8. 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 점 $(1, f(1))$을 지나고 기울기가 $m\,(m \geq 2)$인 직선이 이등분할 때, 상수 m의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$　　② 3　　③ $\frac{7}{2}$　　④ 4　　⑤ $\frac{9}{2}$

9. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(4, \log_3 a)$, $\mathrm{B}\left(\log_2 2\sqrt{2}, \log_3 \frac{3}{2}\right)$이 있다. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점이 직선 $y=4x$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은? [4점]

$\frac{3}{2}$

① $\frac{3}{8}$　　② $\frac{7}{16}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{9}{16}$　　⑤ $\frac{5}{8}$

$\frac{3\times\frac{3}{2}-1\times4}{3-1}, \frac{3\times\log_3\frac{3}{2}-\log_3 a}{3-1}$

$\frac{1}{2}\times4=\log_3\frac{27}{8a}$

$9=\frac{27}{8a}$　$a=\frac{3}{8}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)g(x)=|f(x)|$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $g(3)=0$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 9　　② 12　　③ 15　　④ 18　　⑤ 21

$g=\frac{|f|}{x-1}$

$x=1$ 연속 $\Leftrightarrow$ $f(1)=0$, $f'(1)=0$

$f(x)=(x-1)^2(x-3)$

11. 모든 항이 $\boxed{\text{자연수}}$인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_5 - b_5 = a_6 - b_7 = 0$$

이다. $a_7 = 27$이고 $b_7 \le 24$일 때, $b_1 - a_1$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$a : d_1$ / $b : d_2$

$-d_1 = -2d_2$

$d_1 = 2d_2$

$(27 - d_1) = b_7 \le 24$

$d_1 \ge 3$

$d_1 = 3 \Rightarrow d_2 = \frac{3}{2}$ x

$d_1 = 4 \Rightarrow d_2 = 2$ / $a_1 = 3$, $b_5 = a_1 + 4d_1$
$= 3 + 16 = 19$

$b_1 = b_5 - 4d_2 = 19 - 8 = 11$

$11 - 3$

12. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = -3t^2 + at,\ v_2(t) = -t + 1$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 양수 a에 대하여 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는? [4점]

① $\frac{29}{2}$ ② 15 ③ $\frac{31}{2}$ ④ 16 ⑤ $\frac{33}{2}$

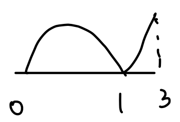
$-3t^2 + (a+1)t - 1$

$-t^3 + \frac{(a+1)}{2}t^2 = t$

$= -\frac{t}{2}\left(2t^2 - (a+1)t + 2\right)$

$a + 1 = 4.\ a = 3$

$-3t^2 + 3t$



$-t^3 + \frac{3}{2}t^2$ $1 \rightarrow -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$3 \rightarrow -27 + \frac{27}{2} = -\frac{27}{2}$

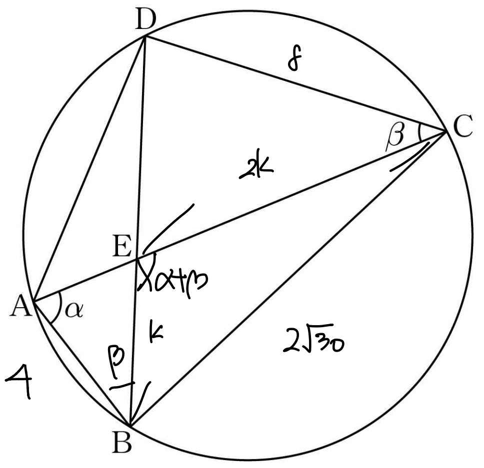
$-\frac{27}{2} - \frac{1}{2} = -14$

$14 + \frac{1}{2} = \frac{29}{2}$

13. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{AB}=4,\ \overline{BC}=2\sqrt{30},\ \overline{CD}=8$

이다. $\angle BAC=\alpha,\ \angle ACD=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{12}$이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는? $\left(단,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$120 = 5k^2 - 4k^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)$

$= \frac{20}{3}k^2 \quad k^2=18.$

$16 = p^2+18-2\cdot p \cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{5}{12}$

$p^2+18-\frac{5}{\sqrt{2}}p$

$p^2-\frac{5}{\sqrt{2}}p+2=0$

$\sqrt{2}p^2-5p+2\sqrt{2} \quad p=2\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1) \\ f(x-1)+2 & (x>1) \end{cases}$$

은 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이다. $g'(t)=2$인 서로 다른 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

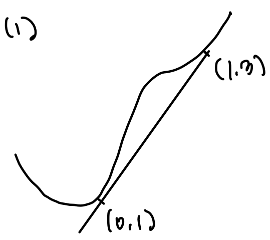
$f(1)=f(0)+2$ / $f'(1)=f'(0)$

$f'(0)=2.\ f(0)=1 \Rightarrow f(1)=3$

$=f'(1)$

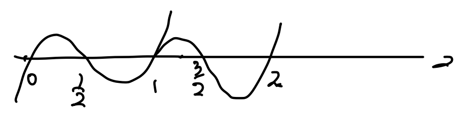
$f'(x)$

$f'(x-1)$



$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1$

$f'(x)=4x(x-\frac{1}{2})(x-1)+2$



$2+1+2$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 } a_n\text{의 약수인 경우}) \\ 3a_n+1 & (n\text{이 } a_n\text{의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 254 ② 264 ③ 274 ④ 284 ⑤ 294

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6

240 ← 240 ← 120 ← 40 ← 10 ← 2

X X 13 3

26 ← 26

X $\cancel{X}$ 9

18 ← 18

단답형

16. 방정식 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=27^{x-8}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=(x^2+3x)(x^2-x+2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$과 상수 c에 대하여

$$\sum_{n=1}^{9} ca_n = 16,\ \sum_{n=1}^{9}(a_n + c) = 24$$

일 때, $\sum_{n=1}^{9} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

19. 두 상수 a, b $(a>0)$에 대하여 함수 $f(x) = |\sin a\pi x + b|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$의 값을 구하시오. [3점]

(가) $f(x)=0$이고 $|x| \le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

(나) $f(x)=\frac{2}{5}$이고 $|x| \le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2 = 2\int_{3}^{x}(t^2+2t)f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{54}$

* 곱미분

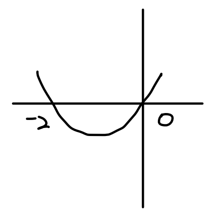
$f(x) \times f(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x)$

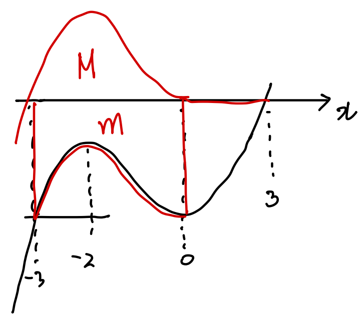
$2f(x)f'(x) = 2(x^2+2x)f(x)$

$\to f(x)=0$ or $f'(x) = x^2+2x$

$f'(x) = x^2+2x$

$\to f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$





$M+m = 3 \times 18$

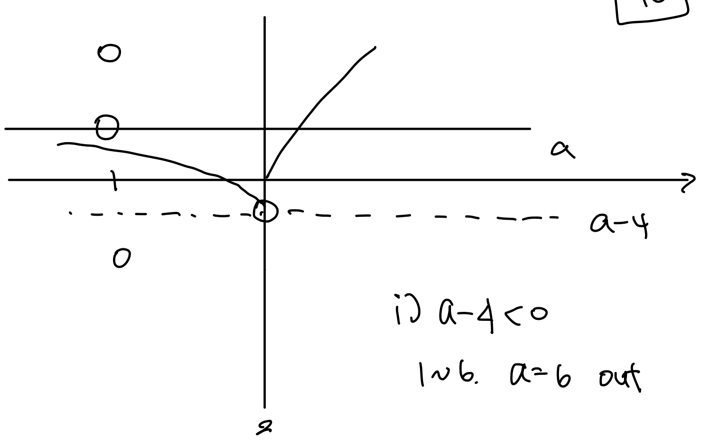
21. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+a & (x<2) \\ \left|5\log_2 x-b\right| & (x\ge 2)\end{cases}$$

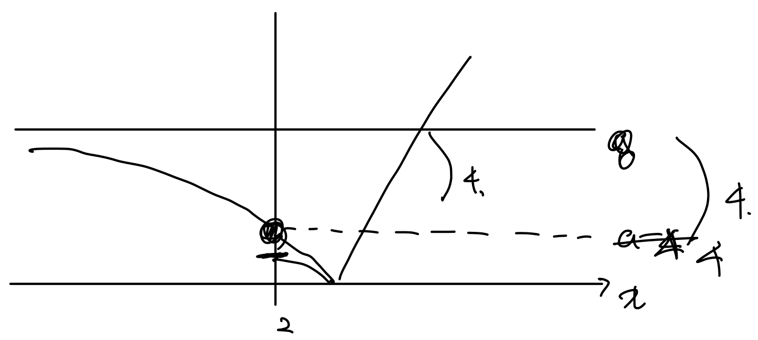
이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
(나) $g(t)=2$인 자연수 t의 개수는 6이다.

$\boxed{15}$.



i) $a-4<0$
$1\sim6$. $a=6$ out



$a=7$ $5\log_2 x=b$

$b-5\log_2 x$ $x=2^{\frac{b}{5}}\ge 2$

$b-5\le a-4$

$b\le a+1$. b $b-5=3$ $b=8$ ii) $a=8$ $b=7$.

$b-5\ge 2$

$b\ge 7$.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+x & (f(x)\ge 0) \\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

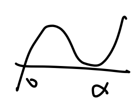
(가) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 불연속인 실수 t의 개수는 1이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수는 2이다.

$f(-2)=-2$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{486}$.

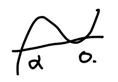
(i) $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ $(\alpha\ne0, \beta\ne0)$ out

(ii) $f(0)=0$. $f(\alpha)=0$ $(\alpha\ne0)$

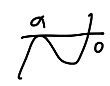


$f(x)+1$
$2f(x)$

$f(x)=x^2(x-\alpha)$



$f(-2)=4(-2-\alpha)=-2$



$-2-\alpha=-\frac{1}{2}$

$x(x-\alpha)^2=-2$

$-2(-2-\alpha)^2=1$ $x(x+3)^2$

$-2-\alpha=1, -1$ $6\cdot81$

$\alpha=-3, -1$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

27. 함수 $f(x)=e^{3x}-ax$ (a는 상수)와 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ -f(x) & (x < k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가질 때, $a\times k$의 값은? [3점]

① e ② $e^{\frac{3}{2}}$ ③ e^2 ④ $e^{\frac{5}{2}}$ ⑤ e^3

28. 함수 $y=\dfrac{2\pi}{x}$의 그래프와 함수 $y=\cos x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, m번째 수를 a_m이라 하자.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{n\times\cos^2(a_{n+k})\right\}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$a_{n+k}\cos a_{n+k}=2\pi$

$\dfrac{n\cdot 4}{(n+k+1)^2} < n\cos^2 a_{n+k} < \dfrac{n\cdot 4}{(n+k)^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot 4}{n^2+2nk+k^2}$

$=$

$\dfrac{4}{(1+2\cdot\frac{k}{n}+(\frac{k}{n})^2)}\cdot\dfrac{1}{n}$

$\frac{k}{n}=x$ $\displaystyle\int_0^1\frac{4}{(x+1)^2}dx=-\frac{4}{x+1}\Big|_0^1$

$=-2+4$

단답형

29. 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\,(a>0)$이 있다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 직선 l이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\,(a>0)$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $f(\theta)$라 하자.
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a$일 때, $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=pe+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이고 p, q는 정수이다.) [4점]

$\boxed{5}$

$l:\ \tan\theta x+1=e^{\frac{x}{a}}-1.$

$\theta=\frac{\pi}{4}\rightarrow\ a+1=e-1$

$a=e-2.$

$\tan\theta\cdot f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{e-2}}-1$

$\sec^2\theta f(\theta)+\tan\theta f'(\theta)=\frac{f'(\theta)}{e-2}e^{\frac{f(\theta)}{e-2}}$

$2(e-2)+k=\frac{k}{e-2}\cdot e$

$2(e-2)^2+k(e-2)=ke$

$\cancel{2}k=\cancel{2}(e-2)^2 \qquad k=e-2$

30. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $60\times(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\{x\,|\,f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$을 만족시키는 실수 t의 개수가 1이다.
> (나) $f(2)=2e^{-2}$

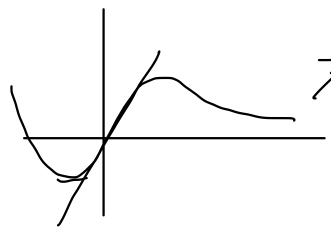
$\boxed{40}$

$f(x)=f'(t)\times x$

$4a+2b=2 \quad b=1-2a=a$

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$

$-ax^2-bx+2ax+b$



$-\cancel{2ax}-b+2a+\cancel{ax^2}+\cancel{bx}-\cancel{2ax}-b$

$x=0\rightarrow\ 2a-2b=0$

$a=b.$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.