Final

-④-

Ch① 경우의 수

TH①. 경우의 수

2025학년도 사관학교

1. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $x=1,\ 2,\ 3$일 때 $f(x) \leq f(x+1)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

2024년 7월 교육청모의고사

2. 두 집합

$$X=\{1, 2, 3, 4\},\ Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(1)+f(3) \leq f(1)+f(4)$
(나) $f(1)+f(2)$는 짝수이다.

3. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \in X$이다.
(나) $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1$일 때 $f(x) \geq f(x+1)$이다.

4. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
(나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

2024년 3월 교육청모의고사

5. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오.

> (가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$
> (나) $1 < f(5) < f(4)$
> (다) $f(a)=b$, $f(b)=a$를 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

2025학년도 사관학교

6. 숫자 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차를 각각 a, b, c, d, e, f라 하자. 예를 들어 그림과 같이 나열한 경우 $a=3$, $b=1$, $c=1$, $d=3$, $e=0$, $f=2$이다.

4	1	2	1	4	4	2

$a+b+c+d+e+f$의 값이 짝수가 되도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 100　② 110　③ 120
④ 130　⑤ 140

7. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

8. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

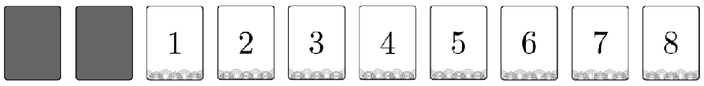
> (가) $f(1)\times f(3)\times f(5)$는 홀수이다.
> (나) $f(2)<f(4)$
> (다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128　② 132　③ 136
④ 140　⑤ 144

2024학년도 6월 평가원모의고사

9. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
> (나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
> (다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



2023학년도 수능

10. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만 시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \leq f(x+1)$이다.
> (나) $1 \leq x \leq 5$일 때 $f(x) \leq x$이고, $6 \leq x \leq 10$일 때 $f(x) \geq x$이다.
> (다) $f(6)=f(5)+6$

2023학년도 6월 평가원모의고사

11. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f\ :\ X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$ (나) $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$

2024년 수능특강 Lv2

3점(27번) 연계 가능

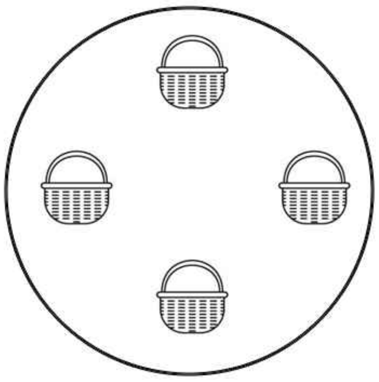
12. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공을 같은 종류의 상자 3개에 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는?

(가) 각 상자에 넣는 공의 개수는 2 이상이다. (나) 한 상자에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 12의 배수인 상자의 개수는 3이다.

① 45　② 54　③ 63
④ 72　⑤ 81

연계 가능

13. 원 모양의 일정한 간격을 두고 원형으로 놓인 같은 종류의 바구니 4개가 있다. 이 4개의 바구니에 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 흰 공 5개와 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 검은 공 3개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

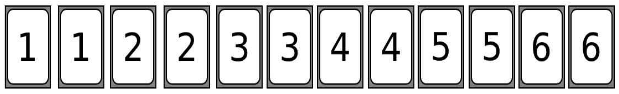


(가) 각 바구니에 공을 2개씩 담는다.
(나) 검은 공만 담는 바구니는 없다.
(다) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 바구니의 개수는 3이다.

2024년 수능특강 Lv3

최고 난이도

14. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 이 12장의 카드를 모두 일렬로 나열하려고 할 때, 서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 항상 5의 약수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)



① 9640 ② 9720 ③ 9800
④ 9880 ⑤ 9960

2024년 수능특강 유제

3점(27번) 연계 가능

15. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?

> (가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 준다.
> (나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

① 50　② 60　③ 70　④ 80　⑤ 90

2024년 수능특강 Lv2

2025 Trend

16. 같은 종류의 쿠키 26개를 서로 다른 종류의 선물 상자 5개에 남김없이 나누어 담을 때, 각 상자에 담는 쿠키의 개수가 2 이상 6 이하가 되도록 나누어 담는 경우의 수는?

① 62　② 64　③ 66　④ 68　⑤ 70

2024년 수능특강 Lv3

2025 Trend

17. 두 집합

$X=\{x\,|\,x$는 6 이하의 자연수$\}$,

$Y=\{x\,|\,x$는 $-9\le x\le 9$인 정수$\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)+2\le f(x_2)$이다.
(나) $f(6)=f(3)+10$

① 525 ② 540 ③ 555
④ 570 ⑤ 585

2024년 수능완성

2025 Trend

18. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [4점]

4 이하의 자연수 n에 대하여 집합 $\{x\,|\,f(x)=n,\ x\in X\}$의 원소의 개수를 a_n이라 하면 3 이하의 모든 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+1}=3$이다.

① 320 ② 340 ③ 360
④ 380 ⑤ 400

19. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 X로의 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> 3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n) > f(n+2)$인 n의 개수는 2이다.

2024년 수능완성

2025 Trend

20. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 5 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \leq f(x+1)$이다.
> (나) $3 \leq x \leq 4$일 때, $f(x)f(x+1)f(x+2)$의 값은 3의 배수이다.

1. [정답] ④

2. [정답] 198

[해설]
조건 (가)에 의하여
$0 \leq f(2)-f(1) \leq f(3) \leq f(4)$
조건 (나)에 의하여 $f(1)+f(2)$가 짝수이므로 두 수 $f(1)$과 $f(2)$는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다. $f(2)-f(1)$은 0 또는 2 또는 4
(ⅰ) $f(2)-f(1)=0$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2))$는
$(1, 1)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(3, 3)$ 또는
$(4, 4)$ 또는 $(5, 5)$ 또는 $(6, 6)$
$0 \leq f(3) \leq f(4)$이므로
순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는
${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$
그러므로 $6\times21=126$
(ⅱ) $f(2)-f(1)=2$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2))$는
$(1, 3)$ 또는 $(2, 4)$ 또는
$(3, 5)$ 또는 $(4, 6)$
$2 \leq f(3) \leq f(4)$이므로
순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는
${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
그러므로 $4\times15=60$
(ⅲ) $f(2)-f(1)=4$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2))$는
$(1, 5)$ 또는 $(2, 6)$
$4 \leq f(3) \leq f(4)$이므로
순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
그러므로 $2\times6=12$
따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$126+60+12=198$

3. [정답] 108

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 30 [4.00점]

[해설]
집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f는 조건 (가)에서
$x+f(x)\in X, \quad -x-2 \leq f(x) \leq -x+2$
$0 \leq f(-2) \leq 2$, $-1 \leq f(-1) \leq 2$, $-2 \leq f(0) \leq 2$
$-2 \leq f(1) \leq 1$, $-2 \leq f(2) \leq 0$
(ⅰ) $f(0)=-2$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는
$2+3+4=9$
$f(1)$, $f(2)$의 값은 -2이다. 따라서 함수 f의 개수는
$9\times1=9$
(ⅱ) $f(0)=-1$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는
$2+3+4=9$
$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는
$1+2=3$
따라서 함수 f의 개수는
$9\times3=27$
(ⅲ) $f(0)=0$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는 0, 1, 2 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는 0, -1, -2 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
따라서 함수 f의 개수는
$6\times6=36$
(ⅳ) $f(0)=1$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는 1, 2 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$
$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는
$1+2+3+3=9$
따라서 함수 f의 개수는
$9\times3=27$
(ⅴ) $f(0)=2$일 때
조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 값은 2이다.
$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는
$1+2+3+3=9$
따라서 함수 f의 개수는
$9\times1=9$
이상에서 함수 f의 개수는
$9+27+36+27+9=108$

[다른 풀이]
-2, -1, 0, 1, 2의 5개 중 중복을 허용하여 5개를 선택하는 중복조합의 수는
${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$
이때 가능하지 않은 경우의 수는
(ⅰ) $f(1)=2$일 때
선택할 수 없는 순서쌍은
$(2, 2, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 0)$,
$(2, 2, 2, 2, -1)$, $(2, 2, 2, 2, -2)$
(ⅱ) $f(1)=1$일 때
선택할 수 없는 순서쌍은
$(2, 2, 2, 1, 2)$, $(2, 2, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$
(ⅲ) $f(-2)=-1$ 또는 $f(-2)=-2$일 때
선택할 수 없는 경우의 수는 -2, -1 중에서 중복을 허용하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.
${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_5=6$
(ⅳ) $(2, -2, -2, -2, -2)$, $(1, -2, -2, -2, -2)$,
$(0, -2, -2, -2, -2)$일 때
이상에서 구하는 경우의 수는

$126-5-4-6-3=108$

[다른 풀이]
$f(-2)$ 가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2$
$f(2)$ 가 가질 수 있는 값은 $-2,\ -1,\ 0$
$f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$ 이므로
$f(-2)-f(2)$ 의 값에 따라 가질 수 있는 경우의 수를 구하면
(ⅰ) $f(-2)-f(2)=0$ 일 때
가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는 $(0, 0)$
가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 은 $(0, 0, 0)$
따라서 가능한 함수의 개수는 1
(ⅱ) $f(-2)-f(2)=1$ 일 때
가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는 $(0,\ -1),\ (1, 0)$
각각의 경우에 가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는
${}_2\mathrm{H}_3$ 이므로 전체 함수의 개수는
$2\times{}_2\mathrm{H}_3=2\times4=8$
(ⅲ) $f(-2)-f(2)=2$ 일 때
가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는
$(0,\ -2),\ (1,\ -1),\ (2, 0)$
가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는
$(1,\ -1)$ 일 때 ${}_3\mathrm{H}_3$
$(0,\ -2),\ (2, 0)$ 일 때 ${}_3\mathrm{H}_3-1$
따라서 가능한 함수의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3+2\times\left({}_3\mathrm{H}_3-1\right)=28$
(ⅳ) $f(-2)-f(2)=3$ 일 때
가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는
$(1,\ -2),\ (2,\ -1)$
각각의 경우에 가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는
${}_4\mathrm{H}_3-1$
따라서 가능한 함수의 개수는 $2\times\left({}_4\mathrm{H}_3-1\right)=38$
(ⅴ) $f(-2)-f(2)=4$ 일 때
가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는 $(2,\ -2)$
가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3-2$
따라서 가능한 함수의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3-2=33$
이상에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는
$1+8+28+38+33=108$

4. [정답] 117

[해설]
(ⅰ) 1명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우
초콜릿을 받지 못하는 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
남은 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 2개, 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1\times2!=6$
조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 1명의 학생에게 사탕 2개, 초콜릿 1개를 받은 1명의 학생에게 사탕 1개를 나누어주고, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$이므로 $3\times6\times6=108$
(ⅱ) 2명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우
초콜릿을 받지 못하는 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
남은 1명의 학생에게 초콜릿 3개를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3=1$
조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 2명의 학생에게 사탕을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 사탕 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$
이므로 $3\times1\times3=9$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$108+9=117$

5. [정답] 90

[해설]
조건 (다)를 만족시키는 a, b에 대하여 $a<b$라고 하자.
(ⅰ) $a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{1, 2, 3\}$인 경우
$f(a)>f(b)$ 이므로 조건 (가)에 모순이다.
(ⅱ) $a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{4, 5\}$인 경우
가능한 (a, b)의 순서쌍은
$(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$
이 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍은
$(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$뿐이다.
① $f(2)=5$, $f(5)=2$인 경우
조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_1\times{}_1\mathrm{H}_1=5$
조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이므로 함수 f의 개수는 $5\times3=15$
② $f(3)=4$, $f(4)=3$인 경우
조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
조건 (나)에 의하여 $f(5)=2$
이므로 함수 f의 개수는 $10\times1=10$
③ $f(3)=5$, $f(5)=3$인 경우
조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$이므로 함수 f의 개수는
$15\times2=30$
$f(2)=5$, $f(5)=2$이고 $f(3)=4$, $f(4)=3$이면 조건 (가)에 모순이므로 ①과 ②의 경우에서 중복되는 경우는 없다.
(ⅲ) $a\in\{4, 5\}$, $b\in\{4, 5\}$인 경우
$f(4)=5$, $f(5)=4$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수의 개수는
$15+10+30+35=90$

6. [정답] ②

7. [정답] 93

[해설]
조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 0 이상 2 이하이고 조건 (나)에서 학생 B가 받는 공의 개수가 2 이상이므로 학생 A가 받는 공의 개수를 기준으로 나누면

(ⅰ) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3, 4인 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 2, 3, 4개를 선택하는 경우의 수와 같고 나머지는 학생 C에게 주면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_2+{}_2H_3+{}_2H_4={}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4=12$$

학생 B가 받는 공의 개수가 5, 6, 7, 8인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 0, 1, 2, 3개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2+{}_2H_3={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3=10$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$12+10=22$

(ⅱ) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때

학생 A가 공을 받는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공의 2가지

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3인 경우의 수는

$${}_2H_2+{}_2H_3={}_3C_2+{}_4C_3=7$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6, 7인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 0, 1, 2, 3인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2+{}_2H_3={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3=10$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$2\times(7+10)=34$

(ⅲ) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때

(a) 학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우

학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우의 수는

2가지

학생 B가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$${}_2H_2={}_3C_2=3$$

학생 B가 받는 공의 개수가 3인 경우의 수는 학생 A가 받은 공과 같은 공의 개수가 0, 1, 2인 경우

3가지

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 0, 1, 2인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2=6$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$2\times(3+3+6)=24$

(b) 학생 A가 다른 색의 공을 받은 경우

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3인 경우의 수는

$${}_2H_2+{}_2H_3={}_3C_2+{}_4C_3=7$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 0, 1, 2인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2=6$$

따라서 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받은 경우의 수는

$7+6=13$

(a), (b)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$24+13=37$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는

$22+34+37=93$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 0 이상 2 이하이고 조건 (나)에서 학생 B가 받는 공의 개수가 2 이상이므로 학생 A가 받는 공의 개수를 기준으로 나누면

(ⅰ) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는

$${}_2H_4\times{}_2H_4={}_5C_4\times{}_5C_4=25$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$25-3=22$

(ⅱ) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때

학생 A가 공을 받는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공의 2가지

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공이 1개 빠졌으므로

$${}_2H_3\times{}_2H_4={}_4C_3\times{}_5C_4=20$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면

$20-3=17$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$2\times17=34$

(ⅲ) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때

(a) 학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우

학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우의 수는

2가지

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공이 2개 빠졌으므로

$${}_2H_2\times{}_2H_4={}_3C_2\times{}_5C_4=15$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면

$15-3=12$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$2\times12=24$

(b) 학생 A가 다른 색의 공을 받은 경우

두 학생 B, C에게 흰 공 3개와 검은 공 3개를 나누어주는 경우의 수는

$${}_2H_3\times{}_2H_3={}_4C_3\times{}_4C_3=16$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받은 경우의 수는

$16-3=13$

(a), (b)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$24+13=37$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는

$22+34+37=93$

8. ⑤

[출제의도] 중복순열을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 모두 홀수이다.

(ⅰ) 함수 f의 치역에 홀수가 1개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

이때 $f(2)=2$, $f(4)=4$이므로 구하는 함수 f의 개수는 3

(ⅱ) 함수 f의 치역에 홀수가 2개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

① 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$ 의 원소의 개수가 1이면

$f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

$f(2),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

② 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$ 의 원소의 개수가 2이면

$f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3-2=6$

$f(2),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2\times2=4$

이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$3\times(2\times2+6\times4)=84$

(iii) 함수 f 의 치역에 홀수가 3개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3=1$

① 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$ 의 원소의 개수가 1이면

$f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 3

$f(2),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

② 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$ 의 원소의 개수가 2이면

$f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times({}_2\Pi_3-2)=18$

$f(2),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

③ 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$ 의 원소의 개수가 3이면

$f(1),\ f(3),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3!=6$

$f(2),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$1\times(3\times1+18\times2+6\times3)=57$

(i), (ii), (iii)에서

구하는 함수 f 의 개수는

$3+84+57=144$

9. 25

[출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가

검은색 카드의 왼쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 a, 두 검은색 카드의 사이에 있는 흰색 카드의 장수를 b, 검은색 카드의 오른쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 c라 하면

$a+b+c=8$

조건 (나)와 조건 (다)에서

$b\geq$ 2이고, 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 모두 3의 배수가 아닌 경우를 제외해야 한다.

음이 아닌 정수 b'에 대하여

$b=b'+2$으로 놓으면

$a+(b'+2)+c=8$

$a+b'+c=6$

방정식 $a+b'+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b',\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b',\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

이때 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가

1, 2인 경우, 4, 5인 경우, 7, 8인 경우를 제외해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$28-3=25$

10. 100

[출제의도] 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (나)에서 $f(1)=1,\ f(10)=10$이다.

(i) $f(5)=1,\ f(6)=7$인 경우

$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는 $(1,\ 1,\ 1)$의 1개가 존재한다.

$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는

$(7,\ 8,\ 9)$, $(7,\ 8,\ 10)$, $(7,\ 9,\ 9)$, $(7,\ 9,\ 10)$, $(7,\ 10,\ 10)$, $(8,\ 8,\ 9)$, $(8,\ 8,\ 10)$, $(8,\ 9,\ 9)$, $(8,\ 9,\ 10)$, $(8,\ 10,\ 10)$, $(9,\ 9,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 10)$, $(9,\ 10,\ 10)$, $(10,10,\ 10)$ 의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $1\times14=14$이다.

(ii) $f(5)=2,\ f(6)=8$인 경우

$f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 2)$ 의 4 $(={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

$f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는

$(8,\ 8,\ 9)$, $(8,\ 8,\ 10)$, $(8,\ 9,\ 9)$, $(8,\ 9,\ 10)$, $(8,\ 10,\ 10)$, $(9,\ 9,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 10)$, $(9,\ 10,\ 10)$, $(10,\ 10,\ 10)$ 의 9개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $4\times9=36$이다.

(iii) $f(5)=3,\ f(6)=9$인 경우

$f(5)=3$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 3)$ $(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$ $(2,\ 3,\ 3)$ 의 9개가 존재한다.

$f(6)=9$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는

$(9,\ 9,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 10)$, $(9,\ 10,\ 10)$, $(10,\ 10,\ 10)$ 의 4 $(={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

따라서 이 경우 함수 f의 개수는 $9\times4=36$이다.

(iv) $f(5)=4,\ f(6)=10$인 경우

$f(5)=4$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 4)$ $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$ 의 14개가 존재한다.

$f(6)=10$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는 $(10,\ 10,\ 10)$ 의 1개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $14\times1=14$이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$14+36+36+14=100$

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $f(1)=1,\ f(10)=10$이다.

(i) $f(5)=1,\ f(6)=7$인 경우

$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는 $(1,\ 1,\ 1)$ 의 1개가 존재한다.

$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$의 개수는 다음과 같다.

① $f(9)=9$일 때

${}_3\mathrm{H}_2-1={}_4\mathrm{C}_2-1=6-1=5$ ($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)

② $f(9)=10$일 때

$_4H_2-1={}_5C_2-1=10-1=9$ ($f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $5+9=14$이다.
(ⅱ) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우
① $f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$의 개수는 $_2H_3={}_4C_3=4$이다.
② $f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$의 개수는 $_3H_3-1={}_5C_3-1=10-1=9$
($f(7)=f(8)=f(9)=8$인 경우를 제외함)
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $4\times9=36$이다.
(ⅲ) 조건 (나)와 조건 (다)에서 함수 f의 $1\le x\le 5$일 때의 규칙성과 $6\le x\le 10$일 때의 규칙성이 서로 대칭적이므로 $f(5)=3$, $f(6)=9$인 함수 f의 개수는 (ⅱ)의 함수의 개수와 같고,
$f(5)=4$, $f(6)=10$인 함수 f의 개수는 (ⅰ)의 함수의 개수와 같음을 추론할 수 있다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는
$2\times(14+36)=2\times50=100$

11. 115

[출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있는가?

$f(1)=1$이면 조건 (가)에서 $f(1)=4$이므로 모순이다.
(ⅰ) $f(1)=2$
조건 (가)에서 $f(2)=4$
$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_4H_2={}_5C_2=10$
$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
이 경우 함수 f의 개수는 $10\times5=50$
(ⅱ) $f(1)=3$
조건 (가)에서 $f(3)=4$
$f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2
$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5\times5=25$
이 경우 함수 f의 개수는
$2\times25=50$
(ⅲ) $f(1)=4$
조건 (가)에서 $f(4)=4$
$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_2H_2={}_3C_2=3$
$f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
이 경우 함수 f의 개수는 $3\times5=15$
(ⅳ) $f(1)=5$인 경우
조건 (가)에서 $f(5)=4$
이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅰ) ~ (ⅳ)에서 구하는 함수 f의 개수는
$50+50+15=115$

12. 정답 ②

풀이

한 상자에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 12의 배수인 상자의 개수가 3이므로 3의 배수 3, 6, 9가 적힌 공은 3개의 상자에 하나씩 넣어야 한다. 12의 배수가 되려면 3, 9가 적힌 공을 넣은 상자에는 4 또는 8이 적힌 공을 하나씩 넣어야 하고, 6이 적힌 공을 넣은 상자에는 2가 적힌 공을 넣어야 한다.
즉, 2, 3, 4, 6, 8, 9가 적힌 공을 같은 종류의 상자 3개에 나누어 넣는 경우의 수는 2이다.
남은 공 3개를 이 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는
$_3\Pi_3=3^3=27$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times27=54$

13. 정답 180

풀이

주어진 조건을 만족시키도록 같은 종류의 바구니 4개에 공8개를 나누어 담는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수이고 두 공이 모두 흰 공인 경우
1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 2개를 택해 한 바구니에 담는 경우의 수는 $_3C_2=3$이다. 짝수가 적힌 공 3개를 남은 바구니 3개에 1개씩 담는 경우의 수는 1이다. 남은 공 중 홀수가 적힌 흰 공은 2가 적힌 검은 공만 담은 바구니에 담아야 하고, 홀수가 적힌 검은 공 2개를 1개의 공만 담은 두 바구니에 나누어 담는 경우의 수는 2이다.
따라서 (ⅰ)의 경우의 수는
$3\times1\times2=6$
(ⅱ) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수이고 두 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 경우
1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 1개와 1, 3이 적힌 검은 공 중에서 1개를 택해 한 바구니에 담는 경우의 수는
$_3C_1\times{}_2C_1=6$이다. 짝수가 적힌 공 3개를 남은 바구니 3개에 1개씩 담는 경우의 수는 1이다. 남은 공 중 홀수가 적힌 검은 공을 짝수가 적힌 1개의 흰 공만 담은 두 바구니 중 한 바구니에 담는 경우의 수는 2이고 홀수가 적힌 흰 공 2개를 1개의공만 담은 두 바구니에 나누어 담는 경우의 수는 2이다.
따라서 (ⅱ)의 경우의 수는
$6\times1\times2\times2=24$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 같은 종류의 바구니 4개에 공 8개를 나누어 담는 경우의 수는 $6+24=30$
이고, 이 네 바구니를 원형으로 나열하는 경우의 수는
$(4-1)!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $30\times6=180$

14. 정답 ②

풀이

서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 5의 약수가 되려면 2, 4, 6이 적힌 카드는 서로 이웃하면 안 되고, 3, 6이 적힌 카드도 서로 이웃하면 안 된다. 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열한 후 2, 4, 6이 적힌 카드를 나열할 때. 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하는 경우

3이 적힌 2장의 카드를 한 묶음으로 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 3개의 자리를 제외한 4개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고, 3이 적힌 두 카드 사이에 2, 4가 적힌 카드 중 하나를 나열하고 남은 4개의 자리 중 3개의 자리에 남은 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_4C_2\times 2\times {}_4C_3\times \frac{3!}{2!}=144$$

따라서 (ⅰ)의 경우의 수는

$30\times 144=4320$

(ⅱ) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 경우

1, 5가 적힌 카드를 나열하고, 나열한 카드 사이사이 중 2개의 자리에 3이 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times 2!}\times {}_5C_2=60$$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 3개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고 6이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 5개의 자리 중 4개의 자리에 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_3C_2\times {}_5C_4\times \frac{4!}{2!\times 2!}=90$$

따라서 (ⅱ)의 경우의 수는

$60\times 90=5400$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4320+5400=9720$

15. 정답 ②

길잡이

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

풀이

3명의 학생에게 빵을 나누어주는 경우는 먼저 빵을 1개씩 나누고 남은 3개의 빵을 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

우유를 나누어 주는 경우는 먼저 6개의 우유를 각 학생에게 나누어 준 빵의 개수만큼 나누어 주고 남은 2개의 우유를 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times 6=60$

16. 정답 ⑤

풀이

서로 다른 종류의 선물 상자 5개에 담는 쿠키의 개수를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$a+b+c+d+e=26$ (a, b, c, d, e는 2 이상 6 이하의 자연수)

$a=a_1+2$, $b=b_1+2$, $c=c_1+2$, $d=d_1+2$, $e=e_1+2$라 하면

$(a_1+2)+(b_1+2)+(c_1+2)+(d_1+2)+(e_1+2)=26$

$a_1+b_1+c_1+d_1+e_1=16$

(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1은 4 이하의 음이 아닌 정수)

또 $a_1=4-a_2$, $b_1=4-b_2$, $c_1=4-c_2$, $d_1=4-d_2$, $e_1=4-e_2$라 하면

$(4-a_2)+(4-b_2)+(4-c_2)+(4-d_2)+(4-e_2)=16$

$a_2+b_2+c_2+d_2+e_2=4$

(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2는 4 이하의 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 경우의 수는 순서쌍 $(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ e_2)$의 개수와 같으므로

$$\begin{aligned}{}_5H_4&={}_{5+4-1}C_4\\&={}_8C_4\\&=\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}=70\end{aligned}$$

17. 정답 ①

풀이

조건 (가)에 의하여 5 이하의 자연수 x에 대하여

$f(x)+2\le f(x+1)$임을 알 수 있다.

$f(2)=f(1)+2+a$,

$f(3)=f(2)+2+b=f(1)+4+a+b$,

$f(4)=f(3)+2+c=f(1)+6+a+b+c$,

$f(5)=f(4)+2+d=f(1)+8+a+b+c+d$,

$f(6)=f(5)+2+e=f(1)+10+a+b+c+d+e$

(a, b, c, d, e는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$f(6)=f(3)+10$에서

$f(1)+10+a+b+c+d+e=\{f(1)+4+a+b\}+10$

$c+d+e=4$ (c, d, e는 음이 아닌 정수)

이므로 c, d, e를 정하는 경우의 수는 ${}_3H_4$이다.

$f(1)\ge -9$이므로 $p=f(1)+9$라 하면 p는 음이 아닌 정수이다.

$f(6)=(p+1)+a+b+4\le 9$에서

$p+a+b\le 4$

$p+a+b+q=4$ (q는 음이 아닌 정수)

이므로 p, a, b, q를 정하는 경우의 수는 ${}_4H_4$이다.

따라서 a, b, c, d, e, p, q가 정해지면 함숫값이 모두 정해지므로 구하는 함수의 개수는

$$\begin{aligned}{}_3H_3\times {}_4H_4&={}_6C_4\times {}_7C_4\\&={}_6C_2\times {}_7C_3\\&=\frac{6\times 5}{2\times 1}\times \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\\&=15\times 35\\&=525\end{aligned}$$

18. 정답 ⑤

3 이하의 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+1}=3$이므로

$a_1+a_2=3$, $a_2+a_3=3$, $a_3+a_4=3$

$a_1=0$이면 $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=3$

$a_1=1$이면 $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$

$a_1=2$이면 $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=1$

$a_1=3$이면 $a_2=0$, $a_3=3$, $a_4=0$

$a_1 \geq 4$이면 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅰ) $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=3$인 경우

$f(x)=2$인 x의 개수와 $f(x)=4$인 x의 개수가 모두 3이므로 구하는 함수 f의 개수는

2, 2, 2, 4, 4, 4

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{3!3!}=20$

$a_1=3$, $a_2=0$, $a_3=3$, $a_4=0$인 경우도 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 20

(ⅱ) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$인 경우

$f(x)=1$인 x의 개수와 $f(x)=3$인 x의 개수가 모두 1이고, $f(x)=2$인 x의 개수와 $f(x)=4$인 x의 개수가 모두 2이므로 구하는 함수 f의 개수는

1, 2, 2, 3, 4, 4

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$

$a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=1$인 경우도 같은 방법으로 구하면 함수 f의 개수는 180

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times20+2\times180=400$

19. **정답** 950

(ⅰ) 조건을 만족시키는 n의 값이 1, 2인 경우

$f(1)>f(3)$, $f(2)>f(4)$, $f(3)\leq f(5)$이다.

① $f(3)=1$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4\times5=20$

② $f(3)=2$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3\times4=12$

③ $f(3)=3$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2\times3=6$

④ $f(3)=4$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1\times2=2$

각각의 경우에 $f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$(20+12+6+2)\times10=400$

(ⅱ) 조건을 만족시키는 n의 값이 1, 3인 경우

$f(1)>f(3)>f(5)$이고 $f(2)\leq f(4)$이다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_5C_3\times{}_5H_2={}_5C_2\times{}_6C_2=10\times15=150$

(ⅲ) 조건을 만족시키는 n의 값이 2, 3인 경우

$f(2)>f(4)$, $f(3)>f(5)$, $f(1)\leq f(3)$이다.

① $f(3)=2$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2\times1=2$

② $f(3)=3$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3\times2=6$

③ $f(3)=4$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4\times3=12$

④ $f(3)=5$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5\times4=20$

각각의 경우에 $f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$(2+6+12+20)\times10=400$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$400+150+400=950$

20. **정답** 254

조건 (가)에 의하여

$f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq f(6)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)f(4)f(5)$, $f(4)f(5)f(6)$의 값이 모두 3의 배수이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수인 경우

① $f(4)=1$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$1\times(4+1)=5$

② $f(4)=2$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$4\times(4+1)=20$

③ $f(4)=3$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

그러므로 이 경우의 수는

$10\times10=100$

④ $f(4)=4$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$이어야 하고,
이때 $f(6)=6$이다.
그러므로 이 경우의 수는
$20\times1=20$

⑤ $f(4)=5$일 때
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$
$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$이어야 하고, 이때 $f(6)=6$이다.
그러므로 이 경우의 수는
$35\times1=35$

⑥ $f(4)=6$일 때
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$
$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1
그러므로 이 경우의 수는
$56\times1=56$

①~⑥에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$5+20+100+20+35+56=236$

(ⅱ) $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 아닌 경우
조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $f(3)$의 값과 $f(6)$의 값이 모두 3의 배수이어야 한다.

① $f(3)=f(6)=3$일 때
$f(4)=f(5)=3$이므로 $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

② $f(3)=3$, $f(6)=6$일 때
$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
이 각각에 대하여 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우는
$f(4)=f(5)=4$ 또는 $f(4)=4$, $f(5)=5$ 또는
$f(4)=f(5)=5$의 3가지이다.
그러므로 이 경우의 수는
$6\times3=18$

③ $f(3)=f(6)=6$일 때
$f(4)=f(5)=6$이므로 $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 18이다.

(ⅰ), (ⅱ)애 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$236+18=254$

TH①. 확률

2025학년도 사관학교

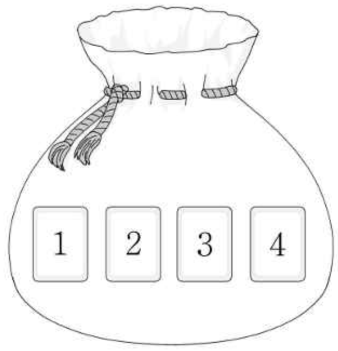
1. 흰 공 1개, 검은 공 6개, 노란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 주머니에 남아 있는 공의 색의 종류의 수가 처음으로 2가 되면 시행을 멈춘다. 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수가 4일 때, 꺼낸 공 중에 흰 공이 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024년도 10월 교육청모의고사

2. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다. 확인한 수 k가 홀수이면 점 P를 양의 방향으로 k만큼 이동시키고, 짝수이면 점 P를 음의 방향으로 k만큼 이동시킨다.

이 시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 0 이상일 때, 확인한 네 개의 수의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



2025학년도 6월 평가원모의고사

EBS 연계문항

3. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$

2025학년도 9월 평가원모의고사

4. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f: X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은?

$a \in X$, $b \in X$에 대하여 a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

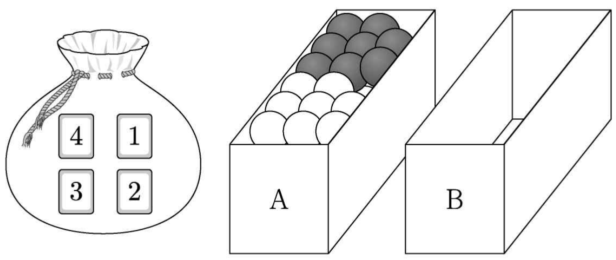
① $\frac{9}{19}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{27}{40}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

5. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다. 확인한 수가 1이면 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고, 확인한 수가 2 또는 3이면 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고, 확인한 수가 4이면 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

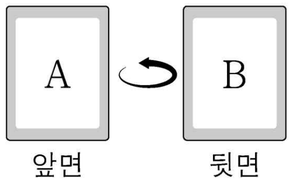
① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



6. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고,
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128 \times p$의 값을 구하시오. [4점]

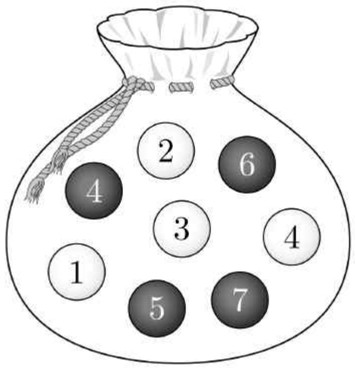


2024학년도 6월 평가원모의고사

7. 주머니에 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 $4,\ 5,\ 6,\ 7$이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

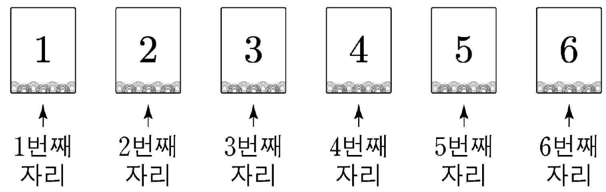
주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12을 점수로 얻고, 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2023학년도 수능

8. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

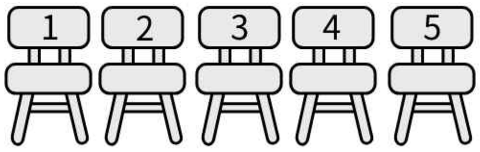
2024학년도 6월 평가원모의고사

9. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a\geq 5$일 때, $c-a\geq 10$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2024년 수능특강 Lv2

3점(27번) 연계 가능

10. 그림과 같이 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 5개의 의자가 있다. 세 사람 A, B, C가 이 5개의 의자 중 임의로 3개의 의자에 각각 앉을 때, A, B가 앉은 의자에 적혀 있는 두 수의 합이 C가 앉은 의자에 적혀 있는 수 이하일 확률은?



① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{7}{30}$ ④ $\dfrac{4}{15}$ ⑤ $\dfrac{3}{10}$

연계 가능

11. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오 (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

> 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $\{x-f(3)\}\{f(x)-3\} \leq 0$이다.

2024년 수능특강 Lv2

3점(27번) 연계 가능

12. 1부터 8까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개를 택해 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수일 확률은?

① $\frac{5}{28}$　② $\frac{3}{14}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{2}{7}$　⑤ $\frac{9}{28}$

2024년 수능특강 Lv3

2025년 학년도 6월 평가원 28번 연계

13. 그림과 같이 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 탁자 위에 놓여 있다.

탁자 위의 4개의 동전 중 임의로 서로 다른 3개를 택하여 동시에 뒤집는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복할 때, 3번째 시행 후 처음으로 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

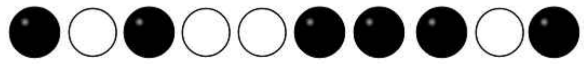
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

14. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 임의로 모두 일렬로 나열할 때, 왼쪽에서 첫 번째 흰 공과 두 번째 흰 공 사이에 놓인 검은 공의 개수를 m, 세 번째 흰 공과 네 번째 흰 공 사이에 놓인 검은 공의 개수를 n이라 하자. 그림은 $m=1$, $n=3$이 되도록 10개의 공을 일렬로 나열한 예이다.



흰 공 4개와 검은 공 6개를 임의로 모두 일렬로 나열할 때, mn의 값이 0 또는 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024년 수능특강 Lv3

15. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있는 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 두 수 중에서 큰 수를 기록하고, 꺼낸 2개의 공을 다시 주머니에 넣는다.

위의 시행을 두 번 반복하여 기록한 두 수를 차례로 m, n이라 하자.

$$\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$$

의 값이 정수일 때, mn의 값이 18의 배수일 확률은?

① $\frac{41}{154}$ ② $\frac{43}{154}$ ③ $\frac{45}{154}$

④ $\frac{47}{154}$ ⑤ $\frac{7}{22}$

2024년 수능완성

3점(27번) 연계 가능

16. 수학 시험을 치르기 전에 5명의 학생이 각자 자신의 휴대폰을 하나씩 교탁에 있는 보관함에 제출하였다. 시험이 끝난 후 5명의 학생에게 임의로 휴대폰을 1개씩 나누어 줄 때, 자신의 휴대폰을 받은 학생이 한 명 이하일 확률은?

① $\frac{27}{40}$ ② $\frac{83}{120}$ ③ $\frac{17}{24}$

④ $\frac{29}{40}$ ⑤ $\frac{89}{120}$

17. 주머니에 1부터 13까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 13장의 카드가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내어 나온 세 수의 합이 3의 배수일 때, 이 세 수의 곱이 3의 배수일 확률은?

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

18. 상자 A에는 흰 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에 들어 있는 공을 이용하여 다음 시행을 한다.

상자 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 흰 공이 나오면 꺼낸 공 3개를 상자 B에 넣은 후 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣고, 흰 공이 나오지 않으면 꺼낸 공 3개만 상자 B에 넣는다.

이 시행 후 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같을 확률은? [3점]

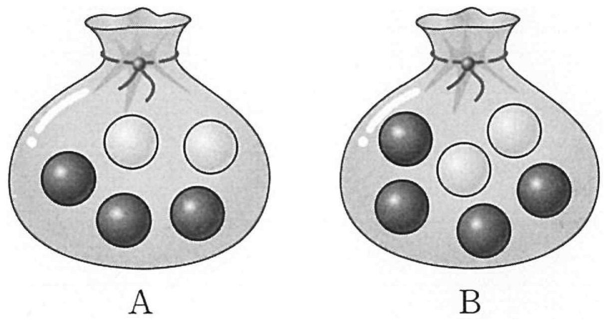
① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{13}{21}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

19. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 홀수이면 주머니 A에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼내고, 나오는 눈의 수가 짝수이면 주머니 A에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다.

이 시행을 한 번 할 때, 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{17}{56}$ ② $\frac{11}{35}$ ③ $\frac{13}{40}$
④ $\frac{47}{140}$ ⑤ $\frac{97}{280}$

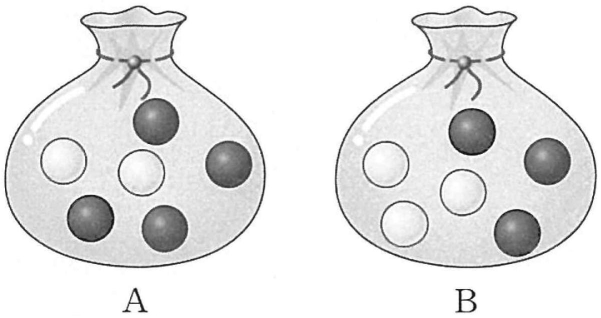


20. 어느 장난감 매장에서 오픈기념으로 장난감 2개를 넣어 포장한 럭키박스를 판매하려고 한다. 같은 종류의 인형 3개, 같은 종류의 피규어 3개, 같은 종류의 자석블록 2개 중에서 임의로 2개의 장난감을 택하여 럭키박스에 넣을 때, 넣은 2개의 장난감이 서로 다른 종류일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 럭키박스에 넣은 2개의 장난감의 순서는 구분하지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

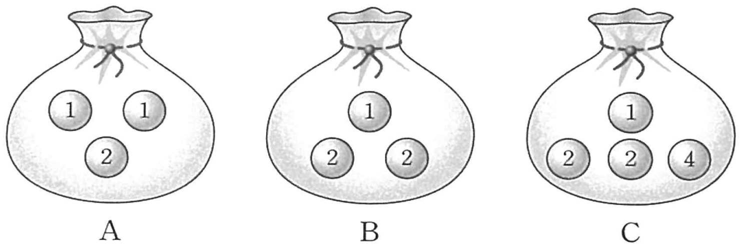
> 두 주머니 A, B에서 임의로 각각 한 개의 공을 동시에 꺼내어 두 공의 색이 같으면 주사위를 2번 던져 나온 두 눈의 수를 곱한 값을 점수로 받고, 두 공의 색이 다르면 주사위를 1번 던져 나온 눈의 수에 3을 곱한 값을 점수로 받는다.

이 시행을 한 번 하여 받은 점수가 6의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 다를 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 주머니 A에는 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 1개가 들어 있고, 주머니 B에는 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 2개가 들어 있고, 주머니 C에는 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 2개, 4가 적힌 공 1개가 들어 있다. 세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 3이거나 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값이 8일 확률은? [3점]

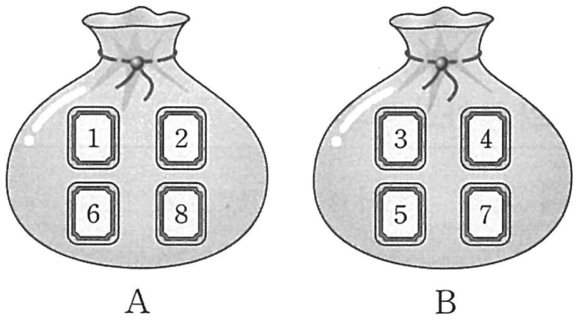
① $\frac{11}{36}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{13}{36}$　④ $\frac{7}{18}$　⑤ $\frac{5}{12}$



23. 주머니 A에는 숫자 $1,\ 2,\ 6,\ 8$이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 $3,\ 4,\ 5,\ 7$이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 하용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 B에 넣고, 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 A에 넣는다.

이 시행을 두 번 반복한 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합 보다 클 때, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. [정답] 13

2. [정답] 61

[해설]
시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 0 이상인 사건을 A, 확인한 4개의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 확인한 4개의 수의 곱이 홀수인 경우확인한 4개의 수가 모두 홀수이고, 이때 점 P의 좌표는 항상 0 이상이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)={}_4\mathrm{C}_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(ⅱ) 확인한 4개의 수의 곱이 짝수인 경우확인한 4개의 수 중 짝수의 개수가 3 또는 4인 경우에는 점 P의 좌표가 0 미만이다.

① 확인한 짝수의 개수가 2인 경우확인한 4개의 수가 $2,\ 2,\ 1,\ 3$ 또는 $2,\ 2,\ 3,\ 3$ 또는 $2,\ 4,\ 3,\ 3$일 때 점 P의 좌표가 0 이상이므로 확인한 4개의 수가$2,\ 2,\ 1,\ 3$일 확률은 $\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$ $2,\ 2,\ 3,\ 3$일 확률은 $\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$ $2,\ 4,\ 3,\ 3$일 확률은 $\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$따라서 구하는 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$=(12+6+12)\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{15}{128}$$

② 확인한 짝수의 개수가 1인 경우확인한 4개의 수가 짝수 1개와 홀수 3개인 경우에서 $4,\ 1,\ 1,\ 1$인 경우만 제외하면 점 P의 좌표가 0 이상이므로 구하는 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4-{}_4\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{15}{64}$

①, ②에서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{15}{128}+\frac{15}{64}=\frac{45}{128}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|\ A)$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{45}{128}}=\frac{8}{53}$$

따라서 $p=53,\ q=8$이므로 $p+q=61$

3. [정답] ①

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 28 [4.00점]

[해설]
동전 4개를 왼쪽부터 차례대로 ①, ②, ③, ④, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때 동전 4개의 순서쌍 $(\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{T})$에서 동전 1개를 뒤집는 시행을 5회 시행한 후 모든 면이 같아야 한다.

(ⅰ) 5회 시행한 후 모든 면이 앞면일 때,
①, ②, ③, ④를 뒤집은 횟수의 순서쌍이

(1) $(0,0,4,1)$일 때
구하는 경우의 수는 3개의 H 중 4번 뒤집을 하나를 선택하고 4개의 H와 1개의 T를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{4!}=15$$

(2) $(0,2,2,1)$일 때
구하는 경우의 수는 3개의 H 중 뒤집지 않을 하나를 선택하고 선택한 2개의 H를 ①, ②라 하면 ①, ①, ②, ②, ④를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{2!2!}=90$$

(3) $(0,0,2,3)$일 때
구하는 경우의 수는 3개의 H 중 2번 뒤집을 하나를 선택하고 2개의 H와 3개의 T를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{2!3!}=30$$

(4) $(0,0,0,5)$일 때
경우의 수는 1이다.

이상에서 모두 앞면이 나오는 경우의 수는
$15+90+30+1=136$

(ⅱ) 5회 시행한 후 모든 면이 앞면일 때,
①, ②, ③, ④를 뒤집은 횟수의 순서쌍이

(1) $(1,1,1,2)$일 때
구하는 경우의 수는 ①, ②, ③, ④, ④를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(2) $(1,1,3,0)$일 때
구하는 경우의 수는 3번 뒤집을 H를 선택하고 ①, ①, ①, ②, ③을 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{3!}=60$$

이상에서 모두 뒷면이 나오는 경우의 수는
$60+60=120$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{136}{136+120}=\frac{136}{256}=\frac{17}{32}$$

4. [정답] ④

[해설]
집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여 $f:X\to X$인 모든 함수 f에서 $a\in X,\ b\in X$에 대하여 a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이므로

(ⅰ) $f(1)=1$ 일 때
1은 $2,\ 3,\ 4$의 약수이고 3은 2와 4의 약수가 아니므로 가능한

$f(3)$ 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지이고

(a) $f(2)=1$ 인 경우

가능한 $f(4)$ 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지

(b) $f(2)=2$ 인 경우

가능한 $f(4)$ 의 값은 2, 4의 2가지

(c) $f(2)=3$ 인 경우

가능한 $f(4)$ 의 값은 3의 1가지

(d) $f(2)=4$ 인 경우

가능한 $f(4)$ 의 값은 4의 1가지

따라서 $f(1)=1$ 일 때 함수 f 의 개수는

$4\times(4+2+1+1)=32$

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

$4\times5=20$

(ii) $f(1)=2$ 일 때

가능한 $f(2)$ 의 값은 2, 4의 2가지

(a) $f(2)=2$ 일 때

가능한 $f(3)$ 의 값은 2, 4의 2가지

가능한 $f(4)$ 의 값은 2, 4의 2가지

(b) $f(2)=4$ 일 때

가능한 $f(3)$ 의 값은 2, 4의 2가지

가능한 $f(4)$ 의 값은 4의 1가지

따라서 $f(1)=2$ 일 때 함수 f 의 개수는

$2\times2+2=6$

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 6

(iii) $f(1)=3$ 일 때

$f(2)=f(3)=f(4)=3$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 1

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 는 존재하지 않는다.

(iv) $f(1)=4$ 일 때

$f(2)=f(3)=f(4)=4$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는

1

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$32+6+1+1=40$

$f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

$20+6+1=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{40}$ 이다.

[다른 풀이]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 $f: X \to X$ 인 모든 함수 f 에서 $a\in X$, $b\in X$ 에 대하여 a 가 b 의 약수이면 $f(a)$ 는 $f(b)$ 의 약수이므로

$f(1)\le f(2)\le f(4)$, $f(1)\le f(3)$

을 만족시킨다.

(i) $f(1)=1$ 일 때

$f(2)$, $f(4)$ 는 1, 2, 4에 대응되거나 1, 3에 대응되어야 하고, 모두 1에 대응되는 경우는 중복이므로 가능한 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2+{}_2\mathrm{H}_2-1={}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2-1=8$

$f(3)$ 은 모든 원소에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는

4

따라서 $f(1)=1$ 일 때 함수 f 의 개수는

$8\times4=32$

이때, $f(4)$ 가 짝수인 경우는

$f(4)=2$ 일 때, $f(2)$ 의 값은 1, 2의 2가지

$f(4)=4$ 일 때, $f(2)$ 의 값은 1, 2, 4의 3가지

이므로 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

$(2+3)\times4=20$

(ii) $f(1)=2$ 일 때

$f(2)$, $f(4)$ 는 2 또는 4에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

$f(3)$ 은 2 또는 4에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는

2

따라서 $f(1)=2$ 일 때 함수 f 의 개수는

$3\times2=6$

이때, $f(4)$ 는 항상 짝수이므로 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

6

(iii) $f(1)=3$ 일 때

$f(2)=f(3)=f(4)=3$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 1

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 는 존재하지 않는다.

(iv) $f(1)=4$ 일 때

$f(2)=f(3)=f(4)=4$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는

1

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$32+6+1+1=40$

$f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

$20+6+1=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{40}$ 이다.

5. ④

4번의 시행 중에 확인한 수가 1이 나오는 횟수를 x, 2 또는 3이 나오는 횟수를 y, 4가 나오는 횟수를 z 라 하면

$x+y+z=4$, …… ㉠

$x+2y+3z=8$ …… ㉡

를 만족시킨다. (단, x, y, z 는 음이 아닌 정수)

㉡ − ㉠을 하면 $y+2z=4$ …… ㉢

㉢을 만족시키는 y, z 의 순서쌍 (y, z) 는

$(4, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$

㉠에 의하여 순서쌍 (x, y, z) 는

$(0, 4, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 0, 2)$

이 중에서 상자 B에 검은 공의 개수가 2인 경우는 $(2, 0, 2)$ 뿐이다.

순서쌍 (x, y, z) 에 해당하는 사건이 발생할 확률을 $\mathrm{P}_{(x,\,y,\,z)}$ 라 하면

$$\mathrm{P}_{(x,\,y,\,z)}=\frac{4!}{x!\,y!\,z!}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^z$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{\mathrm{P}_{(2,\,0,\,2)}}{\mathrm{P}_{(0,\,4,\,0)}+\mathrm{P}_{(1,\,2,\,1)}+\mathrm{P}_{(2,\,0,\,2)}}$$

$$=\frac{\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{4!}{2!}\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{4}+\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{35}$$

6. 62

이 시행을 5번 반복할 때 카드를 뒤집는 경우가 홀수 번 나오는 사건이 구하고자 하는 확률의 사건이다.

1회 시행 후 카드를 뒤집을 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 5회 시행에서 카드를 n번 뒤집는 확률을 p_n이라 하면

$p_n = {}_5\mathrm{C}_\mathrm{n}\left(\frac{1}{4}\right)^\mathrm{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{5-\mathrm{n}} (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

$\therefore\ \ p = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{{}_5\mathrm{C}_1 \times 3^4 + {}_5\mathrm{C}_3 \times 3^2 + {}_5\mathrm{C}_5}{4^5} = \frac{31}{64}$

$\therefore\ \ 128 \times p = 62$

7. 51

[출제의도] 경우의 수를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가

(i) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우

얻는 점수가 12이므로 조건을 만족시킨다.

이 경우의 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

(ii) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우

8개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2 = 28$

(ii -1) 꺼낸 두 공의 색이 모두 흰 색인 경우

두 공에 적힌 수의 곱이 짝수이면 조건을 만족시키므로 이 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 - {}_2\mathrm{C}_2 = 6 - 1 = 5$

(ii -2) 꺼낸 두 공이 모두 검은 색인 경우

두 공에 적힌 수의 집합이 $\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$

이어야 하므로 이 경우의 수는 2이다.

그러므로 꺼낸 두 공이 서로 같은 색이고 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률은

$\frac{5+2}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{7} + \frac{1}{4} = \frac{23}{28}$

이므로

$p + q = 28 + 23 = 51$

8. 49

[출제의도] 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 A, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(i) 사건 A가 일어날 확률

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 주사위를 3번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수가 3 또는 1이어야 한다.

이때 독립시행의 확률에 의하여 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ …… ㉠

홀수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

(ii) 사건 $A \cap B$가 일어날 확률

㉠에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 3 또는 5의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

㉡에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 짝수의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

따라서

$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$

(i), (ii)에서 구하는 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36}$$

이므로

$p + q = 36 + 13 = 49$

9. 9

[출제의도] 조건부확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

$b - a \geq 5$인 사건을 E, $c - a \geq 10$인 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F|E) = \frac{\mathrm{P}(E \cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$

이때 $b - a \geq 5$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (1,\ 8),\ \cdots,\ (1,\ 11)$

$(2,\ 7),\ (2,\ 8),\ \cdots,\ (2,\ 11)$

$\vdots$

$(6,\ 11)$

$a=1$일 때 c의 개수는 $6+5+4+3+2+1=21$

$a=2$일 때 c의 개수는 $5+4+3+2+1=15$

$a=3$일 때 c의 개수는 $4+3+2+1=10$

$a=4$일 때 c의 개수는 $3+2+1=6$

$a=5$일 때 c의 개수는 $2+1=3$

$a=6$일 때 c의 개수는 1

이므로 $b - a \geq 5$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$21+15+10+6+3+1=56$

즉, $\mathrm{P}(E) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$

한편, $b-a\geq 5$이고 $c-a\geq 10$인 경우는

$a=1$, $c=11$일 때 $b=6$, 7, 8, 9, 10

$a=1$, $c=12$일 때 $b=6$, 7, 8, 9, 10, 11

$a=2$, $c=12$일 때 $b=7$, 8, 9, 10, 11

이므로 $b-a\geq 5$이고 $c-a\geq 10$인 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$5+6+5=16$

즉, $\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{16}{220}=\dfrac{4}{55}$

따라서

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}}=\frac{2}{7}$$

즉, $p=7$, $q=2$이므로

$p+q=7+2=9$

10. **정답** ③

풀이

세 사람 A, B, C가 이 5개의 의자 중 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

A, B, C가 앉은 의자에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c라 하면

A, B가 앉은 의자에 적혀 있는 두 수의 합이 C가 앉은 의자에 적혀 있는 수 이하인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 1,\ 3)$,

$(1,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 1,\ 4)$,

$(1,\ 2,\ 5)$, $(2,\ 1,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 1,\ 5)$,

$(1,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 1,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 2,\ 5)$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{14}{60}=\dfrac{7}{30}$

11. **정답** 43

풀이

집합 X에서 X로의 모든 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4$이다.

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

$f(1)$의 값은 1, 2, 3, 4중 하나이므로 $f(1)$을 정하는 경우의 수는 4

$x>1$일 때 $f(x)\leq 3$이므로 $f(2)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2$

이때의 경우의 수는

${}_4\times{}_3\Pi_2=4\times3^2=36$

(ⅱ) $f(3)=2$인 경우

$x<2$일 때 $f(x)\geq 3$이므로 $f(1)$을 정하는 경우의 수는 2

$f(2)$의 값은 1, 2, 3, 4중 하나이므로 $f(2)$를 정하는 경우의 수는 4

$x>2$일 때 $f(x)\leq 3$이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 3

이때의 경우의 수는

$2\times4\times3=24$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

$x<3$일 때 $f(x)\geq 3$이므로 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$

$x>3$일 때 $f(x)\leq 3$이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 3

이때의 경우의 수는

${}_2\Pi_2\times3=2^2\times3=12$

(ⅳ) $f(3)=4$인 경우

$x<3$일 때 $f(x)\geq 3$이므로 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$

$f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4중 하나이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 4

이때의 경우의 수는

${}_2\Pi_2\times4=2^2\times4=16$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{36+24+12+16}{4^4}=\dfrac{11}{32}$

따라서 $p=32$, $q=11$이므로 $p+q=43$

12. **정답** ④

풀이

서로 다른 8개의 숫자 중에서 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{P}_3=8\times7\times6=336$

1부터 8까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6이다.

나열된 수가 3, 6중 하나만 포함하는 사건을 A, 3, 6을 모두 포함하는 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

(ⅰ) 3, 6 중 하나를 택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수이려면 두 번째에 3의 배수를 놓고 첫 번째와 세 번째에 1, 2, 4, 5, 7, 8 중 2개를 놓으면 되므로

${}_6\mathrm{P}_2=6\times5=30$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2\times30}{336}=\dfrac{5}{28}$

(ⅱ) 3, 6을 모두 택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_2=1$

1, 2, 4, 5, 7, 8 중 1개를 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1=6$

배열과 상관없이 이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수이므로

$3!=6$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{6\times6}{336}=\dfrac{3}{28}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{28}+\frac{3}{28}=\frac{2}{7}$$

13. **정답** ②

풀이

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하자.

3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우는

HHHT → HHTT → HTTT → HHHH

뿐이다.

1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 3번째 시행에서 T, T, T를 뒤집으면 되므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_4\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이는 경우는

HHHT → HHTT → HHHT → TTTT

뿐이다.

1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, T, T를 뒤집고, 3번째 시행에서 H, H, H를 뒤집으면 되므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_4\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

14. **정답** 13

풀이

흰 공 4개와 검은 공 6개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{10!}{4!\times6!}=210$$

mn의 값이 0 또는 작수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 m, n이 모두 홀수인 사건이다.

첫 번째 흰 공 왼쪽에 나열된 검은 공의 개수를 x, 두 번째 흰 공과 세 번째 흰 공 사이에 나열된 검은 공의 개수를 y, 네 번째 흰 공 오른쪽에 나열된 검은 공의 개수를 z라 하면

(ⅰ) $m=1$, $n=1$인 경우

방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$$

(ⅱ) $m=1$, $n=3$ 또는 $m=3$, $n=1$인 경우

방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$$

(ⅲ) $m=1$, $n=5$ 또는 $m=3$, $n=3$ 또는 $m=5$, $n=1$인 경우

방정식 $x+y+z=0$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{15+2\times6+3\times1}{210}=\frac{1}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

이므로 $p+q=7+6=13$

15. **정답** ③

풀이

$\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수인 사건을 A, mn의 값이 18의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B\mid A)$이다. 2개의 공에 적혀 있는 두 수 중에서 큰 수를 기록하므로 m, n은 2 이상 8 이하의 자연수이다.

$\left|\sin\frac{m\pi}{6}\right|\le 1$, $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\le 1$이므로 $\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $\sin\frac{m\pi}{6}$, $\cos\frac{n\pi}{3}$ 중 적어도 하나가 0이거나

$\sin\frac{m\pi}{6}$, $\cos\frac{n\pi}{3}$가 모두 정수이어야 한다.

$\sin\frac{m\pi}{6}$의 값이 정수이려면 $m=3$ 또는 $m=6$

$\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $n=3$ 또는 $n=6$

$\sin\frac{3\pi}{6}=1$, $\sin\frac{6\pi}{6}=0$, $\cos\frac{3\pi}{3}=-1$, $\cos\frac{6\pi}{3}=1$이므로

$\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $m=6$일 때 n은 2 이상 8 이하의 자연수이고, $m=3$일 때 $n=3$ 또는 $n=6$이다.

(ⅰ) $m=6$이고 n이 2 이상 8 이하의 자연수인 경우

첫 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 어느 공을 꺼내도 상관없으므로 그 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{28}$$

(ⅱ) $m=3$이고 $n=3$ 또는 $n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내거나 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\times\left(\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\right)$$

$$=\frac{2}{28}\times\left(\frac{2}{28}+\frac{5}{28}\right)=\frac{1}{56}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{28}+\frac{1}{56}=\frac{11}{56}$

사건 $A\cap B$는 $\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이고 mn의 값이 18의 배수인 사건이므로

(ⅲ) $m=6$, $n=3$ 또는 $m=6$, $n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내거나 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\times\left(\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\right)$$

$$=\frac{5}{28}\times\left(\frac{2}{28}+\frac{5}{28}\right)=\frac{35}{28\times28}$$

(ⅳ) $m=3$, $n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}$$

$$=\frac{2}{28}\times\frac{5}{28}=\frac{10}{28\times28}$$

(ⅲ), (ⅳ)에서

$$P(A\cap B)=\frac{35}{28\times28}+\frac{10}{28\times28}=\frac{45}{28\times28}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{45}{28\times28}}{\frac{11}{56}}=\frac{45}{154}$$

16. 정답 ⑤

서로 다른 5개의 휴대폰을 5명의 학생에게 나누어 주는 모든 경우의 수는

$5!=120$

(ⅰ) 자신의 휴대폰을 받는 학생이 두 명인 경우

자신의 휴대폰을 받는 학생 두 명을 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

5명의 학생 A, B, C, D, E의 휴대폰을 각각 a, b, c, d, e라 하자. 예를 들어 A, B가 자신의 휴대폰을 받고, 나머지 학생 C, D, E가 모두 다른 학생의 휴대폰을 받는 경우의 수는 표와 같이 2이다.

A	B	C	D	E
a	b	d	e	c
a	b	e	c	d

따라서 이때의 경우의 수는 $10\times2=20$

(ⅱ) 자신의 휴대폰을 받는 학생이 세 명인 경우

자신의 휴대폰을 받는 학생 세 명을 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

예를 들어 A, B, C가 자신의 휴대폰을 받고, 나머지 학생 D, E가 모두 다른 학생의 휴대폰을 받는 경우의 수는 1이다.

따라서 이때의 경우의 수는 $10\times1=10$

(ⅲ) 자신의 휴대폰을 받는 학생이 네 명 이상인 경우

모두 자신의 휴대폰을 받는 경우이므로 경우의 수는 1이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$1-\frac{20+10+1}{120}=\frac{89}{120}$$

17. 정답 ⑤

1부터 13까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지로 분류하면

$A=\{1, 4, 7, 10, 13\}$은 나머지가 1이고

$B=\{2, 5, 8, 11\}$은 나머지가 2이고

$C=\{3, 6, 9, 12\}$는 나머지가 0이다.

세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 집합 A에서 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

(ⅱ) 집합 B에서 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

(ⅲ) 집합 C에서 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

(ⅳ) 세 집합 A, B, C에서 각각 1개씩 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=80$

(ⅰ)~ (ⅳ)에 의하여 세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는

$10+4+4+80=98$

이 중에서 세 수의 곱이 3의 배수가 되는 경우는 (ⅲ)과 (ⅳ)이므로 세 수의 곱이 3의 배수가 되는 경우의 수는

$4+80=84$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{84}{98}=\frac{6}{7}$$

18. 정답 ②

상자 A에 검은 공이 6개 들어 있으므로 시행 후 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같으려면 두 상자 A와 B에 검은 공이 각각 3개씩 들어 있어야 한다.

(ⅰ) 흰 공 3개를 꺼내는 경우

상자 B에는 검은 공이 최대 2개 들어갈 수 있으므로 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같을 수 없다.

(ⅱ) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어가려면 나중에 꺼내는 2개의 공이 모두 검은 공이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_2\times{}_6C_1}{{}_{10}C_3}\times\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

(ⅲ) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어가려면 나중에 꺼내는 2개의 공 중 검은 공이 1개이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_2}{{}_{10}C_3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

(ⅳ) 검은 공 3개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어 있으므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{6}=\frac{25}{42}$$

19. 정답 ⑤

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수일 확률과 짝수일 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수인 경우

주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}\times\frac{{}_3C_1}{{}_7C_1}=\frac{3}{35}$$

주머니 A에서 검은 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 5개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1}\times\frac{{}_2C_1}{{}_7C_1}=\frac{3}{35}$$

따라서 이 경우에 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\frac{3}{35}+\frac{3}{35}=\frac{6}{35}$$

(ⅱ) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 짝수인 경우

주머니 A에서 흰 공 2개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 4개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_1}{{}_8C_1}=\frac{1}{40}$$

주머니 A에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_3C_1}{{}_8C_1}=\frac{9}{80}$$

주머니 A에서 검은 공 2개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 6개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1}{{}_8C_1}=\frac{3}{80}$$

따라서 이 경우에 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\frac{1}{40}+\frac{9}{80}+\frac{3}{80}=\frac{7}{40}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{6}{35}+\frac{7}{40}=\frac{97}{280}$$

20. **정답** 7

8개의 장난감 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

럭키박스에 넣은 2개의 장난감이 서로 다른 종류인 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 럭키박스에 넣은 2개의 장난감이 서로 같은 종류인 사건이다.

같은 종류의 인형 3개 중 2개를 택하거나 같은 종류의 피규어 3개 중 2개를 택하거나 같은 종류의 자석블록 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2+{}_3C_2+{}_2C_2=3+3+1=7$

이므로

$$P(A^C)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

그러므로 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$p+q=4+3=7$

21. **정답** 17

두 주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 E, 받은 점수가 6의 배수인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $P(E\mid F)$이다.

(ⅰ) 두 주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$P(E)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

주사위를 1번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6이고, 나온 눈의 수에 3을 곱한 값이 6의 배수가 되는 경우는

3×2, 3×4, 3×6

이므로 이 경우의 수는 3이다.

그러므로 $P(E\mid F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 두 주머니에서 서로 같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$$P(E^C)=1-P(E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

주사위를 2번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6^2이고, 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때 ab가 6의 배수가 되는 순서쌍 $(a,\ b)$는

① 주사위에서 나온 눈의 수에 6이 있는 경우

$(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$

의 11가지이다.

② 주사위에서 나온 눈의 수에 6이 없는 경우

$(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

의 4가지이다.

①, ②에서

$$P(F\mid E^C)=\frac{11+4}{6^2}=\frac{15}{6^2}=\frac{5}{12}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$P(E\cap F)=P(E)P(F\mid E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}P(F)&=P(E\cap F)+P(E^C\cap F)\\&=P(E)P(F\mid E)+P(E^C)P(F\mid E^C)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{11}{24}\end{aligned}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{24}}=\frac{6}{11}$$

따라서 $p=11$, $q=6$이므로 $p+q=11+6=17$

22. **정답** ①

세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 할 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하고, 이 시행에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 3인 사건을 M, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 N이라 하면 구하는 확률은 $P(M\cup N)$이다.

(ⅰ) 세 수 a, b, c의 최댓값과 최솟값의 차가 3인 경우는

① $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$

② $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$

③ $(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

그러므로 $\mathrm{P}(M)=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$

(ⅱ) 세 수 $a,\ b,\ c$의 최댓값과 최솟값의 차가 3이면서 세 수 $a,\ b,\ c$의 곱이 8인 경우는

① $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$

② $(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

그러므로 $\mathrm{P}(M\cap N)=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(M\cup N)=\mathrm{P}(M)+\mathrm{P}(N)-\mathrm{P}(M\cap N)$$
$$=\frac{7}{36}+\frac{1}{4}-\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$$

23. **정답** 19

주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$1+2+6+8=17$

주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$3+4+5+7=19$

두 번의 시행은 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다. 이때 두 번의 시행을 한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합을 각각 $S_1,\ S_2$라 하자.

(ⅰ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수인 경우

두 번의 시행에서 주머니 A에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 B에 넣으므로

$S_1 \le 17-1-2=14,\ S_2\ge 19+1+2=22$

그러므로 $S_1<S_2$이다.

(ⅱ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 6의 약수가 한 번, 6의 약수가 아닌 수가 한 번 나온 경우

첫 번째 시행에서 6의 약수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나왔을 때, 주머니 A에서 꺼내어 주머니 B에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 a, 주머니 B에서 꺼내어 주머니 A에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 b라 하고 $S_1>S_2$인 경우를 두 수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 7)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 7)$

이므로 $S_1>S_2$인 경우의 수는 7이다.

마찬가지 방법으로 첫 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 나왔을 때, $S_1>S_2$인 경우의 수는 7이다.

(ⅲ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수가 아닌 경우

두 번째의 시행에서 주머니 B에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 A에 넣으므로

$S_1\ge 17+3+4=24,\ S_2\le 19-3-4=12$

그러므로 $S_1>S_2$이다.

한편, 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고, 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 두 번의 시행 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합보다 큰 사건을 S, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같은 사건을 T라 하면 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\mathrm{P}(S)=2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{4\times5}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}+\frac{1}{9}=\frac{4}{15}$,

$\mathrm{P}(S\cap T)=2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{4\times5}\right)=\frac{7}{45}$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(T\mid S)=\frac{\mathrm{P}(S\cap T)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\frac{7}{45}}{\frac{4}{15}}=\frac{7}{12}$$

따라서 $p=12,\ q=7$이므로

$p+q=12+7=19$

Ch③ 통계

TH①. 통계

2025학년도 사관학교

1. 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개, 빨간 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 색의 종류의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(64X-10)$의 값을 구하시오.

2024학년 10월 교육청모의고사

2. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y와 X의 확률밀도함수 $f(x)$, Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(X \geq 2.5)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

(가) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=1$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 직선 $y=k$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 모든 점의 x좌표의 집합은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.
(다) $\mathrm{P}(X \leq 2)-\mathrm{P}(Y \leq 2)>0.5$

① 0.3085 ② 0.1587 ③ 0.0668
④ 0.0228 ⑤ 0.0062

3. 어느 사관학교 생도의 일주일 수면 시간은 평균이 45시간, 표준편차가 1시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사관학교 생도 중 임의추출한 36명의 일주일 수면 시간의 표본평균이 44시간 45분 이상이고 45시간 20분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8185 ③ 0.8413
④ 0.9104 ⑤ 0.9772

4. 두 양수 m, σ에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m^2+2m+16,\ \sigma^2)$을 따르고, 두 확률변수 X, Y는

$$\mathrm{P}(X \leq 0) = \mathrm{P}(Y \leq 0)$$

을 만족시킨다. σ의 값이 최소가 되도록 하는 m의 값을 m_1이라 하자. $m = m_1$일 때, 두 확률변수 X, Y에 대하여

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = \mathrm{P}(Y \leq k)$$

를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

5. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\ \ (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

2025학년도 9월 평가원모의고사

6. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)+\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 8)=1$$

이 되도록 하는 m의 값은?

① 5 ② $\frac{13}{2}$ ③ 8
④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 11

7. 수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000\times k$의 값을 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

8. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\leq 5t)\geq \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2-t+1\leq X\leq t^2+t+1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000\times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

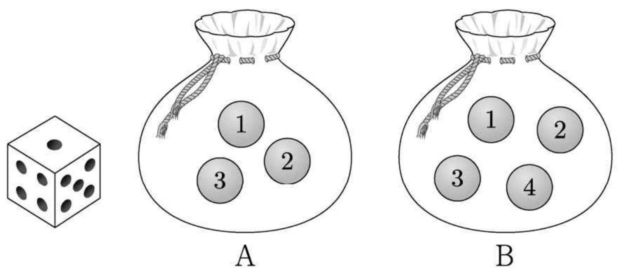
9. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후, 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

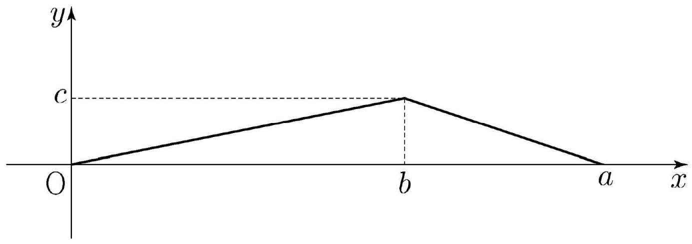
이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$

④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



10. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.

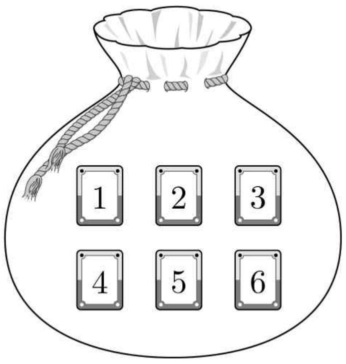


$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$

④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

11. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



3점(27번) 연계 가능

12. 노란 공 2개, 빨간 공 3개, 파란 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행에서 꺼낸 공의 색이 모두 서로 다른 사건을 A라 하자. 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 주머니에 다시 넣는 독립시행을 490번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\sigma(5X-1)$의 값을 구하시오.

3점(27번) 연계 가능

13. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 1, 3, 5 또는 2, 4, 7과 같이 세 수 중 어느 두 수도 차가 1이 아닌 사건을 A라 하자. 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인하고 주머니에 다시 넣는 독립시행을 49번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오.

14. 자연수 n에 대하여 이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, $\cdots$, $2n$이고 X의 확률질량함수는

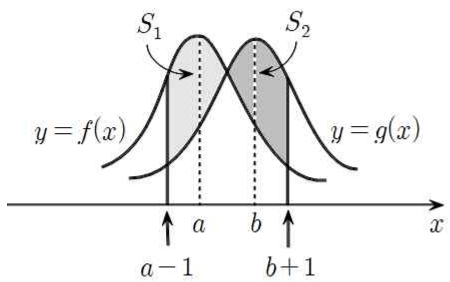
$$\mathrm{P}(X=k)=c\{(-1)^{k+1}+k\}$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{48}{5}$일 때, 자연수 n의 값은? (단, c는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

2024년 수능특강 예제

15. $8 \leq a < b \leq 12$인 두 실수 a, b에 대하여 평균이 a이고 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하고 평균이 b이고 정규분포를 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.



> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x-2)$이다.
> (나) $f(8)=g(12)$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 및 직선 $x=a-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 및 직선 $x=b+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
$\mathrm{P}(6 \leq X \leq 8)=0.24$, $\mathrm{P}(8 \leq X \leq 10)=0.38$일 때, S_1+S_2의 값은?

① 0.24 ② 0.26 ③ 0.28
④ 0.3 ⑤ 0.32

2024년 수능특강 Lv2

16. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=20$에서 최댓값을 갖는다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+k)$이다.

$\mathrm{P}(16 \leq X \leq 24)=0.6826$, $\mathrm{P}(Y \geq 31)=0.0228$일 때, 실수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

3점(27번) 연계 가능

17. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수이면 1점, 6의 약수가 아니면 3점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 72번 반복하여 얻은 모든 점수의 합이 104점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.1649

<표준정규분포표>

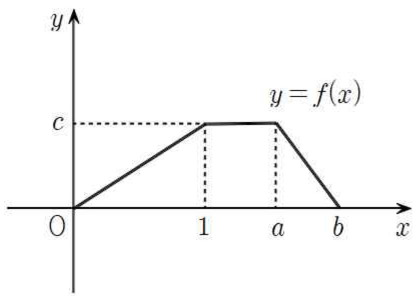
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

18. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

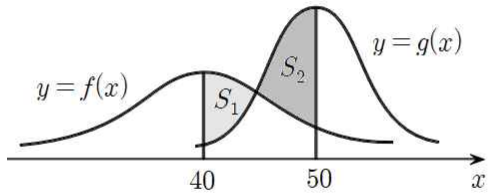
$\mathrm{P}(X \ge 1)-\mathrm{P}(X \le 1)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}\left(X \ge \frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{16}$

일 때, $a(b-c)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ $\frac{15}{8}$ ⑤ 2



19. 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 그림과 같이 $40 \le X \le 50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=40$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, $40 \le X \le 50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=50$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_2-S_1의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.1359일 때, σ의 값은?



(단, $0<\sigma<10$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

2024년 수능특강 Lv3

20. 양의 실수 t에 대하여 확률변수 X는 평균이 t^2이고 표준편차가 $\frac{1}{t}$인 정규분포를 따른다. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(t)$를 $f(t)=\mathrm{P}(X \le 3)$이라 할 때, 함수 $f(t)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.8413 ② 0.9104 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

21. 어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 3 이하의 어떤 자연수 k에 대하여

$$\mathrm{P}(\overline{X}=k)=\mathrm{P}(X=k)$$

를 만족시킨다. $a>b>0$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{7}$	b	1

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

22. 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자와 각 면에 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나식 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 사용하여 다음의 시행을 한다.

> 두 개의 상자를 동시에 한 번씩 던져
> 바닥에 닿은 두 면에 적혀 있는 두 수가 다르면 두 수 중 작은 수를 기록하고, 바닥에 닿은 두 면에 적혀 있는 두 수가 같으면 6을 기록한다.

위의 시행을 2번 반복하여 기록한 두 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

23. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1,\ {\sigma_1}^2\right)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2,\ {\sigma_2}^2\right)$을 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(-x)$이다.
> (나) $g(1)=f(9)$

확률변수 X의 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 확률변수 Y의 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.;
$\mathrm{P}\left(\overline{X}\leq\ 3\right)=\mathrm{P}\left(\overline{Y}\geq\ -1\right)$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

24. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 2번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 차가 4의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 3만큼 이동시키고 4의 약수가 아니면 점 P를 음의 방향으로 2만큼 이동시킨다. 이 시행을 36회 반복한 후 점 P의 좌표를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 30 ② 34 ③ 38
④ 42 ⑤ 46

25. $0 \leq x \leq 6$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x < 4) \\ x-4 & (4 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 6$이고 X의 확률밀도함수 $g(x)$가

$$g(x)=k \times |f(x)-1| \quad (k>0)$$

이다. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq a\right)=\frac{5}{12}$일 때, $k+a$의 값은? (단, k, a는 상수이다.)

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{11}{3}$

④ $\frac{23}{6}$ ⑤ 4

2024년 수능완성

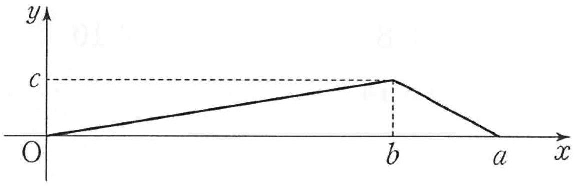
26. 주사위를 288번 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 2점을 얻고, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 1점을 얻는다. 얻은 점수의 합이 k점 이하일 확률이 0.9772일 때, 자연수 k의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 392 ② 396 ③ 400

④ 404 ⑤ 408

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

27. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$4\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right)=3\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$일 때,
$\mathrm{P}\left(\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2024년 수능완성

28. 양수 a에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-a \leq X \leq a+1$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (-a \leq x < 0) \\ a & (0 \leq x < a) \\ -a(x-a-1) & (a \leq x \leq a+1) \end{cases}$$

$\mathrm{P}(k \leq X \leq a)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{-2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{-2+\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{-2+\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

29. 확률변수 X는 평균이 m_1, 표준편차가 4인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m_2, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le g(20)$이다.
> (나) $f(16) = g(16)$

$\mathrm{P}(X \le 10) + \mathrm{P}(Y \ge 22)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m_1 \ne m_2$이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

① 0.1915 ② 0.3085 ③ 0.4328
④ 0.5328 ⑤ 0.6170

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

2024년 수능완성

30. 3보다 큰 상수 k에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le k$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \le x \le 2) \\ 2a & (2 \le x \le k) \end{cases}$$

연속확률변수 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le Y \le 6$이고 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 3) \\ f(6-x) & (3 \le x \le 6) \end{cases}$$

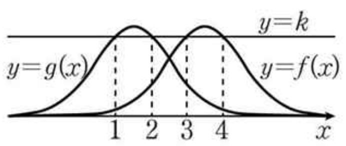
일 때, $\mathrm{P}\left(1 \le X \le \frac{2}{3}k\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

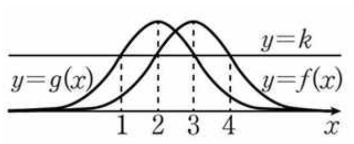
① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{23}{48}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{25}{48}$

1. [정답] 165

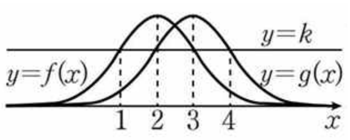
2. [정답] ②

[해설]
$E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(m_1,\ 1^2)$, $N(m_2,\ 1^2)$을 따른다.
$m_1=m_2$이면 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $m_1 \neq m_2$일 때, $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x를 a라 하자. $k=f(a)$이면 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $m_1 > m_2$이면 $k<f(a)$, $k>f(a)$인 두 가지 경우 모두 $P(X\le 2)-P(Y\le 2)$의 값은 음수이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

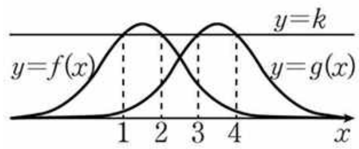




$m_1 < m_2$이면



[그림 1]



[그림 2]

$k<f(a)$일 때, 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 개형은 [그림 1]과 같다.
$f(1)=f(3)=k$이므로 $m_1=2$
$P(X\le 2)=0.5$
$P(X\le 2)-P(Y\le 2)<0.5$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.
$k>f(a)$일 때, 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 개형은 [그림 2]와 같다.
$f(1)=f(2)=k$이므로 $m_1=1.5$
$g(3)=g(4)=k$이므로 $m_2=3.5$
$V(X)=V(Y)=1^2$이므로
$P(X\le 2)-P(Y\le 2)$
$=P\left(Z\le \frac{2-1.5}{1}\right)-P\left(Z\le \frac{2-3.5}{1}\right)$
$=\{0.5+P(0\le Z\le 0.5)\}-\{0.5-P(0\le Z\le 1.5)\}$
$=0.6247$
이므로 조건 (가), (나), (다)를 만족시킨다.
따라서

$$P(X\ge 2.5)=P\left(Z\ge \frac{2.5-1.5}{1}\right)=P(Z\ge 1)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 1)=0.1587$$

3. [정답] ④

4. [정답] 70

[해설]
두 확률변수 X, Y가 정규분포를 따르므로 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$P(X\le 0)=P(Z\le -m)$
$P(Y\le 0)=P\left(Z\le \frac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}\right)$
$P(X\le 0)=P(Y\le 0)$에서
$-m=\frac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}$
$\sigma=\frac{m^2+2m+16}{m}=m+2+\frac{16}{m}$
$m>0$, $\frac{16}{m}>0$이므로
절대부등식의 성질에 의하여
$\sigma \ge 2+2\sqrt{m\times\frac{16}{m}}=10$
$m=\frac{16}{m}$일 때, σ의 값이 최소이므로
$m_1=4$
$m=4$일 때, 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(4,\ 1^2)$, $N(40,\ 10^2)$을 따르므로
$P(X\ge 1)=P\left(Z\ge \frac{1-4}{1}\right)=P(Z\ge -3)$
$P(Y\le k)=P\left(Z\le \frac{k-40}{10}\right)$
$P(X\ge 1)=P(Y\le k)$에서
$P(Z\ge -3)=P\left(Z\le \frac{k-40}{10}\right)$
$=P\left(Z\ge -\frac{k-40}{10}\right)$
$-3=-\frac{k-40}{10}$
따라서 $k=70$

5. [정답] ④

[해설]
$P(X=0)=a$, $P(X=1)=b$라 하면
$P(X=k)=P(X=k+2)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$에서
$P(X=0)=P(X=2)=P(X=4)=a$
$P(X=1)=P(X=3)=b$
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로
$3a+2b=1$ …… ㉠
$E(X^2)=\frac{35}{6}$에서
$1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a=\frac{35}{6}$
$24a+12b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ P(X=0)=\frac{1}{6}$$

6. [정답] ③

[해설]
정규분포 $N(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따르고, 정규분포 $N(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(6, 1)$을 따른다.
$P(\overline{X}\le 12)+P(\overline{Y}\ge 8)=1$에서

$$P(\overline{X}\le 12)=P\left(Z_{\overline{X}}\le \frac{12-m}{2}\right)$$

$$P(\overline{Y}\ge 8)=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge \frac{8-6}{1}\right)=P(Z_{\overline{Y}}\ge 2)$$

이므로

$$\frac{12-m}{2}=2 \qquad \therefore\ m=8$$

7. [정답] 994

[해설]
한 개의 주사위를 던지는 시행을 16200번 반복할 때 4이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 4이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(16200, \frac{2}{3}\right)$을 따른다.

$$E(X)=16200\times\frac{2}{3}=10800$$

$$V(X)=16200\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=60^2$$

이때 $n=16200$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(10800, 60^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-10800}{60}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
이때 점 A의 위치가 5700이하가 되려면 4이하의 눈이 나오는 횟수 X는

$$X-(16200-X)\le 5700, \qquad X\le 10950$$

따라서 점 A의 위치가 5700이하일 확률은

$$\begin{aligned}\therefore\ P(X\le 10950)&=P\left(Z\le \frac{10950-10800}{60}\right)\\&=P(Z\le 2.5)\\&=0.5+P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.494=0.994\end{aligned}$$

$k=0.994$이므로

$$1000\times k=1000\times 0.994=994$$

8. 673

확률변수 X가 정규분포 $N(1, t^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-1}{t}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 5t)\ge \frac{1}{2}$에서 $P\left(Z\le \frac{5t-1}{t}\right)\ge \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{5t-1}{t}\ge 0$, $t\ge \frac{1}{5}\ (\because\ t>0)$

$$\begin{aligned}&P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)\\&=P\left(\frac{t^2-t+1-1}{t}\le Z\le \frac{t^2+t+1-1}{t}\right)\\&=P(t-1\le Z\le t+1)\end{aligned}$$

에서 Z의 범위의 길이는 2이고, 범위의 중앙값은 $\frac{(t-1)+(t+1)}{2}=t$이다.
표준정규분포곡선의 특성에 따라 같은 길이의 범위일 경우 중앙값이 0에 가까울수록 확률값은 커진다.
따라서 $P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)$의 최댓값은 $t=\frac{1}{5}$일 때

$$\begin{aligned}&P(-0.8\le Z\le 1.2)=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.2)\\&=0.288+0.385\\&=0.673\end{aligned}$$

$\therefore\ k=0.673$
$\therefore\ 1000\times k=673$

9. ⑤
한 번의 시행에서 두 수의 차를 확률변수 X라 하면 $P(X=1)$은 다음과 같이 구할 수 있다.
(ⅰ) 주사위 눈의 수가 3의 배수가 나올 경우
$(1, 2)$ 또는 $(2, 3)$이 적힌 공 두 개를 꺼낸다.
(ⅱ) 주사위 눈의 수가 3의 배수가 아닐 경우
$(1, 2)$ 또는 $(2, 3)$ 또는 $(3, 4)$가 적힌 공 두 개를 꺼낸다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{9}$
마찬가지로 $P(X=2)$, $P(X=3)$을 구하면

$$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

$P(\overline{X}=2)$는 두 번 시행하여 X의 값이 차례로 $(1, 3)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(3, 1)$이 나올 확률이므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}=2)&=P(X=1)\times P(X=3)+P(X=2)\times P(X=2)\\&\quad+P(X=3)\times P(X=1)\\&=\frac{5}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}\\&=\frac{19}{81}\end{aligned}$$

10. ④
[출제의도] 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?
$P(0\le X\le a)=1$이므로 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터
$\frac{1}{2}ac=1$, 즉 $ac=2$
한편,
$P(0\le X\le a)=P(X\le b)+P(X\ge b)=1$ 이고

$\mathrm{P}(X \leq b) - \mathrm{P}(X \geq b) = \frac{1}{4}$ 이므로

$\mathrm{P}(X \leq b) = \frac{5}{8}$이고 $\mathrm{P}(X \geq b) = \frac{3}{8}$이다.

따라서 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2} \times b \times c = \frac{5}{8}$

이다. 한편, $\mathrm{P}(X \leq b) > \frac{1}{2}$이므로 $0 < \sqrt{5} < b$이다.

이때 두 점 $(0, 0)$, (b, c)를 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{c}{b}x$

이므로 $\mathrm{P}(X \leq \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{c}{b} \times \sqrt{5}\right) = \frac{5c}{2b} = \frac{1}{2}$

즉, $b = 5c$이다.

이때 $bc = 5c^2 = \frac{5}{4}$이므로

$c = \frac{1}{2}$ $(\because c > 0)$

따라서 $b = \frac{5}{2}$, $a = 4$이므로

$a + b + c = 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 7$

11. 175

$(1, 1, 3, 6)$, $(1, 1, 4, 5)$, $(1, 2, 2, 6)$, $(1, 2, 3, 5)$,
$(1, 2, 4, 4)$, $(1, 3, 3, 4)$, $(2, 2, 2, 5)$, $(2, 2, 3, 4)$,
$(2, 3, 3, 3)$

합이 11이 되는 9가지 중에서 $(1, 2, 3, 5)$는 $4! = 24$

$(2, 2, 2, 5)$, $(2, 3, 3, 3)$은 세 수가 같으므로 $\frac{4!}{3!} = 4$

나머지는 같은 수가 두 개 이므로 $\frac{4!}{2!} = 12$

$\frac{1 \times 24 + 2 \times 4 + 6 \times 12}{6^4} = \frac{13}{162}$

$\therefore p + q = 162 + 13 = 175$

12. **정답** 50

풀이

주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

한 번의 시행에서 꺼낸 공의 색이 모두 서로 다른 경우는 노란 공, 빨간 공, 파란 공을 각각 1개씩 꺼내는 경우이므로 이 경우의 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(490, \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$\sigma(X) = \sqrt{490 \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7}} = 10$

$\sigma(5X - 1) = 5\sigma(X) = 5 \times 10 = 50$

13. **정답** 206

풀이

7개의 공 중 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수가 각각 a, b, c $(a < b < c)$인 경우를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내자.

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 차가 1이 아닌 경우는

$(1, 3, 5)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 4, 6)$, $(1, 4, 7)$,
$(1, 5, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 4, 7)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 5, 7)$

일 때이므로 이 경우의 수는 10이다.

한 번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률은 $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \frac{2}{7}\right)$를 따른다.

따라서

$\mathrm{E}(X) = 49 \times \frac{2}{7} = 14$

$\mathrm{V}(X) = 49 \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} = 10$

이므로

$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 10 + 14^2 = 206$

14. **정답** ③

풀이

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이고

$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} = 0$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{2n} c\{(-1)^{k+1} + k\} \\ &= c\left\{\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} k\right\} \\ &= c\left\{0 + \frac{2n(2n+1)}{2}\right\} \\ &= cn(2n+1) = 1\end{aligned}$$

에서

$c = \frac{1}{n(2n+1)}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k+1} &= 1 + (-2) + 3 + (-4) + \cdots + (2n-1) + (-2n) \\ &= -n\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X) = \frac{48}{5}$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n} \{k \times \mathrm{P}(X = k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} kc\{(-1)^{k+1} + k\} \\ &= c\left\{\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} k^2\right\} \\ &= \frac{1}{n(2n+1)} \times \left\{-n + \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}\right\}\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2n+1}+\frac{4n+1}{3}$$
$$=\frac{2(4n^2+3n-1)}{3(2n+1)}=\frac{48}{5}$$
이므로
$$\frac{4n^2+3n-1}{2n+1}=\frac{72}{5}$$
$20n^2+15n-5=144n+72$

$20n^2-129n-77=0$

$(20n+11)(n-7)=0$

n은 자연수이므로 $n=7$

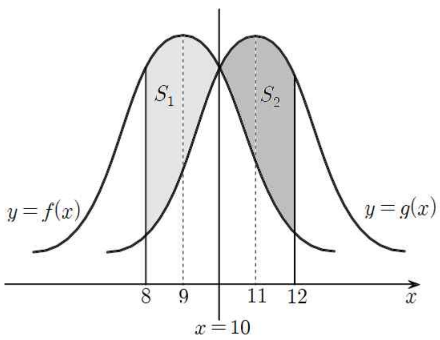
15. **정답** ③

길잡이

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, 이 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

풀이

조건 (가)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같고 $b=a+2$이다.



조건 (나)에서 $f(8)=g(12)$이고 $8\le a<b\le 12$이므로 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이어야 한다.

따라서 $\frac{a+(a+2)}{2}=10$에서 $a=9$, $b=11$이고 $S_1=S_2$이다.

이때 $S_1=\mathrm{P}(8\le X\le 10)-\mathrm{P}(8\le Y\le 10)$이고
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(8\le Y\le 10)&=\mathrm{P}(10\le X\le 12)\\&=\mathrm{P}(9+1\le X\le 9+3)\\&=\mathrm{P}(9-3\le X\le 9-1)\\&=\mathrm{P}(6\le X\le 8)\\&=0.24\end{aligned}$$
이므로 $S_1+S_2=2S_1=2\times(0.38-0.24)=0.28$

16. **정답** ①

풀이

조건 (가)에 의하여 확률변수 X의 평균은 20이고, 조건 (나)에 의하여 확률변수 Y의 평균은 $20-k$이다.

또한 조건 (나)에 의하여 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같으므로 표준편차를 σ라 하자.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(16\le X\le 24)=0.6826$에서
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(16\le X\le 24)&=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{\sigma}\le Z\le\frac{24-20}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=0.6826\end{aligned}$$
$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{4}{\sigma}=1$, $\sigma=4$

한편 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20-k,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-(20-k)}{4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(Y\ge 31)=0.0228$에서
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 31)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{31-(20-k)}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{11+k}{4}\right)\end{aligned}$$
$\mathrm{P}(Y\ge 31)=0.0228<0.5$에서 $\frac{11+k}{4}>0$이므로
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{11+k}{4}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11+k}{4}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11+k}{4}\right)\\&=0.0228\end{aligned}$$
$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11+k}{4}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{11+k}{4}=2$, $k=-3$

17. **정답** ①

풀이

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 주사위를 72번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{2}{3}=48$

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=16$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-48}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

게임을 72번 반복하여 얻은 모든 점수의 합을 확률변수 Y라 하면

$Y=1\times X+3\times(72-X)=-2X+216$

따라서 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 104)&=\mathrm{P}(-2X+216\le 104)\\&=\mathrm{P}(X\ge 56)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{56-48}{4}\right)\end{aligned}$$

$=\mathrm{P}(Z \geq 2)$
$=\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

18. 정답 ②

풀이

$\mathrm{P}(X \leq 1)+\mathrm{P}(X \geq 1)=1$이고

$\mathrm{P}(X \geq 1)-\mathrm{P}(X \leq 1)=\dfrac{1}{4}$이므로

$2\mathrm{P}(X \leq 1)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

즉, $\mathrm{P}(X \leq 1)=\dfrac{3}{8}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X \leq 1)=\dfrac{1}{2}\times 1\times c=\dfrac{c}{2}$

㉠에서 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{3}{8}$, $c=\dfrac{3}{4}$

$\mathrm{P}(X \geq b)=\dfrac{1}{2}\times(a-b)\times c$

$=\dfrac{1}{2}\times(a-b)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}(a-b)$

$\mathrm{P}\left(X \geq \dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{1}{16}$

이때 $\mathrm{P}(X \geq b)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형 중 삼각형의 넓이이고 $\mathrm{P}\left(X \geq \dfrac{a+b}{2}\right)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\dfrac{a+b}{2}$로 둘러싸인 도형 중 삼각형의 넓이이다.

따라서 삼각형의 닮음비를 이용하면

$\mathrm{P}(X \geq b) : \mathrm{P}\left(X \geq \dfrac{a+b}{2}\right)=(a-b)^2 : \left(a-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

이므로

$\dfrac{3}{8}(a-b) : \dfrac{1}{16}=(a-b)^2 : \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$3(a-b) : \dfrac{1}{2}=1 : \dfrac{1}{4}$

즉, $a-b=\dfrac{2}{3}$ …… ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times\{a+(b-1)\}\times\dfrac{3}{4}=1$

$a+b-1=\dfrac{8}{3}$, $a+b=\dfrac{11}{3}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

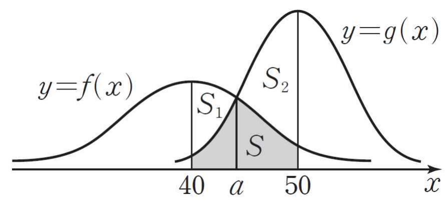
$a=\dfrac{13}{6}$, $b=\dfrac{3}{2}$

따라서

$a(b-c)=\dfrac{13}{6}\times\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{13}{8}$

19. 정답 ①

풀이



$40<x<50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 a라 하자.

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=40$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=50$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합을 S라 하면

$S_1=\mathrm{P}(40 \leq X \leq 50)-S$

$S_2=\mathrm{P}(40 \leq Y \leq 50)-S$

$S_2-S_1=\mathrm{P}(40 \leq Y \leq 50)-\mathrm{P}(40 \leq X \leq 50)$

$=0.1359$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-40}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-50}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(40 \leq Y \leq 50)=\mathrm{P}\left(\dfrac{40-50}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{50-50}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{10}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(40 \leq X \leq 50)=\mathrm{P}\left(\dfrac{40-40}{10} \leq Z \leq \dfrac{50-40}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

따라서

$S_2-S_1=\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{10}{\sigma}\right)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$=\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{10}{\sigma}\right)-0.3413$

$=0.1359$

이므로

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{10}{\sigma}\right)=0.1359+0.3413=0.4772$

이때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{10}{\sigma}=2$, $\sigma=5$

20. 정답 ④

풀이

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(t^2,\ \left(\dfrac{1}{t}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-t^2}{\dfrac{1}{t}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$f(t)=\mathrm{P}(X \leq 3)$

$=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{3-t^2}{\dfrac{1}{t}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \leq 3t-t^3)$

$g(t)=3t-t^3$이라 하자.

함수 $f(t)$가 최댓값을 갖기 위해서는 $g(t)=3t-t^3$ $(t>0)$이 최댓값을 가져야 한다.

$g'(t)=3-3t^2=3(1+t)(1-t)$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		↗	극대	↘

$t=1$에서 함수 $g(t)$는 극대이면서 최대이고 최댓값은

$g(1)=3\times1-1^3=2$이다.

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최대이고 최댓값은

$f(1)=\mathrm{P}(X\leq 3)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

21. **정답** ②

풀이

이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을

$(X_1,\ X_2,\ X_3)$라 하자.

(i) $k=1$인 경우

$\overline{X}=1$인 경우 $X_1=X_2=X_3$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=a^3$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X=1)$에서

$a^3=a$

이때 $0<a<\dfrac{6}{7}$이므로 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k=2$인 경우

$\overline{X}=2$인 경우 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$은 $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$,

$(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 2,\ 1)$

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=6\times a\times\frac{1}{7}+b+\left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$=\frac{6}{7}ab+\frac{1}{343}$$

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\mathrm{P}(X=2)$에서

$$\frac{6}{7}ab+\frac{1}{343}=\frac{1}{7}$$

$$ab=\frac{8}{49}$$

이때 $ab=\dfrac{6}{7}$이고 $a>b>0$이므로

$$a=\frac{4}{7},\ b=\frac{2}{7}$$

(iii) $k=3$인 경우

$\overline{X}=3$인 경우 $X_1=X_2=X_3=3$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=b^3$

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\mathrm{P}(X=3)$에서

$b^3=b$

이때 $0<b<\dfrac{6}{7}$이므로 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a=\frac{4}{7},\ b=\frac{2}{7}$$

따라서 $\dfrac{a}{b}=2$

22. **정답** 287

풀이

주어진 시행을 2번 반복하여 기록한 수를 차례로 X_1, X_2라 하면

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$$

이므로 $\dfrac{X_1+X_2}{2}=4$에서

$X_1+X_2=8$

한 번의 시행에서 기록할 수 있는 수는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$이므로

$X_1=2,\ X_2=6$ 또는 $X_1=4,\ X_2=4$ 또는 $X_1=6,\ X_2=2$

각 면에 $1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀 이 있는 정사면체 모양의 상자를 A, 각 면에 $2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 B 라 하자.

(i) 2를 기록할 확률

A에서 2가 나오고 B에서 3, 4, 5가 나오거나 A에서 3, 4가 나오고 B에서 2가 나오면 되므로

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

(ii) 4를 기록할 확률

A에서 4가 나오고 B에서 5가 나오면 되므로

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(iii) 6을 기록할 솩률

A, B에서 같은 수가 나오면 되므로

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{16}$$

(i), (ii), (iii)에서

$X_1=2,\ X_2=6$일 확률은

$$\frac{5}{16}\times\frac{3}{16}=\frac{15}{256}$$

$X_1=4,\ X_2=4$일 확률은

$$\frac{1}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{256}$$

$X_1=6,\ X_2=2$일 확률은

$$\frac{3}{16}\times\frac{5}{16}=\frac{15}{256}$$

따라서

$$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{15}{256}+\frac{1}{256}+\frac{15}{256}=\frac{31}{256}$$

이므로 $p+q=256+31=287$

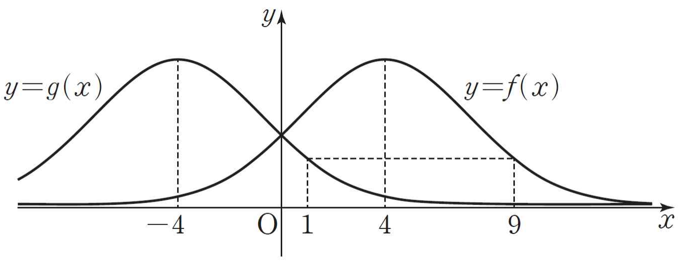
23. **정답** 144

풀이

조건 (가)에서 $g(1)=f(-1)$이고 조건 (나)에서 $g(1)=f(9)$이므로
$f(-1)=f(9)$
확률변수 X가 정규분포를 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이다.

즉, $m_1=\frac{-1+9}{2}=4$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(-x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 y축에 대하여 대 칭이다.
즉, $m_2=-4$, $\sigma_1=\sigma_2$



확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4,\ \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(-4,\ \left(\frac{\sigma_1}{4}\right)^2\right)$을 따르고 $=\frac{\overline{Y}-4}{\frac{\sigma_1}{4}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 3)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{3-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le -\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)$,

$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge -1)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{-1+4}{\frac{\sigma_1}{4}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{12}{\sigma_1}\right)$

에서 $\mathrm{P}\left(Z\le -\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{12}{\sigma_1}\right)$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}=\frac{12}{\sigma_1}$

따라서 $n=144$

24. 정답 ③
한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 눈의 수의 차가 4의 약수가 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 4의 약수가 나오지 않는 횟수는 $36-Y$이므로
$X=3Y-2(36-Y)=5Y-72$
한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 눈의 수의 차를 표로 나타내면 다음과 같다.

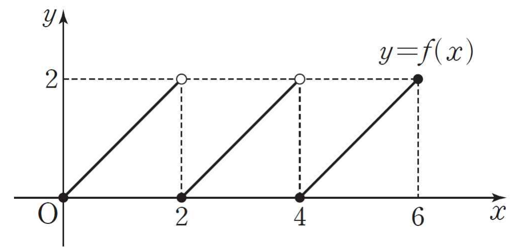
두 번째 나온 눈의 수 / 첫 번째 나온 눈의 수	1	2	3	4	5	6
1	0	①	②	3	④	5
2	①	0	①	②	3	④
3	②	①	0	①	②	3
4	3	②	①	0	①	②
5	④	3	②	①	0	①
6	5	④	3	②	①	0

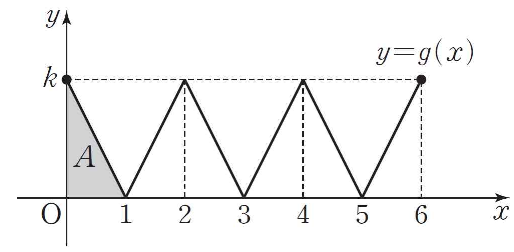
표에서 두 눈의 수의 차가 4의 약수인 경우는 숫자에 동그라미를 친 경우이고, 두 눈의 수의 차가 4의 약수일 확률은 $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$이므로

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{11}{18}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(Y)=36\times\frac{11}{18}=22$이므로
$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(5Y-72)=5\mathrm{E}(Y)-72$
$=5\times22-72=38$

25. 정답 ④
$0\le x\le 6$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.





함수 $g(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분이 넓이가 1이다. 이 넓이는 밑변의 길이가 1이고 높이가 k인 직각삼각형 A의 넓이의 6배와 같으므로 직각삼각형 A의 넓이는 $\frac{1}{6}$이다.

즉, $\frac{1}{2}\times1\times k=\frac{1}{6}$, $k=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$의 값은 직각삼각형 A의 넓이의 $\frac{1}{4}$배와 같고,
$\mathrm{P}(1\le X\le 3)$의 값은 직각삼각형 A의 넓이의 2배와 같다.

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)+\mathrm{P}(1\le x\le 3)$
$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times2=\frac{3}{8}<\frac{5}{12}$

이고

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 4\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)+\mathrm{P}(3\le x\le 4)$
$=\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{13}{24}>\frac{5}{12}$

이므로 $3<a<4$이다.
이때
$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le a\right)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)+\mathrm{P}(1\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le a)$
$=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\mathrm{P}(3\le X\le a)=\frac{5}{12}$

에서 $\mathrm{P}(3\le X\le a)=\frac{1}{24}$이므로 $a=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

따라서 $k+a=\frac{1}{3}+\frac{7}{2}=\frac{23}{6}$

26. 정답 ③
주사위를 288번 던져서 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라

하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(288,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=288\times\frac{1}{3}=96$,

$\mathrm{V}(X)=288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=64=8^2$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(96,\ 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-96}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

3의 배수의 눈이 나온 횟수를 X라 할 때 3의 배수의 눈이 나오지 않은 횟수는 $288-X$이므로 이때 얻은 점수는

$2X+(288-X)\times 1=X+288$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+288\le k)&=\mathrm{P}(X\le k-288)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-288-96}{8}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-384}{8}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-384}{8}\right)&=0.9772\\&=0.5+0.4772\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{k-384}{8}=2$

따라서 $k=400$

27. **정답** 55

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$이므로 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2}\times a\times c=1$, 즉 $ac=2$ …… ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\alpha$라 하면 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2}\times b\times c=\alpha$, 즉 $bc=2\alpha$ …… ㉡

두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ c)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{c}{b}x$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times\frac{c}{2}=\frac{1}{8}bc=\frac{1}{4}\alpha$

$\mathrm{P}(b\le X\le a)=1-\mathrm{P}(0\le X\le b)=1-\alpha$

이므로 $4\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{b}{2}\right)=3\mathrm{P}(b\le X\le a)$에서

$\alpha=3-3\alpha$, $4\alpha=3$

$\alpha=\frac{3}{4}$

$\alpha=\frac{3}{4}$을 ㉡에 대입하면

$bc=\frac{3}{2}$ …… ㉢

㉠에서 $a=\frac{2}{c}$, ㉢에서 $b=\frac{3}{2c}$이므로 $\frac{a}{2}<b$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

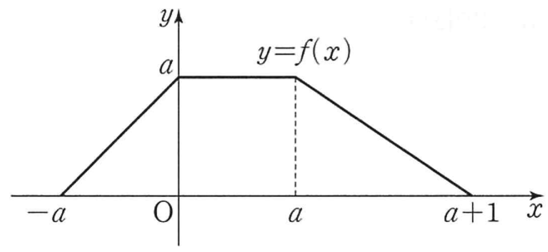
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{b}{2}\le X\le\frac{a}{2}\right)&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}+\frac{ac}{2b}\right)\times\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}+\frac{2}{3}c\right)\times\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{4c}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{7}{6}c\times\frac{1}{4c}\\&=\frac{7}{48}\end{aligned}$$

따라서 $p=48$, $q=7$이므로

$p+q=48+7=55$

28. **정답** ④

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}a^2+a^2+\frac{1}{2}a=1$에서

$3a^2+a-2=0$

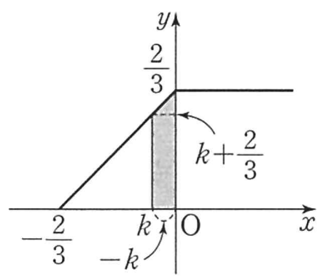
$(3a-2)(a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}\left(k\le X\le\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$k<0$이고

$\mathrm{P}(k\le X\le 0)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$



즉, 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{1}{18}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(k+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\times(-k)=\frac{1}{18}$

$k^2+\frac{4}{3}k+\frac{1}{9}=0$

$9k^2+12k+1=0$

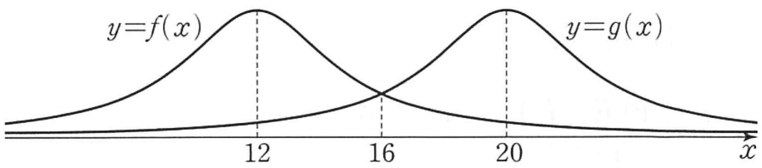
$k=\frac{-6\pm\sqrt{36-9}}{9}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{2}{3}<k<0$이므로 $k=\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$

29. **정답** ⑤

확률밀도함수 $f(x)$는 $x=m_1$일 때 최대이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(m_1)$이고, 확률밀도함수 $g(x)$는 $x=m_2$일 때 최대이므로

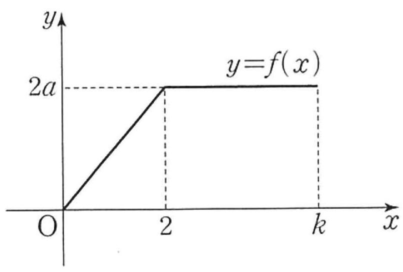
모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq g(m_2)$이다.
또 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 $f(m_1)=g(m_2)$이다.
따라서 조건 (가)에 의하여 $m_2=20$이고
조건 (나)에 의하여 $\frac{m_1+m_2}{2}=16$에서 $m_1=12$이다.
두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.
한편, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 0)$을 따르므로

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X \leq 10)+\mathrm{P}(Y \geq 22)\\
&=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{10-12}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{22-20}{4}\right)\\
&=\mathrm{P}(Z \leq -0.5)+\mathrm{P}(Z \geq 0.5)\\
&=2\mathrm{P}(Z \geq 0.5)\\
&=2\times\{0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)\}\\
&=2\times(0.5-0.1915)\\
&=0.6170
\end{aligned}
$$

30. 정답 ⑤
확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 연속확률변수 X의 확률밀도함수이므로
$\mathrm{P}(0 \leq X \leq k)=1$에서

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2a+(k-2)\times 2a=1$$

즉, $2a(k-1)=1$ …… ㉠
함수 $y=f(6-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 함수 $g(x)$가 연속확률변수 Y의 확률밀도함수이므로

$$\mathrm{P}(0 \leq Y \leq 3)=\frac{1}{2}$$

이어야 한다.
$0 \leq x \leq 3$에서 $g(x)=f(x)$이므로

$$\mathrm{P}(0 \leq Y \leq 3)=\mathrm{P}(0 \leq X \leq 3)=\frac{1}{2}\times 2\times 2a+2a\times 1=4a$$

즉, $4a=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{1}{8}$이므로 ㉠에서

$$\frac{1}{4}(k-1)=1$$

$$k=5$$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & (0 \leq x \leq 2)\\ \frac{1}{4} & (2 \leq x \leq 5)\end{cases}$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(1 \leq X \leq \frac{2}{3}k\right)&=\mathrm{P}\left(1 \leq X \leq \frac{10}{3}\right)\\
&=\mathrm{P}(1 \leq X \leq 2)+\mathrm{P}\left(2 \leq X \leq \frac{10}{3}\right)\\
&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)\times 1+\left(\frac{10}{3}-2\right)\times\frac{1}{4}\\
&=\frac{25}{48}
\end{aligned}
$$

김지형

대치예섬