수학 영역

KSM

5지선다형

1. $(\sqrt[3]{4})^2 \times 2^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=3$을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

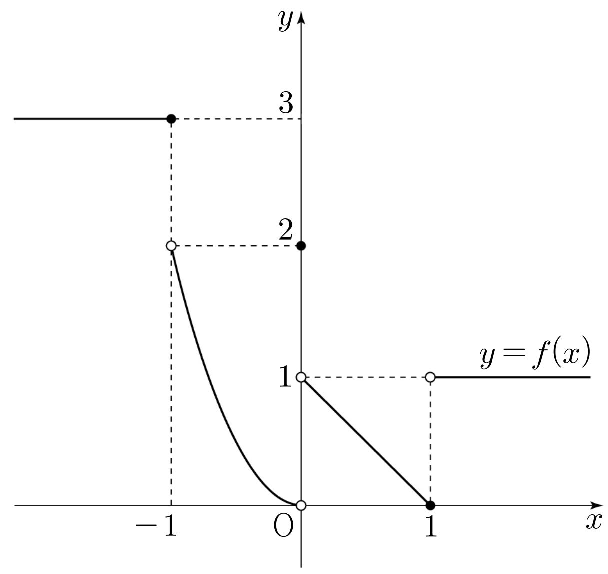
$\frac{1}{4}f'(2)=3$

$f'(2)=12$

3. 함수 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$의 주기는? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3+1

5. 함수 $f(x)$가 $x > \frac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{3}{2x+1} < f(x) < \frac{3}{2x-1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} xf(x)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$$\frac{3x}{2x+1} < xf(x) < \frac{3x}{2x-1}$$

6. 첫째항이 양수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 \times a_4 = 72$$

일 때, a_3의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$(a_3-3)(a_3+3)=72$

$a_3^2=81$

$a_3=9$

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-a & (x \le 2) \\ x^2+bx+a & (x > 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, $f(2)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<2) \\ 2x+b & (x>2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-a=4+2b+a \\ 1=4+b \end{cases}$$

$b=-3$

$2a=4$

$a=2$

$f(2)=2-a=0$

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_n=\dfrac{1}{n+1}$일 때, a_1+a_5의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{4}{15}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{7}{15}$

$a_1=S_1=\frac{1}{2}$

$a_5=S_5-S_4=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}=\frac{-1}{30}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$

9. $0<a<5$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=\log_2(x+a)+1$은 닫힌구간 $[a, 5]$에서 최솟값 3을 갖는다. $f(a+4)$의 값은? [3점]

① 4　② $2+\log_2 5$　③ $3+\log_2 3$
④ $2+\log_2 7$　⑤ 5

$(\log_2 2a)+1=3$

$a=2$

$f(6)=\log_2 8+1$

$=4$

10. 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+2a_4=0,\quad \sum_{k=1}^{5}a_k=33$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 40　② 44　③ 48　④ 52　⑤ 56

$1+2r=0$

$r=-\frac{1}{2}$

$\dfrac{a(1-(-\frac{1}{2})^5)}{1+\frac{1}{2}}=33$

$\frac{2}{3}a\left(\frac{33}{32}\right)=33$

$a=48$

11. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\times\tan\theta=\frac{8}{3}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$-\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{8}{3}$

$\frac{c^2-1}{c}=\frac{8}{3}$

$3c^2-8c-3=0$

$(3c+1)(c-3)=0$

$c=-\frac{1}{3}$ $(\because -1\le c\le 1)$

12. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n-1}(k-a_k)$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 45 ② 48 ③ 51 ④ 54 ⑤ 57

$a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n-1}k-\sum_{k=1}^{2n-1}a_k$

$a_{2n}=\frac{(2n-1)2n}{2}-S_{2n-1}$

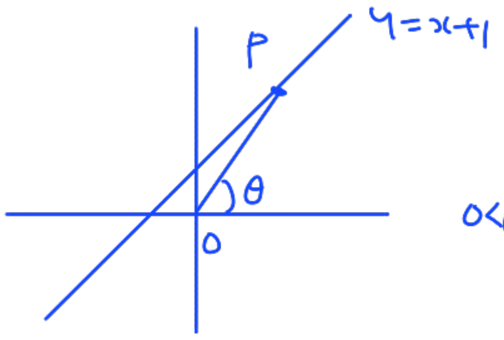
$a_{2n}+S_{2n-1}=2n^2-n$

$S_{2n}=2n^2-n$

$S_{10}=50-5=45$

13. 좌표평면에서 직선 $y=x+1$ 위의 x좌표가 양수인 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 $\theta(0<\theta<2\pi)$라 하자. 각의 크기 θ를 나타내는 동경과 각의 크기 7θ를 나타내는 동경이 일치할 때, 점 P의 x좌표는?
(단, O는 원점이고, x축의 양의 방향을 시초선으로 한다.) [3점]

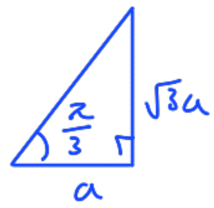
① $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　② $\frac{2\sqrt{3}-1}{4}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$



$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$7\theta-\theta=2n\pi$

$\theta=\frac{n}{3}\pi$, $\theta=\frac{\pi}{3}$



$(a,\sqrt{3}a)\rightarrow y=x+1$

$\sqrt{3}a=a+1$

$a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

> (가) $x\geq-\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $$(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=x^2+ax+b$$
>
> 이다. (단, a와 b는 상수이다.)
>
> (나) $f(4)=2$

① -7　② -3　③ 1　④ 5　⑤ 9

$x=0 \rightarrow 0=b$

$x=4 \rightarrow 2f(4)=16+4a$, $f(4)=8+2a=2$

$a=-3$

$x\geq-\frac{1}{2}$, $x\neq0$　$f(x)=\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x+1}-1}$

$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x+1}-1}\cdot\frac{(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}+1)}$

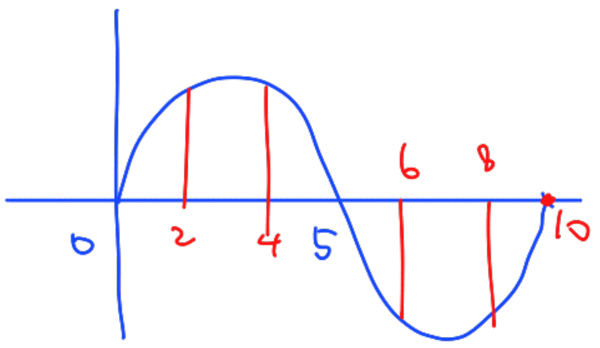
$=\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)}{2x}(\sqrt{2x+1}+1)$

$=\frac{-3}{2}\times2=-3$

15. 자연수 $n(n \geq 2)$에 대하여 $\sin\frac{n}{5}\pi$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$y = \sin\frac{\pi}{5}x$



$n=2k-1 \rightarrow f(n)=1 \rightarrow f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$

$f(2)=2$

$f(4)=2$

$f(6)=0$

$f(8)=0$

$f(10)=1$

$4+2+2+1=9$

16. 1보다 크고 100보다 작은 두 자연수 m, n이

$$\log_n 4 \times \left(\frac{4}{\log_m 2} + \log_2 n\right) = 8$$

을 만족시킬 때, $m+n$의 최댓값은? [4점]

① 96 ② 100 ③ 104 ④ 108 ⑤ 112

$\log_n 4 \times (4\log_2 m + \log_2 n)$

$= 2\log_n 2 \times \log_2 nm^4$

$= 2\log_n nm^4 = 8$

$nm^4 = n^4$

$m^4 = n^3$

$1 < m, n < 100$

$m = n^{\frac{3}{4}}$

$n = k^4$	n	m
	2^4	8
	3^4	27
$256 =$	4^4	64

$\therefore n=81$, $m=27$) 108

17. $a > \pi$인 실수 a에 대하여 함수

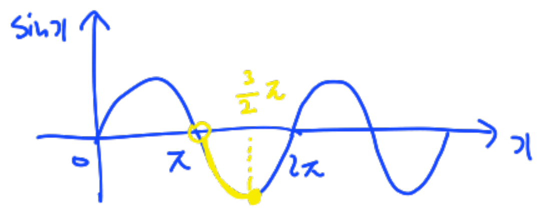
$$f(x) = \cos^2 x - \sin x - 1$$

이 구간 $(\pi, a]$에서 최솟값을 갖도록 하는 a의 최솟값을 p라 하자. 구간 $(\pi, p]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라 할 때, $p \times M$의 값은? [4점]

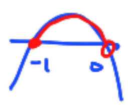
① $\frac{3}{8}\pi$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{5}{8}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{8}\pi$

$f(x) = 1 - s^2 - s - 1 = -\sin^2 x - \sin x$

$\sin x = t$ $f(t) = -t^2 - t$



$\pi < x \le \frac{3}{2}\pi \rightarrow -1 \le t < 0 \rightarrow$



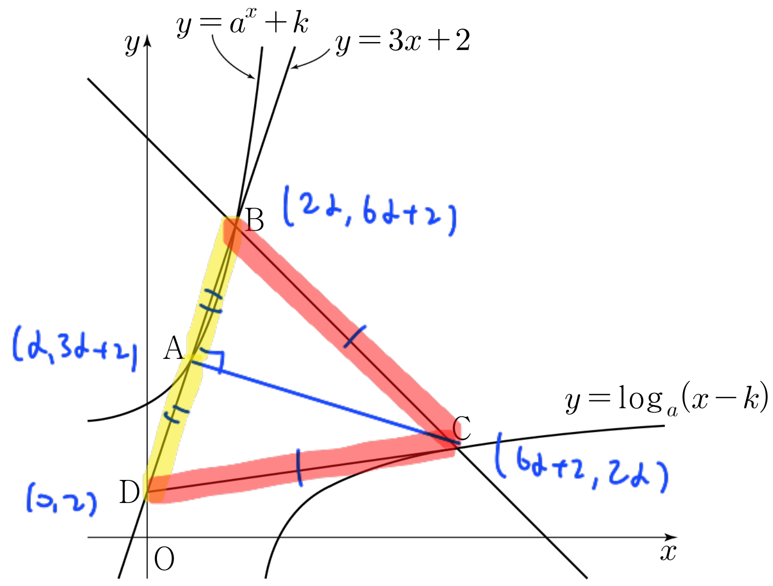
최솟값 0

$p = \frac{3}{2}\pi$

$(\pi, \frac{3}{2}\pi] \rightarrow$ 최댓값 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = M$

$p \times M = \frac{3}{8}\pi$

18. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 곡선 $y = a^x + k$와 직선 $y = 3x + 2$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y = \log_a(x-k)$와 만나는 점을 C, 직선 $y = 3x+2$가 y축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB} = \overline{AD}$이고 $\overline{BC} = \overline{CD}$일 때, $a \times k$의 값은? (단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $4\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ 12 ④ $7\sqrt{5}$ ⑤ $8\sqrt{6}$

AC 기울기 $= \frac{-\alpha-2}{5\alpha+2} = -\frac{1}{3}$

$5\alpha + 2 = 3\alpha + 6$ $\alpha = 2$

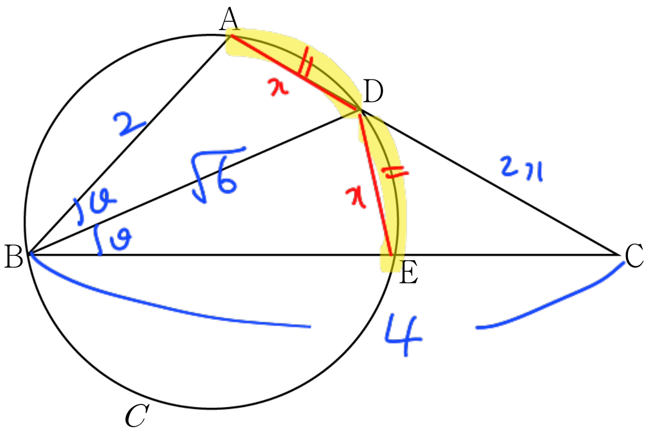
$A(2, 8) \rightarrow a^2 + k = 8$

$B(4, 14) \rightarrow a^4 + k = 14$

$a^4 - a^2 = 6$

$(a^2 - 3)(a^2 + 1) = 0$ $\therefore a = \sqrt{3}$, $k = 5$) $ak = 5\sqrt{3}$

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 세 점 A, B, D를 지나는 원을 C라 하고, 원 C가 선분 BC와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. 점 B를 포함하지 않는 두 호 AD, DE의 길이가 같고 $\overline{BD}=\sqrt{6}$일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{AC}<\overline{BC}$이고, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



① $\frac{6}{5}\pi$　② $\frac{7}{5}\pi$　③ $\frac{8}{5}\pi$　④ $\frac{9}{5}\pi$　⑤ 2π

BA : BC = DA : DC = 1 : 2　DA = x, DC = 2x

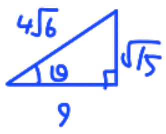
△ABD　$\cos\theta = \frac{6+4-x^2}{2\cdot 2\sqrt{6}}$

△DBC　$\cos\theta = \frac{6+16-4x^2}{2\cdot 4\sqrt{6}}$

$2(10-x^2) = 22-4x^2$

$2x^2=2$, $x=1$

$\cos\theta = \frac{9}{4\sqrt{6}}$



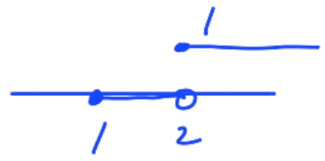
$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{6}}$

$\frac{x}{\sin\theta} = 2R = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$, $R = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$

$\pi R^2 = \frac{24}{15}\pi = \frac{8}{5}\pi$

20. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-a) & (x<1)\\ 0 & (1\le x<2)\\ 1 & (x\ge 2)\end{cases}$$



라 하자. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 t까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

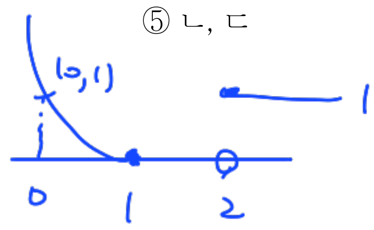
ㄱ. $a=1$일 때, $g(1)=-1$이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$의 최댓값이 1일 때, $g(2)=\cancel{\frac{1}{2}}$ 1이다.

ㄷ. $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$를 만족시키는 $0<k<2$인 실수 k가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{2}$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

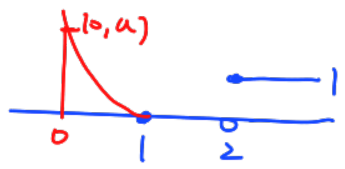
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ.



$\frac{0-1}{1-0} = -1$

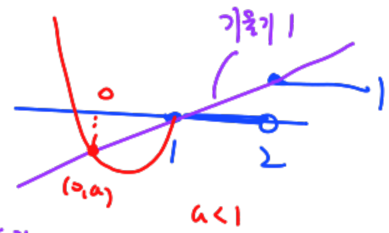
ㄴ.



$a\ge 1$

$g(t)$ 최댓값 <0

(×)



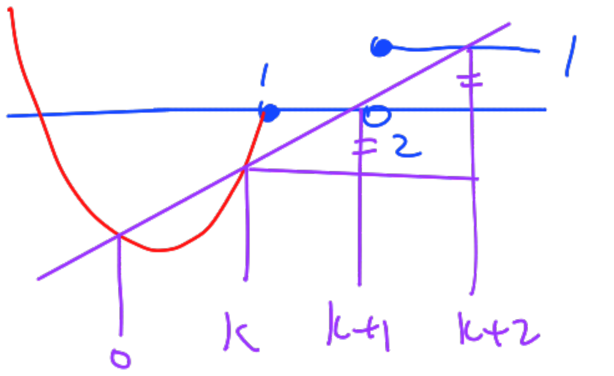
기울기 1

$a<1$

$y=x-1$　$(0,-1)$　$a=-1$

$g(2) = \frac{1+1}{2-0} = 1$

ㄷ.



$(0,a)$　$(k,-1)$　$(k+1,0)$　$(k+2,1)$

$\frac{-1-a}{k-0} = 1$, $k=-1-a$

$y=(x-1)(x-a)$

$(k,-1) = (-1-a,-1)$

$(-2-a)(-2a-1) = -1$

$2a^2+5a+3=0$

$(2a+3)(a+1)=0$

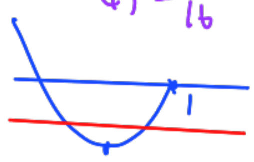
$a=-\frac{3}{2}, -1$

$k=\frac{1}{2}, 0$

(○)　(×)

$(x-1)(x+\frac{3}{2}) = x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$=(x+\frac{1}{4})^2-\frac{25}{16}$



$y=-\frac{3}{2}$　교점 2개

(○)

$(-\frac{1}{4}, -\frac{25}{16})$

21. 첫째항이 2 이상인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n \ge 1) \\ \frac{1}{2}(a_n+a_1) & (a_n < 1)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5+2a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{92}{5}$ ② $\frac{94}{5}$ ③ $\frac{96}{5}$ ④ $\frac{98}{5}$ ⑤ 20

$a_n>0$

a_5 a_6

α $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\alpha \ (\alpha\ge1) \to 2\alpha=2,\ \alpha=1 \\ \frac{1}{2}(\alpha+a_1)\ (0<\alpha<1) \to 2\alpha+a_1=2\end{array}\right.$

$a_1=2-2\alpha<2$

$a_1\ge2$ 이므로 모순

$\therefore a_5=\alpha=1$

$a_4=\begin{cases}2a_5 & (a_4\ge1) \\ 2a_5-a_1 & (a_4<1)\end{cases}$

$a_4=\begin{cases}2 & (a_4\ge1) \\ 2-a_1 & (a_4<1)\end{cases}$ $2-a_1<0$ 이므로 X

$\therefore a_4=2$

a_1 a_2 a_3 a_4

a_1 $\frac{a_1}{2}$ $\frac{a_1}{4}$ $\left[\begin{array}{l}\frac{a_1}{8}=2 \quad a_1=16 \\ \frac{5}{8}a_1=2 \quad a_1=\frac{16}{5}\end{array}\right.$

$\therefore 16+\frac{16}{5}=\frac{96}{5}$

단답형

22. 방정식 $(\sqrt{3})^{x-2}=27$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$3^{\frac{x-2}{2}}=3^3$ $x=8$

23. 반지름의 길이가 8이고 넓이가 28π인 부채꼴의 호의 길이가 $a\pi$일 때, a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

$\frac{1}{2}\times8\times l=28\pi$

$l=7\pi$

24. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{34}$

$f(x)=2x^3+3x^2+3x$

$f(2)=16+12+6=34$

25. $\log_{|a|}(-a^2-4a+21)$이 정의되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$|a|>0$ $\quad -a^2-4a+21>0$

$|a|\neq 1$ $\quad a^2+4a-21<0$

$-7<a<3$

$a=-6,-5,-4,-3,-2,2$

26. 첫째항이 1이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right)=\frac{n-1}{n}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{385}$

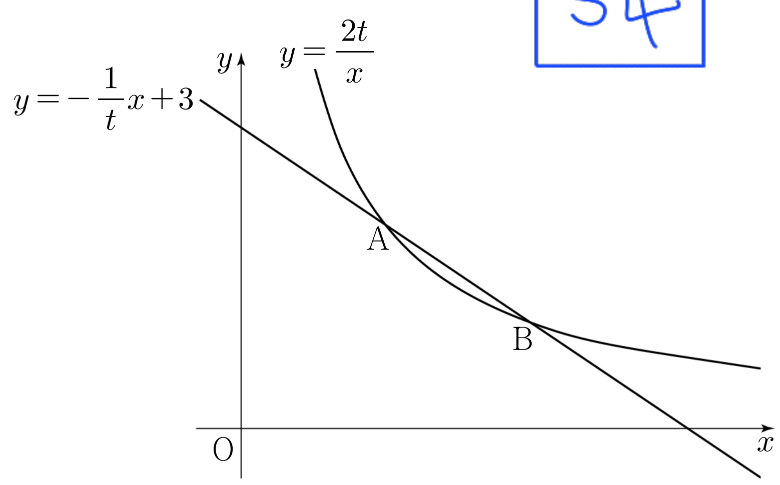
$\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$

$a_1=1\rightarrow$ $\quad \sqrt{a_n}=\frac{1}{n},\ a_n=\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{a_k}=k^2$

$\sum_{k=1}^{10}k^2=385$

27. 실수 $t(t>1)$에 대하여 곡선 $y=\frac{2t}{x}$와 직선 $y=-\frac{1}{t}x+3$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}}{t-1}=k$라 할 때, $30\times k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]

$\boxed{54}$



$\frac{2t}{x}=-\frac{1}{t}x+3=\frac{3t-x}{t}$

$3tx-x^2=2t^2$, $x^2-3tx+2t^2=0$

$x=t,\ 2t$

$A(t,2)$, $B(2t,1)$

$\overline{OB}=\sqrt{4t^2+1}$, $\overline{OA}=\sqrt{t^2+4}$

$\lim_{t\to1+}\frac{\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{3(t^2-1)}{t-1}\times\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}}$

$=6\times\frac{1}{2\sqrt5}=\frac{3}{\sqrt5}=k$

$\therefore 30k^2=30\times\frac{9}{5}=54$

28. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 어떤 자연수 k에 대하여

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}=21,\quad S_{k+4}=11$$

이 성립할 때, a_{k+6}의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{22}$

$a_{k+1}=7$, $\frac{(k+4)(\overbrace{2a+(k+3)d}^{a+a+kd+3d})}{2}=11$

$a+kd=7 \to (k+4)(a+3d+7)=22$

$11 \quad 2 \to k=7$

$22 \quad 1 \to k=18$

i) $k=7 \to a+7d=7$, $a+3d=-5$, $d=3$, $a_{k+6}=7+5d=22$

ii) $k=18 \to a+18d=7$, $a+3d=-6$, $d=\frac{13}{15}$ (X)

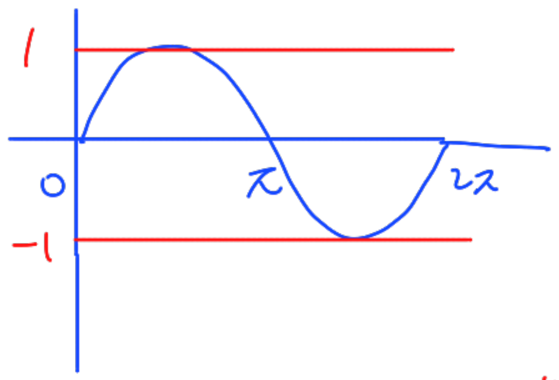
29. $0 \le x \le 2\pi$일 때, x에 대한 방정식

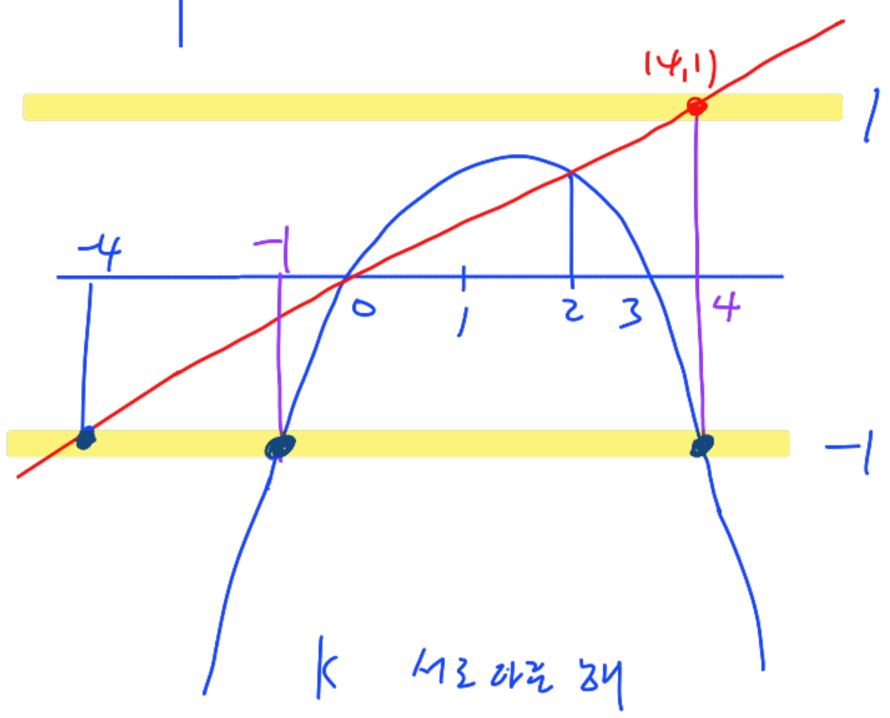
$$\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right) = 0$$

의 서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱을 구하시오. [4점]

$\boxed{48}$

$\sin x = \frac{1}{4}k$ or $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k = -\frac{1}{4}k(k-3)$





k	서로 다른 해
-4	1
-3	2
-2	2
-1	3
0	3
1	4
2	2
3	5
4	2

$k = -3, -2, 2, 4$

$(-3)\times(-2)\times 2\times 4$

$= 48$

30. 두 양수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 집합 $\{x \mid x \neq -a,\ x$는 실수$\}$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{bx}{x+a} & (x < -a,\ -a < x < 1) \\ f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

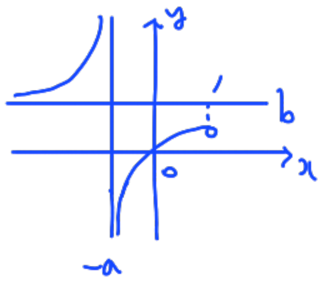
$\frac{-ab}{x+a} + b$

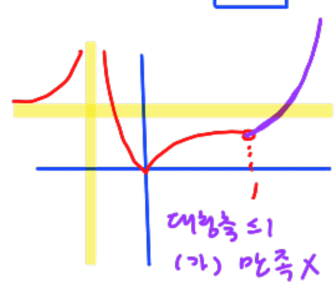
이라 할 때, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
실수 t에 대하여 함수 $y = |g(x)|$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

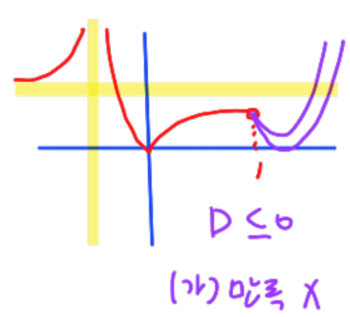
> (가) 임의의 두 양수 t_1, t_2에 대하여
> $t_1 < t_2$이면 $h(t_1) \ge h(t_2)$이다.
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=0$, $t=\alpha$, $t=\beta\ (0<\alpha<\beta)$에서만 불연속이며 $h(0)=\alpha$, $h(\alpha)=\beta-1$이다.

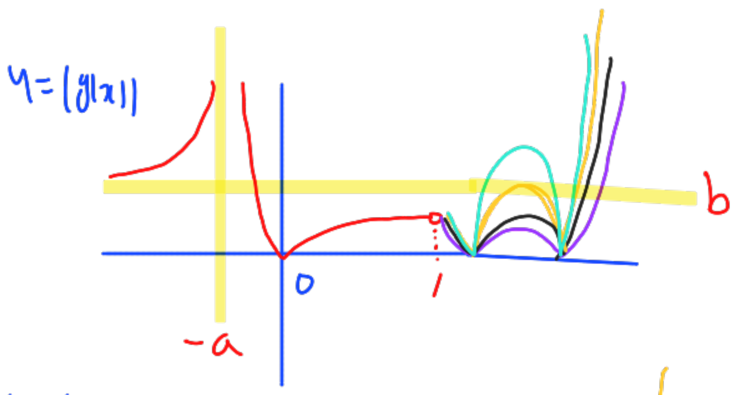
$f(a-b)$의 값을 구하시오. [4점]

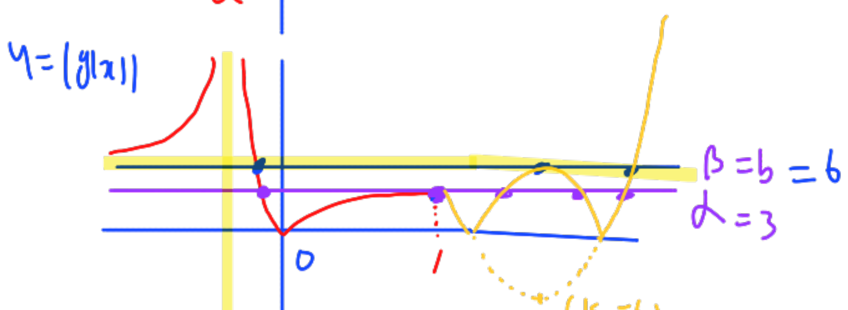
$\boxed{75}$











$h(0) = 3 = \alpha$

$-a$

$h(\alpha) = h(3) = 5 = \beta - 1,\ \beta = 6 = b$

$\frac{bx}{x+a} = \frac{6x}{x+a}$ (1,3) $\frac{6}{1+a} = 3,\ a=1$

$f(x) = (x-k)^2 - 6$ (1,3)

$(1-k)^2 - 6 = 3,\ 1-k = \pm 3,\ k = 4\ (k>1)$

$f(x) = (x-4)^2 - 6,\ f(a-b) = f(1-5) = 75$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.