EAF = \angle FDE$일 때, $\angle FAC = \angle EDB$를 보여라.

63. $AB = BC$인 이등변 삼각형 ABC의 각 C의 이등분선 CD가 주어져 있다. ABC의 외심을 지나고, CD에 수직인 직선이 BC와 E에서 만나고, E를 지나고, CD에 평행한 직선이 AB와 F에서 만날 때, $BE = FD$를 보여라.

64. 무게중심이 G인 삼각형 ABC에서 $AB+GC = AC+GB$일 때, ABC는 이등변 삼각형임을 보여라.

65. $\angle A < 90^\circ$인 평행사변형 $ABCD$가 주어져 있다. AC를 지름으로 하는 원이 CB, CD와 각각 E, F에서 만나고, A에서 이 원에 그은 접선이 BD와 P에서 만날 때, 세 점 P, E, F는 한 직선위에 있음을 보여라.

66. 볼록사각형 $ABCD$에서 ABC와 ADC의 넓이가 같다. AC와 BD가 E에서 만나고, 점 E를 지나고, AD, DC, CB, BA에 평행한 직선이 AB, BC, CD, DA와 각각 K, L, M, N에서 만날 때, 사각형 $ABCD$와 사각형 $KLMN$의 넓이의 비율을 구하여라.

67. 외심이 O인 예각 삼각형 ABC에서, ABO의 외접원을 S라 하고, 두 직선 CA, CB가 S와 각각 P, Q에서 만날 때, CO는 PQ에 수직임을 보여라.

68. 임의의 삼각형 ABC에 대해, 한 직선 l이 있어서, 삼각형 ABC를 l에 대해, 대칭시켜 얻은 삼각형을 $A'B'C'$라 하면, 삼각형 ABC의 내부와 삼각형 $A'B'C'$의 내부가 겹치는 부분의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{2}{3}$보다 크게 할 수 있음을 보여라.

69. K에서 서로 외접하는 두 원 S_1, S_2가 주어져 있다. S_1, S_2는 둘 다 원 S와 각각 A_1, A_2에서 내접한다. S_1, S_2의 공통외접선과 S의 교점중 하나를 P라 하자. PA_1이 원 S_1과 B_1에서 다시 만나고, PA_2가 원 S_2와 B_2에서 다시 만난다. B_1B_2는 두 원 S_1, S_2의 공통 외접선임을 보여라.

70. 삼각형 ABC의 내부에 점 P가 있어서, 다음을 만족한다.

$$\angle PAB = 10^\circ, \angle PBA = 20^\circ, \angle PCA = 30^\circ, \angle PAC = 40^\circ$$

이 때, 삼각형 ABC가 이등변 삼각형임을 보여라.

71. *외접구의 중심이* O*인 사면체* $ABCD$*에서* $AB = AC = AD$*일 때, 삼각형* ACD*의 무게 중심을* G*라 하고,* BG*의 중점을* E*라 하고,* AE*의 중점을* F*라 하자.* OF*와* BG*가 수직인 것과* OD*와* AC*가 수직인 것은 서로 동치임을 보여라.*

72. *평행사변형* $ABCD$*내부에서 서로 외접하는 두 원이 있는데, 이 두 원은 각각* BA*,* AD*에 내접하고,* BC*,* CD*에 내접한다. 이 두 원이 변할 때, 이 두 원의 접점의 자취를 구하여라.*

73. *넓이가* 7*인 정삼각형* ABC*의 두 변* AB*,* AC*위에 두 점* M*,* N*이 있어서* $AN = BM$*를 만족한다.* BN*과* CM*의 교점을* O*라 하자.* BOC*의 넓이가* 2*일 때,* $\frac{MA}{AB}$*의 값은* $\frac{1}{3}$ *또는* $\frac{2}{3}$*임을 보이고,* $\angle AOB$*의 크기를 구하여라.*

74. AB*가* CD*와 평행한 사다리꼴* $ABCD$*에서* $CF = DF$*가 되게 선분* AB*위에 점* F*를 잡는다.* AC*와* BD*의 교점을* E*라 하고,* ADF*,* BCF*의 외접원의 중심을 각각* O_1*,* O_2*라 할 때,* O_1O_2*와* EF*는 서로 수직임을 보여라.*

75. $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$*인 사각형* $ABCD$*에서* ABC*의 수심과 외심을 각각* H*,* O*라 할 때, 세 점* H*,* O*,* D*가 한 직선위에 있음을 보여라.*

76. *삼각형* ABC*에서* BM*,* CN*이 각의 이등분선이라 하자. 반직선* MN*과* ABC*의 외접원의 교점을* D*라 할 때, 다음을 보여라.*

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$$

77. *한 원에 내접하는 볼록 사각형* $ABCD$*에서* AC*와* BC*가* F*에서 만나고,* AD*와* BC*가* E*에서 만날 때,* AB*,* CD*의 중점을 각각* M*,* N*이라 하면, 다음을 보여라.*

$$\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2}\left|\frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB}\right|$$

78. *평행사변형* $ABCD$*내부의 한 점* O*가* $\angle AOB + \angle COD = \pi$*를 만족할 때,* $\angle OBC = \angle ODC$*를 보여라.*

79. *한 원에 내접하는 볼록사각형* $ABCD$*에서* AB*,* CD*가* P*에서 만나고,* AD*,* BC*가* Q*에서 만난다.* Q*에서* $ABCD$*의 외접원에 그은 두 접선이 만나는 점을 각각* E*,* F*라 할 때, 세 점* P*,* E*,* F*는 한 직선위에 있음을 보여라.*

80. 삼각형 ABC에서 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$를 다음과 같이로 약속하자.

$$BC = a, CA = b, AB = c, \angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$$

$\alpha = 3\beta$일 때, $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$을 보여라.

81. $\angle ABD < \frac{\pi}{2}$이고, $\angle BAD < \frac{\pi}{4}$인 평행사변형 $ABCD$가 주어져 있다. K, L, M, N을 각각 선분 AB, BC, CD, DA의 내점이 되게 잡아서, 사각형 $KLMN$이 한 원에 내접하고, $KLMN$의 외접원의 반지름의 길이와 ANK, CLM의 외접원의 반지름의 길이가 같다고 한다. 이러한 사각형 $KLMN$의 두 대각선의 교점의 자취를 구하여라.

82. 외접원의 반지름의 길이가 R인 삼각형 ABC의 수심을 H, 무게중심을 G, GH의 중점을 F라 할 때, $AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3R^2$을 보여라.

83. 세 변의 길이가 a, b, c인 예각 삼각형 ABC에서, 세 수선의 길이를 각각 m_a, m_b, m_c, 수심에서 세 꼭지점까지의 거리를 각각 d_a, d_b, d_c라 할 때, 다음을 보여라.

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

84. AB, CD는 서로 교차하지 않은 한 원의 두 호이다. K는 CD위의 한 점이다. 이 때, 이 원 위에 있는 점들중에서, 다음을 만족하는 한 점 P를 작도하여라.

K는 삼각형 ABC의 내부와 선분 CD의 두 교점의 중점이다.

85. 삼각형 ABC의 외접원의 호 BC위를 움직이는 점 P에 대해, PAB, PAC의 내심을 각각 I_1, I_2라 할 때, 다음을 보여라.

(1) PI_1I_2의 외접원은 항상 일정한 점을 지난다.
(2) 지름이 I_1I_2인 원은 항상 일정한 점을 지난다.
(3) I_1I_2의 중점은 고정된 원 위에 놓여있다.

86. 정삼각형 ABC의 내부의 점 M에 대해, M에서 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 할 때, $\angle FDE = 90°$가 되는 점 M의 자취를 구하여라.

87. $\angle A = \angle B = \frac{2\pi}{3}$, $\angle D = \frac{pi}{2}$, $BC = 1$을 만족하는 한 원에 외접하는 볼록 사각형 $ABCD$에서 선분 AD의 길이를 구하여라.

88. 볼록오각형 $ABCDE$에서, $CD = DE$, $\angle BCD = \angle DEA = 90°$일 때, 선분 AB위에 점 F가 있어서, $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC}$를 만족하면, 다음이 성립함을 보여라.

$$\angle FCE = \angle ADE, \angle FEC = \angle BDC$$

89. ABC의 외접원을 ω라 두고, 선분 BC위의 한 점을 D라 하자. ω, AD, BD에 접하는 원과 ω, AD, DC에 접하는 원이 서로 접할 필요 충분 조건은 $\angle BAD = \angle CAD$임을 보여라.

90. 볼록육각형 $ABCDEF$에서, AB, EF의 교점을 P, EF, CD의 교점을 Q, CD, AB의 교점을 R, BC, DE의 교점을 S, DE, FA의 교점을 T, FA, BC의 교점을 U라 하자. 이 때, $\frac{AB}{PR} = \frac{CD}{RQ} = \frac{EF}{QP}$이면, $\frac{BC}{US} = \frac{DE}{ST} = \frac{FA}{TU}$을 보여라.

91. 정삼각형 ABC의 변 AB위의 점 D, 변 BC위의 점 K, 변 AC위의 두 점 E, M이 있어서, $DA + AE = KC + CM = AB$를 만족할 때, 두 직선 DM과 KE가 이루는 각의 크기는 $60°$임을 보여라.

92. 삼각형 ABC에 대해, 세 꺽인 경로 CAB, ABC, BCA의 중점을 각각 A_1 ,B_1, C_1이라 하자. A_1 ,B_1, C_1을 지나고, 각각 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 이등분선에 평행한 직선들을 각각 l_A, l_B, l_C라 할 때, 이 세 직선은 한 점에서 만남을 보여라.

93. 두 원 S_1, S_2가 M, N에서 만난다. 직사각형 $ABCD$가 있어서, 두 점 A, C는 S_1위에 놓여 있고 , B, D는 S_2위에 놓여있을 때, 이 직사각형의 두 대각선의 교점은 직선 MN위에 있음을 보여라.

94. 삼각형 ABC의 내접원이 AB, BC, CA와 접하는 점을 각각 M, N, K라 하고, A를 지나고, NK에 평행한 직선이 MN과 만나는 점을 D, A를 지나고, MN에 평행한 직선이 NK과 만나는 점을 E라 하자. 직선 DE는 AB, AC를 이등분함을 보여라.

95. 삼각형 ABC에 내접하고, 중심이 O인 원이 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 N, K, M이라 하자. ABC의 중선 BB_1이 MN에서 D와 만날 때, 세 점들 O, D, K가 한 직선위에 있음을 보여라.

96. 예각삼각형 ABC에서 CF는 수선이고, BM은 중선이다. $BM = CF$이고, $\angle MBC = \angle FCA$일 때, ABC는 정삼각형임을 보여라.

97. 삼각형 ABC의 외부에 이등변 삼각형 BCD, CAE, ABF를 잡는데, 이 때, 각 이등변 삼각형에서의 밑변이 각각 BC, CA, AB가 되도록 하자. 세 점 A, B, C에서 직선 EF, FD, DE에 내린 수선은 한 점에서 만남을 보여라.

98. $AD = CD, \angle DAB = \angle ABC < 90°$인 볼록사각형 $ABCD$가 있다. BC의 중점과 D를 지나는 직선이 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\angle BEC = \angle DAC$를 보여라.

99. 반지름의 길이가 R인 원에 내접하는 볼록오각형 $ABC\ DE$가 주어져 있다. 삼각형 XYZ의 내접원의 반지름의 길이를 r_{XYZ}라 할 때, 다음을 보여라.

(1) $\cos \angle CAB + \cos \angle ABC + \cos \angle BCA = 1 + \frac{r_{ABC}}{R}$이다.
(2) $r_{ABD} = r_{AED}$이고, $r_{ABD} = r_{AEC}$이면, $ABC \equiv AED$이다.

100. $\angle BAC = 40°$, $\angle ABC = 60^{/circ}$인 삼각형 ABC가 주어져 있다. D는 선분 AC위의 점이고, E는 선분 AB위의 점인데, $\angle CBD = 40°$와 $\angle BCE = 70°$를 만족한다. BD와 CE가 F에서 만날 때, AF는 BC에 수직임을 보여라.

101. 둔각삼각형이 아닌 삼각형 ABC에서, $AB > AC$이고, $\angle B = 45°$이다. 삼각형 ABC의 내심을 I, 외심을 O라 할 때, $\sqrt{2}OI = AB - AC$일 때, $\sin \angle A$가 취할 수 있는 값을 모두 구하여라.

102. 원 k밖에 한 점 A가 주어져 있다. k에 내접하는 사다리꼴중에서 평행하지 않은 두 대변의 연장선의 교점이 A가 되는 사다리꼴의 두 대각선의 교점은 항상 일정한 점을 지남을 보여라.

103. 삼각형 ABC의 각 변 BC, CA, AB위에 점들 P, Q, R이 있고, 각 변 QR, RP, PQ위에 점들 $A^/$, $B^/$, $C^/$이 있어서, AB는 $A^/B^/$에 평행하고, BC는 $B^/C^/$에 평행하고, CA는 $C^/A^/$에 평행할 때, 다음을 보여라.

$$\frac{A^/B^/}{AB} = \frac{[PQR]}{[ABC]}$$

104. 예각삼각형 ABC의 변 AB위에 점 P가 주어져 있다. 반직선 CA위에 $B^/$과 반직선 CB위에 $A^/$이 있어서 다음을 만족한다.

$$\angle B^/PA = \angle A^/PB = \angle ACB$$

$APB^/$과 $BPA^/$의 외접원이 P, M에서 만난다. P가 선분 AB위에서 움직일 때, M의 자취를 구하여라.

105. 볼록육각형 $ABCDEF$에서, 세 대각선 AD, BE, CF의 중점이 일치할 때, AB, CD, EF의 중점을 각각 P, Q, R이라 두면, 삼각형 PQR의 넓이는 육각형 $ABCDEF$의 넓이의 절반 이상임을 보여라.

106. 삼각형 ABC의 변 AB위에 두 점 P, Q가 놓여 있다. APC와 QBC의 내접원의 반지름의 길이가 같으면, AQC와 PBC의 내접원의 반지름의 길이가 같음을 보여라.

107. 수심이 H인 삼각형 ABC에서 세 수선의 발을 K, L, M이라 하고, AH의 중점을 P라 하고, BH와 MK가 S에서 만나고, LP와 AM이 T에서 만나면, TS는 BC와 수직임을 보여라.

108. 평행사변형 $ABCD$가 주어져 있다. 한 원이 두 변 AB, AD에 접하고, 변 BD와 E, F에서 만날 때, E, F를 지나고, 두 변 CB, CD에 접하는 원이 존재함을 보여라.

109. 볼록사각형 $ABCD$내부의 임의의 점 P에 대해, 다음 중 적어도 하나는 $45°$이하임을 보여라.

110. 원 C밖에 점 K가 주어져 있고, 두 직선 KL, KN은 원 C의 접선이다. 반직선 KN위에 점 M을 잡고, 삼각형 KLM의 외접원과 원 C가 P, L에서 만나고, N에서 ML에 내린 수선의 발을 Q라 하면, $\angle MPQ = \angle KML$임을 보여라.

111. 예각삼각형 ABC에서 AD는 수선이다. 두 내각 B, C의 이등분선이 AD와 E, F에서 만난다. $BE = CF$일 때, ABC는 이등변 삼각형임을 보여라.

112. 예각삼각형 ABC에서 AD, BE, CF는 수선이다. D를 지나고, EF에 평행한 직선이 AC, AB와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. BC와 EF의 교점을 P라 할 때, 삼각형 PQR의 외접원은 BC의 중점을 지남을 보여라.

113. 삼각형 ABC가 주어져 있다. $CD = AC$를 만족하도록, 반직선 BC위에 점 D를 잡자. BC를 지름으로 하는 원과 삼각형 ACD의 외접원이 P, C에서 만난다. 직선 BP와 AC가 E에서 만나고, 직선 CP와 AB가 F에서 만날 때, 세 점 D, E, F는 한 직선위에 있음을 보여라.

114. 삼각형 ABC의 변 AB위에 두 점 D, E가 있어서, 다음을 만족한다.

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2$$

이 때, $\angle ACD = \angle BCE$임을 보여라.

115. $AB = AC = b$, $BC = a$인 이등변 삼각형 ABC에서 M, N은 각각 AC, AB에서 움직이되, $a^2 \cdot AM \cdot AN = b^2 \cdot BN \cdot CM$을 만족하게 할 때, 두 직선 BM과 CN의 교점 P의 자취를 구하여라.

116. *평행사변형* $ABCD$*에서* BC, CD*의 중점을 각각* M, N*이라 할 때, 두 직선* AM, AN*이* $\angle BAD$*를 3등분할 수 있는가를 판별하여라.*

117. $AB > AC$*인 삼각형* ABC*에서* BM*은 중선이고,* BL*은 각의 이등분선이고,* M*을 지나고,* AB*에 평행한 직선이* BL*과* D*에서 만나고,* L*을 지나고* BC*에 평행한 직선이* BM*과* E*에서 만난다.* ED*와* BL*은 서로 수직임을 보여라.*

118. AD, BE, CD*는 삼각형* ABC*의 세 내각의 이등분선이고,* D, E, F*에서 삼각형* ABC*의 내접원에 그은 두 접선중* ABC*의 변에 포함되지 않는 접선의 접접들을 각각* K_a, K_b , K_c*라 하자.* BC, CA, AB*의 중점들과* K_a, K_b , K_c*를 각각 이은 세 직선은 한 점에서 만남을 보여라.*

119. $AB = AC$*인 삼각형* ABC *외부에 정사각형* $BAXX'$, $CAYY'$*을 잡고, 선분* BC*위의 임의의 점* K*에서* BY, CX*에 내린 수선의 발을 각각* E, F*라 하고,* BC*의 중점을* D*라 하자.*

(1) $DE = DF$*를 보여라.*
(2) EF*의 중점의 자취를 구하여라.*

120. *삼각형* ABC*가 주어져 있다.* C, A*를 지나고,* AB*에 접하는 원과* B, A*를 지나고,* AC*에 접하는 원이* D, A*를 지난다. 반직선* AB*위에 점* E*를 잡아서,* $AB = BE$*가 되게 하자. 반직선* CA*와* ADE*의 외접원이* A,F*에서 만난다.* $AF = AC$*를 보여라.*

121. *삼각형* ABC*에서 변* AB*의 중점을* D*라 하고,* BC*의 삼등분점중에서* C*에 가까운 점을* E*라 하자.* $\angle ADC = \angle BAE$*일 때,* $\angle BAC$*를 구하여라.*