2025

피직솔루션

PHSICSOLUTION

역학 풀이의 완성을 위한 마지막 단계

에라둔

2025 피직솔루션

CONTENTS | 목차

Chapter 0 비례식의 원리

Chapter 1 역학과 비례식

Chapter 2 상황 해석

Chapter 3 문항 적용 연습

시작하기 전에

 물리라는 과목은 역사적으로 역학 파트에서 고난도 계산 문항이 출제 되어 왔고 이에 대한 어려움을 겪는 분들이 많아 왔습니다. 물론 여러 시행착오를 겪고 나면 오히려 역학 파트에 재미를 느끼시는 분들도 있으나 반대로 그러한 시행착오를 겪는 과정에서 적잖은 스트레스를 받는 분들도 많습니다. 본 교재는 그러한 시행착오 과정을 줄이고 고난도 역학 문제 풀이 과정을 간소화, 최적화를 원하시는 분들을 위해 작성되었습니다.

 마음 같아선 기본적인 내용부터 차근차근 다루고 싶으나, 시간 관계상 기본 개념은 간결하게 다루고 이를 바탕으로 파생되는 문항 풀이를 위한 개념 및 비례식을 이용한 문항 풀이 적용에 대해 다루었습니다. 계산 문항에 어려움을 겪는 분들이라면 본 교재가 좋은 교보재가 될 것이라 자부합니다.

 다만, 학습 이전에 몇 가지 말씀드리고 싶은 사항이 있습니다.

 첫째로 본 교재를 학습하기 전에 반드시 **기본적인 개념 이해 및 기출 문항을 1회독**을 하시기를 권장 드립니다. 기본적인 개념 이해가 되어 있지 않다면 내용이 다소 벅찰 수 있으며 기출 문항을 풀지 않은 상태라면 **본인의 풀이 변화를 느끼기 어려울것**이기 때문입니다. 만약 이 두 가지가 충족이 되지 않은 상황이라면 충족시킨 뒤에 본 교재를 다시 학습해주시기를 부탁드리겠습니다.

 둘째로 본 교재에서 지향하는 풀이 방식이 낯설더라도 꼭 시도라도 해보시면 좋겠습니다. 저는 여러분들의 계산 스타일을 잘 모르지만 아마 본 교재에서 지향하는 풀이 방식은 여러분들과는 많이 다를 것입니다. 일반적인 풀이가 **정량적 계산**을 지향한다면 본 교재는 **비율적 계산**을 지향하기 때문입니다. 아마 풀이 방식이 낯설거나 한편으로는 어려울 수 있습니다. 하지만 익숙해지고 나면 상당히 쾌적한 풀이 및 문항 해석 능력을 느끼실 수 가지실 수 있을 것입니다.

 셋째로 본 교재 내용을 기반으로 **사설 문항들을 풀어보시기를 권장 드립니다.** 어차피 여러분은 결국엔 처음 보는 문항을 풀게 될 것이기에 기출이 아닌 새롭게 나오는, 풀어보지 않은 문항들에 대해 이론을 적용해보는 것이 매우 중요합니다. 따라서 본 교재 학습이 끝났다면 N제, 사설 모의고사 등에 대하여 적용하여 비율적 계산을 체화해보시기 바랍니다.

 오랜만에 이렇게 교재를 작성하니 긴장이 되면서도 최대한 많은 내용을 담고자 고민하는 이 시간이 즐겁습니다. 본 교재를 통해 얼마나 많은 분들이 학습하실지는 모르겠으나 적어도 이 교재를 보시는 모든 분들은 이 내용들을 통해 만족하실만한 결과가 있으셨으면 좋겠습니다. 오류 제보 및 질문사항은 본 교재를 다운로드 하신 오르비, 포만한에서 댓글로 남겨주시면 답변드리도록 하겠습니다. 감사합니다.

- 2024년 9월, 에라둔(이건영) 올림 -

* 본 교재에는 학습 과정에 도움이 될만한 기출 문항들을 수록하였습니다. 문항 코드는 시행년/월/번호 순으로 이루어져 있습니다. 예를 들어 2023학년도 수능 11번은 20221111로 표기하였습니다.

비례식의 원리

CHAPTER

00

1. 비례식의 기본 특성

본 교재는 물리학 학습 이전에 비례식에 대해서 배울 것이다. 뜬금없이 무슨 비례식인가라고 생각할 수 있으나 비례식을 이용하면 문제 풀이 과정에서 여러 장점을 얻게 된다. 첫째로 여러 문제 상황, 조건 등을 직관적으로 파악하기에 매우 수월해지며 둘째로 계산을 획기적으로 단순화할 수 있다. 특히나 실제 출제되는 문항들을 보면 **~는 ~의 몇 배이다, A의 질량은 $2m$, B의 질량은 $3m$이다**처럼 비율 관계를 나타내는 경우가 많다. 이러한 상황 속에서 비례식을 이용하는 것은 많은 이점을 줄 것이다. 앞으로 본 교재에서는 이론 및 문항 풀이를 가급적이면 비례식을 이용하여 서술해나갈 것이다. 1단원을 하기 이전에 간단한 튜토리얼을 하는 느낌으로 학습해보도록 하자.

0.1.1 비례식의 특징

두 개 이상의 어떠한 값들의 비율을 나타낸 것을 비례식이라 한다. 예를 들어 $a=2$, $b=0.5$라면 이 둘의 비율은 $a:b=2:0.5$라고 쓸 수 있고, 보기 쉽게 2씩 곱하여 $a:b=4:1$라고도 쓸 수 있다. 이처럼 비례식에 대하여 비례식에는 0이 아닌 어떤 수를 곱하든 상관없다는 사실은 익히 알고 있을 것이다. 우리는 앞으로 비례식끼리 사칙연산을 수행할 것이다. 어떻게 계산이 이루어질까? 어떠한 연산 ★에 대해서 아래와 같이 떠올릴 수 있을 것이다.

$$\begin{array}{r|ccccc} & a & : & b & : & c \\ \star & a' & : & b' & : & c' \\ \hline \end{array}$$
$$a \star a' : b \star b' : c \star c'$$

n번째 숫자는 n번째 숫자끼리 연산 ★을 하는 모습을 나타낸 것이다.

두 비례식에 대하여 어떠한 연산 ★를 한다는 것은 위처럼 첫 번째 숫자는 첫 번째 숫자끼리, n번째 숫자는 n번째 숫자끼리 연산을 해준 것을 의미한다. 그렇다면 위와 같은 연산 방식은 늘 성립할까? $a:b=1:2$, $a':b'=2:3$ 면 $a+a':b+b'=3:5$라고 할 수 있을까? **아쉽게도 그럴 수 없다.** 간단한 반례로 $a=1, b=2, a'=4, b'=6$면 $3:5$가 아닌 $5:8$이 나오니 말이다. 그러나 특정 **연산, 상황**에 대해서는 위와 같은 계산이 성립하는데 미리 말하자면 곱셈, 나눗셈에 대해서는 늘 성립하고 덧셈, 뺄셈에 대해서는 특정 상황에 대해 성립한다. 이에 대해 조금 자세히 알아보도록 하자.

(1) 비례상수 : $\mathrm{A}:\mathrm{B}=\mathrm{a}:\mathrm{b}$, $\mathrm{A}=\mathrm{ak}$, $\mathrm{B}=\mathrm{bk}$ 일 때 상수 k를 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=\mathrm{a}:\mathrm{b}$의 비례상수라 한다. 비례식을 구성하는 숫자가 **비율이 아닌 실제값으로 나타내기 위해 곱해야 하는 어떠한 상수**를 의미한다.
: $\mathrm{A}=8$, $\mathrm{B}=12$일 때 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$이다. 이 때 2와 3에 각각 4를 곱해주면 A, B의 값이 나오므로 비례식 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$에 대한 비례 상수 $k=4$다.

◆ **예시** : $\mathrm{A}=20$, $\mathrm{B}=30$이고 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$이다. 비례식 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:3$에 대한 비례 상수 k는 10이다.

(2) 비례식간의 곱셈, 나눗셈 : **곱셈, 나눗셈**으로 이루어진 관식에 대한 계산은 비례식에서도 동일하게 적용된다.

증명

$A:B=a:b$, $A':B'=a':b'$ 이고 비례상수는 각각 k, k'이라 하자. $(k, k' \neq 0)$
이 때 $AA':BB'=aa'kk':bb'kk'=aa':bb'$이다.

만약 비례상수가 0일 경우에는 자연스레 AA'과 BB'이 0이므로 마찬가지로 성립한다.

: 예를들어 $F=m\times a$라는 관계식이 있다면 $F\text{비율}=m\text{비율}\times a\text{비율}$도 동일 하게 성립한다. 이는 앞으로 물리학에서 배울 여러 관계식들에 대한 계산을 간소화하는데 매우 유용하게 쓰일 예정이며 본 교재의 기본 베이스가 되는 내용이다.

◆ **예시** : 평균속력×시간=이동거리 이므로 (평균속력 **비율**) × (시간 **비율**) = (이동거리 **비율**) 도 성립한다.

◆ **예시** : 속도변화량×시간=가속도 이므로 (속도변화량 **비율**) × (시간 **비율**) = (가속도 **비율**) 도 성립한다.

(3) 비례식간의 덧셈, 뺄셈 : 일반적으로 비례식간의 덧셈 및 뺄셈은 불가능하나 비례상수가 동일할 경우는 가능하다.
: 간단한 예로 $a=30$, $b=40$, $c=10$, $d=15$라고 했을 때 $a:b=3:4$, $c:d=2:3$이다. 이 두 비례식의 구성 숫자들을 순서대로 더할 경우 $a+c:b+d=(3:4)+(2:3)=(3+2):(4:3)\neq 7:5$와 같이 성립하지 않는다. 그러나 비례식끼리의 덧셈 뺄셈이 성립하는 경우는 대표적으로 두가지가 존재한다.

연산하는 비례식들에 대한 비례상수가 모두 동일할 경우

증명	$A:B=a:b$, $A':B'=a':b'$, 두 비례식에 대한 비례상수는 k로 동일하다 하자 $(k\neq 0)$ 이 때 $A\pm A':B\pm B'=(a\pm a')k:(b+b')k=a\pm a':b\pm b'$ (비례상수 k 소거됨)

◆ **예시 :** $a:b=3:4.\ c:d=1:2$이고 비례상수 $k=10$으로 동일하다면 $a+c:b+d=4:6=2:3$이다.
: 이유는 간단하다. a, b, c, d의 실제 값이 30, 40, 10, 20이고 이들에 대해 덧셈을 하든 뺄셈을 하든 10(비례상수 k)으로 묶이며 이들은 비례식을 세워도 어차피 소거되기 때문이다.

한쪽이 0:0일 경우 (두 비례식에 대한 덧셈에서)

증명	$A:B=a:b$, $A':B'=0:0$, $A:B$ 에 대한 비례상수는 k이다. 이 때 $A\pm A':B\pm B'=ak+0:bk+0=a:b$

◆ **예시 :** $a:b=0:0.\ c:d=1:2$이면 $a+c:b+d=1:2$이다.
: 마찬가지로 어느 한쪽이 $0:0$이면 이에 대해서 덧셈, 뺄셈을 해도 자기 자신이 나오기 때문에 성립한다. 어찌보면 0:0이라는 비례식에 대한 비례상수는 k가 어느숫자든 상관없기 때문이라 볼 수 있다. 만약 두 비례식이 아닌 세 비례식 중 어느 한 비례식이 0:0인 경우엔 어떻게 될까? 앞서 말했듯 연산하는 비례식들에 대한 **비례상수가 모두 동일할 경우** 덧셈 뺄셈이 성립하다고 하였다. 즉, 세 비례식 중 어느 한 비례식이 0:0이라면 나머지 두 비례식의 비례상수가 동일하다면 상관 없다. 이를 다르게 말하면 0:0이라는 비례식은 더하든 빼든 아무런 영향을 주지 않는다는 의미이기도 하다.

0.1.2 비례식의 계산 방식

앞에서 비례식끼리는 일반적으로 곱셈, 나눗셈이 가능함을 배웠다. 이를 종이에 쓰면서 풀 때에는 다음과 같은 방식으로 쓰도록 하자.

(1) 비례식의 곱셈 : 비례식끼리 곱셈을 할 경우엔 앞에서부터 순차적으로 곱해주는 방식을 취한다.

$$(a:b:c)\times(a':b':c') = aa':bb':cc' \text{ 또는 } \times\begin{array}{|ccccc} a & : & b & : & c \\ a' & : & b' & : & c' \\ \hline aa' & : & bb' & : & cc' \end{array}$$

◆ **예시** : $(3:5:8)\times(1:2:3) = 3\times1:5\times2:8\times3 = 3:10:24$로 계산이 가능하다.
개인적으로는 우측처럼 세로로 써주면 계산할 때 피로감이 덜하며 검토하기도 수월하여 선호하는 편이다.

(2) 비례식의 나눗셈 : 비례식끼리 나눗셈을 할 경우엔 앞에서부터 순차적으로 나눠주는 방식을 취한다.

$$(a:b:c)\div(a':b':c') = \frac{(a:b:c)}{(a':b':c')} = \frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}$$

◆ **예시** : $(3:5:8)\div(1:2:3) = \frac{(3:5:8)}{(1:2:3)} = \frac{3}{1}:\frac{5}{2}:\frac{8}{3} = 18:15:16$으로 계산이 가능하다.
풀이 과정을 보면 비례식 통째로 분모, 분자에 두는 것이 가능하다. 그리고 이를 합칠 때에는 : 가 합쳐진다고 보면 아마 이해하기 편할 것이다. 필자는 곱셈이든 나눗셈이든 세로로 쓰는 것을 선호한다. (가로로 쓰면 시선이 좌우로 왔다 갔다 하느라 계산 과정에서 실수가 발생하는 경우가 많음) 추가로 $(a:b)\div(a':b') = \frac{(a:b)}{(a':b')} = ab':a'b$와 같이 숫자가 2개인 비례식끼리 나눠줄 경우에는 분수 형태가 나올텐데 이 때 아래에서 윗방향으로 대각선으로 곱해주듯 계산해주면 훨씬 편안하다. (a와 b', a'와 b를 곱해주듯)

아마 지금까지 배운 내용이 어렵지는 않을 것이다. 단지 익숙하지 않을것이며 익숙하지 않기 때문에 간단한 계산도 조금은 삐걱댈 것이다. 한번 간단한 예제를 통해 비례식간의 계산을 익혀보도록 하자.

예제

◆ **예제 1** : $(3:5)\times(1:6) =$

◆ **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12) =$

◆ **예제 3** : $(2:3)\div(5:3) =$

◆ **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3) =$

풀이

- **예제 1** : $(3:5)\times(1:6)=3:30=1:10$
- **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12)=6:54:60=1:9:10$
- **예제 3** : $(2:3)\div(5:3)=\dfrac{(2:3)}{(5:3)}=\dfrac{2}{5}:1=2:5$
- **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3)=\dfrac{(1:3:4)}{(8:6:3)}=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{4}{3}=3:12:32$

이렇게 비례식간의 곱셈 나눗셈을 하고나면 **가장 간단한 정수비로 나타내주는 과정**을 거치게 될 것이다. 위의 **예제 1**, **예제 2**풀이를 보면 $3:30$과 $6:54:60$을 $1:10$, $1:9:10$으로 단순화 하게 된다. 이렇게 비례식간의 곱셈 ,나눗셈을 할 때에는 계산 후에 단순화를 하는 경우도 있으나 계산 과정에서도 단순화를 진행할 수 있다. 다만, 단순화의 방법은 곱셈을 할 때와 나눗셈을 할 때 조금 다르다.

(3) 비례식의 곱셈 과정에서의 단순화 : 비례식간 곱셈에서숫자를 0이 아닌 어떠한 상수 k로 한번 나눠줄 때 N번째 숫자를 제외한 나머지 수도 k로 한번씩 나누어 단순화가 가능하다.

$$(a:b:c)\times(a':b':c')=aa':bb':cc'=\frac{aa'}{k}:\frac{bb'}{k}:\frac{cc'}{k}=\frac{1}{k}(aa':bb':cc')$$

(어느 비례식인지와 관계 없이 첫 번째, 두 번째, N번째 수를 모두 k로 한번씩 나눠주어야 성립한다)

풀이

- **예제 1** : $(3:5)\times(1:6)=(1:5)\times(1:2)=1:10$
- **예제 2** : $(3:6:5)\times(2:9:12)=(1:6:5)\times(2:3:4)=(1:3:5)\times(1:3:2)=1:9:10$

예제 1은 $3:5$와 $1:6$에서 첫 번째 숫자 3, 두 번째 숫자 6을 미리 3으로 미리 나눠 단순화를 진행하였고 예제 2에서는 $3:6:5$와 $2:9:12$에서 3, 9, 12를 3으로 나눠주고 이후 2, 6, 4를 2씩 미리 나눠 단순화를 진행한 것이다. 당연한 이야기지만 k씩 나눠준다는 것은 k씩 곱해줄때도 성립함을 의미한다.

이러한 단순화는 나눗셈에서도 가능하다. 다만 방법이 조금 다르다.

(4) 비례식의 나눗셈 과정에서의 단순화 : 비례식간 나눗셈에서 숫자를 0이 아닌 어떠한 상수 k로 한번 나눠줄 때 또 다른 N번째 숫자에 대해 k로 한번 나누어 단순화가 가능하다.

$$(a:b:c)\div(a':b':c')=(\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'})=(\frac{ak}{a'k}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'})$$

(나눗셈에서는 N번째 숫자를 k로 한번 나눠줬다면, 또다른 N번째 숫자도 k로 한번 나눠주어야 성립한다.)

풀이

- **예제 3** : $(2:3)\div(5:3)=(2:1)\div(5:1)=2:5$
- **예제 4** : $(1:3:4)\div(8:6:3)=(1:1:4)\div(8:2:3)=\frac{1}{8}:\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=3:12:32$

예제 3 풀이를 보면 2:3의 3을 3으로 나눠주면서 5:3의 3도 3으로 나눠 계산을 단순화 한 것이다. **예제 4**는 $1:3:4$의 3을 3으로 나눠줌과 동시에 $8:6:3$의 6도 3으로 나누어 단순화한 것을 나타낸 것이다.

이러한 계산 과정속의 단순화는 나눗셈보다는 곱셈에서 많이 유용한 편이다. 이러한 단순화가 익숙해진다면 비례식간의 계산이 보다 쉬워질 것이다. 다만, 이것이 익숙하지 않다면 그냥 계산을 일괄적으로 한 뒤 마지막 최종 결과물을 단순화해도 무방하다. 익숙하지 않다면 그냥 최종 계산 후 단순화하는 것을 권장한다.

(5) 비례식의 역수비 : $a:b$와 $a:b:c$의 역수비는 각각 $b:a$, $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ca:ab$이다.

물리 문항에서는 상당수의 문제가 두 물체에 대한 비교를 물어본다. 이 경우 $1:1$을 어떠한 비례식 $a:b$로 나눠주는 경우가 많은데 엄밀하게는 역수비라고 표현하는 것이 맞으나 예외적으로 $a:b$의 역수비는 편하게 반대비 $b:a$라 칭하겠다.

- **예시** : $1:1$을 $3:2$로 나눠주면 반대비인 $2:3$이 나온다.

0.1.3 비례식의 확장

(1) 관계식의 비례식 변환 : $k_1a = k_2b$이면 $a:b=k_2:k_1$이다. (단, $a\neq 0, b\neq 0$ 이다.)

$$k_1a = k_2b = k_3c\text{이면 } a:b:c=\frac{1}{k_1}:\frac{1}{k_2}:\frac{1}{k_3}\text{이다. (단, } a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \text{ 이다.)}$$

조금 보기 쉽게 비례식으로 표현해보자면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$k_1a = k_2b \text{ 는 } (k_1:k_2)\times(a:b)=1:1$$

$$k_1a = k_2b = k_3c \text{ 는 } (k_1:k_2:k_3)\times(a:b:c)=1:1:1$$

간단한 예로 $2m_A=3m_B$이면 $m_A:m_B=3:2$이고. $2a=3b=4c$면 $a:b:c=6:4:3$이다. 같다 라는 것은 1:1이다 와 동일한 표현이니 $2m_A:3m_B=1:1=(2:3)\times(m_A:m_B)$ 이므로 $m_A:m_B=\frac{1:2}{2:3}=3:2$ 라고 쓸 수 있는 것이다.

두 번째 예시는 $2a:3b:4c=1:1:1=(2:3:4)\times(a:b:c)$ 면 이므로 $a:b:c=\frac{1:1:1}{2:3:4}=6:2:3$

같다는 표현을 단순히 등호가 아니라 1:1이라는 표현으로 바꿔 생각하면 비례식을 이용한 계산식을 세우기에 훨씬 수월하다. 이처럼 우리는 동일한 어떤 식을 다르게 표현하는것도 익숙해지면 좋다. 예를 들어 "$3a$는 $4b$의 2배이다."를 어떻게 표현할 수 있겠는가? $3a:4b=2:1$을 떠올릴 줄 알아야 하며 $(3:4)\times(a:b)=2:1$로 쪼개서 떠올릴줄도 알아야 한다. 그래야 관계식을 비율로 쪼개 계산하기 수월한 형태로 만들 수 있기 때문이다. 간단한 예제를 통해 관계식을 비례식으로 쪼개 계산해보도록 하자.

예제

$a:b$ 또는 $a:b:c$를 구하시오.

- **예제 1** : $3a$는 $4b$의 8배이다.
- **예제 2** : $4a:3b:5c=2:3:4$이다.

풀이

- **예제 1** : $(a:b)\times(3:4)=8:1$, $a:b=\frac{8:1}{3:4}=32:3$
- **예제 2** : $(1:3:4)\div(8:6:3)=(1:1:4)\div(8:2:3)=\frac{1}{8}:\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=3:12:32$

(2) 관계식에서의 상수의 무시 : 곱셈, 나눗셈으로 이루어진 관계식에 대해 비례식 계산을 할 경우엔 상수를 무시해도 무방하다.

간단한 예를 들면 삼각형의 넓이는 밑변×높이×0.5이다. 만약 두 삼각형 A, B의 넓이 비율을 구해야 한다면 우리는 어떻게 식을 세우겠는가? 두 삼각형의 밑변의 비율, 높이의 비율, 0.5의 비율을 곱해주면 된다. 그러나 어떠한 동일한 상수의 비율은 1:1을 의미하며 1:1은 곱하든, 나누든 아무런 변화를 주지 않기 때문에 무시하여도 무방하다. 따라서 두 삼각형의 밑변의 비율과 높이의 비율을 곱해주면 자연스레 넓이의 비율이 도출될 것이다.

이 내용들을 배우는 이유는 앞서 설명했듯 계산 과정을 단순화 하기 위해서이다. 하지만 실제 문제 조건은 어떠한 문장으로 표현이 될것이며, 우리는 이러한 문장을 비례식으로 바꿔 계산해나가야 한다. 우리의 일상과 친근한 상황들에 대하여 비례식 계산을 통해 답을 도출해보도록 하자.

예제

- **예제 1** : 두 아르바이트의 시급은 2:3, 노동 시간은 7:6이다. 총 급여 비율을 구하시오.
- **예제 2** : 두 물건의 판매 가격은 개당 2:3, 구매 수량은 5:3이다. 필요 금액 비율을 구하시오.
- **예제 3** : 사과와 배의 개당 가격은 3:4이다. 동일한 금액으로 구매 가능한 사과와 배의 개수 비율을 구하시오.

풀이

- **예제 1** : 총 급여는 시급과 시간의 곱한값과 같다. 따라서 (2:3)에 (7:6)을 곱한 14:18=7:9이다
- **예제 2** : 필요 금액은 가격과 수량의 곱이다. 따라서 (2:3)에 (5:3)을 곱한 10:9이다.
- **예제 3** : 구매 가능한 수량은 금액을 가격으로 나눠준 값이다. 따라서 동일한 금액(1:1)으로 구매 가능한 수량은 1:1을 가격비율인 3:4로 나눠준 4:3이다.

그동안 정량적 계산 위주로 하다가 비례식으로 계산을 하려고 하면 조금 익숙하지 않을 것이다. 그러나 적응만 한다면 강력한 무기가 될 수 있으니 천천히 적응해보도록 하자.

2. 비례식의 연결

비례식을 구성하는 값은 단순히 비율만을 알려줄 뿐 실제값을 알려주지는 않는다. 이러한 특성으로 인하여 우리는 서로 다른 두 비례식에 대하여 임의의 값들의 비율을 즉각적으로 구할 수 없다. 예를 들어 $a:b=2:3$, $c:d=4:5$라고 해보자. 이 비례식에서 a와 d를 나타내는 값은 각각 2와 5이다. 그러나 이를 통해 a와 d의 비율이 2:5라고 단정지을 수는 없다. 이는 두 비례식에 대한 비례 상수가 다르기 때문이다. 이처럼 우리는 비례식을 구하는 과정에서 비례상수가 일치하지 않아 즉각적으로 어떠한 값을 비교하기 어려울 수 있다. 이를 해결하기 위해 비례식의 연결을 배워보도록 하자.

0.2.1 공통 문자를 통한 연결

$$a:b=2:3,\ b:c=4:3$$

위 비례식에서 a와 c에 해당되는 값은 $2,\ 3$이다. 그렇다면 $a:c=2:3$일까? 아니다. 우리가 $a:c$를 구하기 위해서는 이 둘의 실제값을 구한 뒤에 비율을 구해주어야 한다. 다르게 말하면 주어진 두 비례식의 비례 상수가 1이 되게끔 적당한 수를 곱해주고 나서야 비교가 가능함을 의미한다. 하지만 꼭 비례상수가 1이 아니여도 동일하기만 해도 즉시 비교가 가능하다는 사실을 알 수 있다. 따라서 $a:b$와 $b:c$의 비례상수를 동일하게 맞춰준다면 우리는 바로 $a:c$를 구하는 것이 가능하다. 이처럼 비례 상수를 동일하게 만들어주는 것을 본 교재에서는 **비례식을 연결한다**라고 표현한다.

두 비례식에서 b에 해당하는 값이 각각 3, 4인데 비례식에 어떠한 상수를 곱해서 b를 동일하게 맞춰주어야 한다(같은 b니까) 두 비례식에 대해 각각 4와 3을 곱해주면 아래와 같이 된다.

$$a:b=8:12,\ b:c=12:9$$

이제는 b가 동일해졌으니 우리는 $a:b:c=8:12:9$라고 쓸 수 있으며 $a:c=8:9$임을 알 수 있다. 두 비례식에 대해 4, 3을 곱하여 비례상수를 동일하게 맞춰주었는데 4와 3이라는 숫자는 어떻게 도출된 것인가? 우리는 비례 상수가 동일하다면 같은 b 나타내는 값이 동일해야한다 라는 조건을 이용한 것이다. 이처럼 서로 다른 비례식을 연결하기 위해서는 두 비례식에 대한 어떠한 조건을 이용해야한다.

비례식을 연결하기 위해서는 비례식에 각각 어떠한 상수를 곱하여 비례 상수를 일치시켜줘야한다. 앞의 예시를 표현하면 다음과 같다.

$$(3:4)\times 상수비 = 1:1,\ 상수비 = 4:3$$

이는 b를 구성하는 값인 3과 4에 어떠한 상수를 각각 곱하여 동일하게 맞춰주었음을 의미하며 곱해줘야 하는 상수의 비율이 4:3이라는 결과를 나타낸 것이다. 그래서 앞에서 두 비례식에 각각 4와 3을 곱하여 비례상수를 일치시켜준 것이다.

0.2.2 추가 조건을 통한 연결

이번엔 조금 다른 예시를 들어보도록 하겠다.

$a:b=2:3,\ c:d=4:3,\ b:c=5:3$이다. $a:b:c:d$는?

위 문항은 $a:b$와 $c:d$를 연결하라는것과 동일한 문항이다. 따라서 우리는 $a:b$와 $c:d$에 각각 어떠한 상수를 곱하여 $b:c=5:3$을 만족시켜야 한다. 따라서 b,c를 구성하는 3, 4에 어떠한 상수를 각각 곱하여 5:3으로 맞춰주어야 한다.

$$(3:4)\times 상수비 = 5:3,\ 상수비 = \frac{5:3}{3:4} = 20:9$$

따라서 두 비례식 $a:b$와 $c:d$에 대해 각각 20, 9를 곱해주면 다음과 같다.

$$a:b:c:d = 40:60:36:27$$

이젠 a~d에 대한 비율을 자유롭게 구할 수 있을 것이다. 물론, 비례식의 연결은 사실 물리보다는 화학에서 더 많이 쓰이는 편이기는 하나 알아두도록 하자. 간단한 예제를 준비하였다. 간혹 귀찮아서 그냥 숫자 끼워맞추기 식으로 푸는 경우가 있는데 상수비를 구하는 과정을 거쳐 풀어 비례식 계산에 적응하도록 하자. 끼워맞추기 숫자가 다소 복잡할 수 있다.

예제

$a:b:c:d$를 구하여라

◆ 예제 1 : $a:b=3:4, c:d=5:4,\quad a:d=4:7$

◆ 예제 2 : $a:b=5:3, c:d=2:1,\quad a:c=3:4$시오.

풀이

◆ 예제 1 : 3과 4에 어떠한 상수비를 곱하여 4:7이 도출되어야 한다. 따라서 상수비는 $\frac{4:7}{3:4}$로 16:21고 $a:b:c:d = 48:64:105:84$다.

◆ 예제 2 : 5와 2에 어떠한 상수비를 곱하여 3:4가 도출되어야 한다. 따라서 상수비는 $\frac{3:4}{5:2}$로 $3:10$고 $a:b:c:d = 15:9:20:10$다.

3. 정량값의 계산

0.3.1 배율에 따른 계산값의 변화

$a:b = 2:3$이라 해보자. 그렇다면 a는 몇인가? 당연하게도 우리는 알 수 없다. 이처럼 우리는 비례식을 이용하여 문제를 풀어나갈것이나 실제값을 물어보는 문항도 있을터이다. 이 때 우리는 $a:b$의 구성요소인 2와 3에 어떠한 값을 곱하여 실제값으로 변환해주어야 하며 이는 해당 비례식의 비례상수를 1로 맞춰준다는 의미이다. $a:b = 2:3$를 실제값으로 바꿔주기 위해서는 어떠한 조건이 추가로 필요할 것이다. 이러한 조건은 여러 가지가 있겠지만 대표적으로 많이 나오는 유형은 합, 차, 곱으로 주어지는 경우가 많다. 한번 아래 예제를 풀어보도록 하자.

예제

$a:b = 2:3$이다. 각 상황별 a의 값과 b의 값을 구하시오.

◆ 예제 1 : $a+b = 20$

◆ 예제 2 : $|a-b| = 10.$

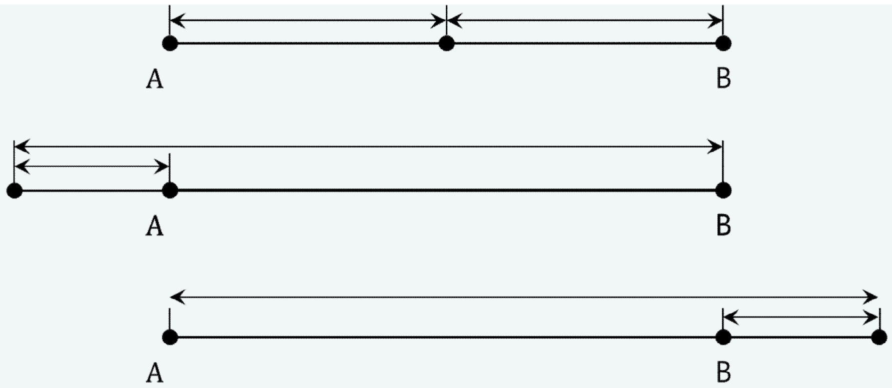
◆ 예제 3 : $ab = 54$

답을 구해보았는가? 정답은 (a, b)순으로 (8, 12), (20, 30), (6, 9)이다. 사실 위 문항을 푸는 것은 어렵지 않을 것이다. $a = 2k, b = 3k$로 두면 당연히 풀릴테니 말이다. 그러나 조금 더 친근하게 다가가 보도록 하자.

$a:b = 2:3$에서 2와 3의 합은 5, 차는 1이다. 이 2와 3을 n배 해주면 합, 차 모두 n배가 될 것이다. 그래서 문제를 풀 때는 합이 5인데 실제론 4배인 20이므로 4씩 곱하여 (8, 12)를 도출하고, 차가 1인데 실제론 10배인 10이므로 10씩 곱하여 (20, 30)을 도출하는 것이 보다 편할 것이다. 그렇다면 곱 조건은 어떻겠는가? $a = 2k, b = 3k$로 두면 $ab = 6k^2$이니 이 경우에는 숫자를 n배 해주면 곱해준 값은 곱해준값의 제곱배로 늘어날 것이다. (만약 ab가 아니라 ab^2처럼 세 번 곱하는 방식이라면 세제곱이 될것이며 n번 곱하는 꼴이면 n제곱이 될 것이다.) 따라서 2와 3의 곱은 6인데 실제로는 9배인 54므로 9에 루트를 씌운 3을 각각 곱하여 (6,9)를 도출하는 것이 정량적 계산보다 편할 것이다.

0.3.2 내분점과 외분점

비례식도 생소할텐데 내분점과 외분점까지 나오니 당황스럽겠지만, 그래도 비례식을 사용할 때 내분점과 외분점은 빼놓을래야 빼놓을 수 없는 개념이다. 외분점과 내분점이 무엇인지는 알 것이다. 하지만 이 공식은 아마 잊은 사람들도 많을것이라 생각한다. 내분점과 외분점은 합과 차의 특성만 알고 있다면 쉽게 구할 수 있다. 각 구성요소들을 n배 해주면 이들의 합, 차 역시 n배가 된다. 이를 이용하면 외분점과 내분점을 쉽게 구하는 것이 가능하다.



그림은 각각 내분점, 외분점(좌측), 외분점(우측)을 나타낸 것이다. 포인트는 내분점으로부터 두 점까지의 거리의 합이 곧 두 점 사이의 거리이며, 외분점으로부터 두 점까지의 거리의 차가 곧 두 점 사이의 거리이다. 필자는 내분점과 외분점을 구할 때 아래와 같은 방법을 사용한다.

(1) 내분점

- 거리의 비율이 $a:b$라면 이에 대해 $a+b$로 나눠 $\frac{1}{a+b}(a:b)$로 바꿔준다.
- 두 점 사이의 거리가 k라면 이에 k를 곱하여 $\frac{k}{a+b}(a:b)$로 나타낸다.
- 이는 비례상수가 1인 두 점까지의 거리 비율이며 내분점으로부터 각 점까지의 거리는 $\frac{ak}{a+b}$, $\frac{bk}{a+b}$이다.

  (합은 k이면서 비율은 a:b가 자연스레 나온다.)

(2) 외분점 (좌측 기준)

- 거리의 비율이 $a:b$라면 (단, $a<b$) 이에 대해 차 $b-a$로 나눠 $\frac{1}{b-a}(a:b)$로 바꿔준다.
- 두 점 사이의 거리가 k라면 이에 k를 곱하여 $\frac{k}{b-a}(a:b)$로 나타낸다.
- 이는 비례상수가 1인 두 점까지의 거리 비율이며 내분점으로부터 각 점까지의 거리는 $\frac{ak}{b-a}$, $\frac{bk}{b-a}$이다.

  (차는 k이면서 비율은 a:b가 자연스레 나온다.)

이러한 정량적 계산 과정이 중요한 이유는 비율만을 계산하다가 문항에서 비율이 아닌 실제 값이 필요한 경우 당황할 수 있기 때문이다. 이럴 때는 당황하지 말고 문항에서 실제 값과 관련된 조건이 있는지 찾아본 뒤 이를 통해 실제값을 도출해주면 된다.

물론, 이러한 풀이를 문항에 적용하기 위해서는 앞으로 여러 과정을 거쳐야 할 것이다. 한번 맛보기로 간단한 예제를 통해 비례식을 통한 문제 풀이를 해보도록 하자. 아마 개념학습이 되어있다면 풀 수 있을 것이다.

예제

예제 1 : 두 물체 A와 B는 등가속도 운동을 통해 점점 빨라지고 있다. 두 물체에 작용하는 알짜힘의 비율은 각각 3:5이며 같은 시간 동안 증가한 속력의 크기는 1:2이다. 두 물체의 질량 비율은?

예제 2 : 두 물체 A와 B는 질량이 $1:2$, 운동에너지는 $2:9$이다. 두 물체의 속력 비율은?

예제 3 : 고정된 점전하 A, B가 있다. A와 B의 $a:b$ 내분점에 존재하는 점전하 C가 두 점전하 A, B에 의해 정지해 있을 때 A와 B의 전하량의 비율은?

풀이

예제 1 : 두 물체의 증가한 속력의 크기 $\triangle v$는 가속도와 시간에 비례한다.
조건에서 같은 시간(1:1)동안 증가한 속력의 크기가 1:2 이므로 가속도의 크기는 1:2이다.
가속도 a는 힘의 크기에 비례, 질량에 반비례한다. 따라서 $\dfrac{3:5}{\text{질량비}}=1:2$이고
질량비는 $\dfrac{3:5}{1:2}=6:5$이다.

예제 2 : 두 물체의 질량 m의 비율은 1:2, 운동에너지의 비율 즉, 상수를 제외한 mv^2은 2:9이다.
따라서 $\dfrac{mv^2\text{비}}{m\text{비}}=v^2\text{비}=\dfrac{2:9}{1:2}=4:9$로 v의 비율은 $2:3$이다.

예제 3 : 어떠한 두 점전하 사이에 작용하는 힘의 크기는 $\dfrac{q_1q_2}{r^2}k$로 점전하의 크기에 비례하고 거리의 제곱에 반비례 한다. 점전하 C는 A, B에 의한 전기력의 크기가 같으며 이는 1:1을 의미한다.
따라서 점전하 C의 전하량의 크기를 q_c라 하면 $1:1=\dfrac{(q_c\text{비율})\times(q\text{비율})}{a^2:b^2}\times k\text{비율}=\dfrac{q\text{비율}}{a^2:b^2}$
전하량의 비는 $a^2:b^2$이다.

만약 위 예제에 대하여 비슷하게 풀이를 하였다면 이제 본 교재를 학습할 준비가 되었을 것이다. 만약 아직 본 풀이가 익숙하지 않다면 다시 한번 복습 후 다음 파트를 학습할 것을 권장한다.

요약 아래의 특성들을 이용하여 이후 내용들을 전개해 나갈것이니 점검하도록 한다.

1) 비례식 간의 연산은 다음과 같은 방식을 따른다.

$$\begin{array}{r|ccccc} & a & : & b & : & c \\ \star & a' & : & b' & : & c' \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{a\star a' : b\star b' : c\star c'} \end{array}$$

위 방식의 계산은 곱셈, 나눗셈에 대하여 성립하며, 덧셈, 뺄셈은 비례상수가 동일 한 경우에 성립한다. 또한 계산하고자 하는 비례식이 두 개일 경우 덧셈 뺄셈은 어느 한쪽 비례식이 0:0일 경우에 성립한다.

2) 1:1, 1:1:1과 같은 비례식은 곱셈과 나눗셈에 영향을 주지 않으며 0:0, 0:0:0은 덧셈과 뺄셈에 영향을 주지 않는다.

3) 곱셈, 나눗셈으로 이루어진 관계식에 대한 계산은 비례식간의 계산에서도 동일하게 적용된다. 이 때 관계식에 존재하는 상수는 비례식간의 계산에서 1:1로 취급되므로 제외하여도 상관없다. (삼각형의 넓이 공식 앞에 붙는 0.5처럼)

4) 비례식간의 곱셈 과정에서는 첫 번째 수부터 n번째 수까지 동일한 수로 나눠주어 단순화가 가능하다.
예 : (2 : 4 : 5) × (3 : 6 : 4) = (1 : 2 : 5) × (3 : 6 : 2) = 3 : 12 : 10

5) 비례식간의 나눗셈 과정에서는 동일한 N번째 수에 대해 동일한 수로 한번씩 나눠주어 단순화가 가능하다.
예 : (2 : 4 : 5) ÷ (3 : 6 : 4) = (2 : 2 : 5) ÷ (3 : 3 : 4) = 8 : 8 : 15
- 물론 위와 같은 단순화는 익숙하지 않으면 계산 후 최종 계산 결과를 단순화하여도 상관없다.

6) 1:1에 대하여 어떠한 비례식을 나눈 것을 역수비라 표현하며 구성요소가 두 개일 경우 편의상 반대비라 칭한다.

7) 동일하다(등호)는 1:1로 변환이 가능하다.

8) $k_1a = k_2b$ 는 $(k_1 : k_2) \times (a : b) = 1 : 1$로 변환이 가능하고, $k_1a = k_2b = k_3c$ 는 $(k_1 : k_2 : k_3) \times (a : b : c) = 1 : 1 : 1$로 변환이 가능하다.

9) 서로 다른 비례식은 비례상수가 동일 하지 않으면 어떠한 값들의 비율을 바로 구하는 것이 불가능 하며 이러한 비례식들의 비례상수를 일치시키는 것을 비례식을 연결 한다 라고 표현한다. (본 교재 한정)

10) 비례상수를 일치시키기 위해서는 비례식에 각각 어떠한 상수를 곱하여 어떠한 조건을 만족하는 방향으로 식을 세워 곱해주어야 하는 상수의 비를 구하도록 한다.

11) 비율을 실제값으로 변환하기 위해서는 문제상에서 주어진 조건을 바탕으로 추론하며 주로 합차 또는 곱의 조건이 일반적으로 출제된다. 합차 조건의 경우 비례식 구성요소의 합차가 실제값과 몇 배 차이 나는지 구하여 해당 배수를 곱한다. 곱 조건의 경우 비례식 구성요소의 곱이 실제값과 몇 배 차이나는지 구한 뒤 n제곱근을 씌워 이를 곱한다.

12) 내분점과 외분점을 구할 때에는 값들을 n배 하면 합, 차도 n배가 뒤는 특성을 이용하여 구하도록 한다.

0단원 내용이 익숙하신가요, 아니면 낯설게 느껴지시나요? 과거에 제가 가르쳤던 수험생들도 항상 첫 시간에 비례식을 배울 때 갸우뚱하곤 했는데 아마 여러분도 비슷한 생각이실 것 같습니다. 하지만 비례식과 관련된 개념은 우리가 앞으로 배울 내용의 기반이 되므로 반드시 숙지해 주시기 바랍니다. 그래야 이후에 배우는 내용들을 더 쉽게 이해할 수 있습니다.

역학 기본 개념들은 이미 질리도록 학습하셨을 것입니다. 하지만 그 개념을 통해 도출되는 관계식과 풀이법은 기존에 알던 것과 조금 다를 것입니다. 우리는 앞으로 대부분의 문항들을 **비례식**을 이용해 풀어갈 것입니다! 처음에는 익숙하지 않더라도, 익숙해지면 상당히 신선한 풀이를 경험하실 수 있을 것이라 확신합니다. 너무 급하지 않게, 기존 풀이에 새로운 무기를 더한다는 느낌으로 학습해주시면 좋을 것 같습니다. 경우에 따라선 이걸 주 무기로 사용하시는 분들도 계시겠지만요!

본 교재는 비례식을 제외하고 총 세 가지 챕터로 구성되어 있습니다.

첫 번째 챕터에서는 기본 개념에서 도출되는 **비례 관계**들을 배우고 간단한 예제들을 통해 비례식의 계산을 문항에 천천히 적용해 볼 것입니다. 어쩌면 실력이 출중하신 분들이라면 첫 번째 챕터만 보고도 전반적인 풀이를 개선할 수 있을겁니다.

두 번째 챕터에서는 역학에서 자주 나오는 상황들에 대한 해석 방식과 관점을 다루어 여러분들이 문항을 보다 다양한 관점에서 볼 수 있도록 유도할 것입니다.

마지막 챕터에서는 기출 문항을 본 교재 내용을 바탕으로 새롭게 풀어보며 이론을 적용 할 것입니다. 아마 기출을 풀어보면서 기존 풀이와의 차이를 느끼는것도 꽤나 재미있을겁니다.

오랜만에 이렇게 교재를 작성하니 긴장이 되면서도 최대한 많은 내용을 담고자 고민하는 이 시간이 즐겁습니다. 본 교재를 통해 얼마나 많은 분들이 학습하실지는 모르겠으나 적어도 이 교재를 보시는 모든 분들은 이 내용들을 통해 만족하실만한 결과가 있으셨으면 좋겠습니다. 오류 제보 및 질문사항은 본 교재를 다운로드 하신 오르비, 포만한에서 댓글로 남겨주시면 답변드리도록 하겠습니다. 감사합니다.

역학과 비례식

CHAPTER

01

역학과 비례식

본 교재는 앞서 말했듯 기본적으로 물리학 I에 대해 전반적인 학습이 이루어진 사람을 대상으로 작성된 교재이므로 기본 개념들은 빠르게 다루고 넘어갈 것이다. 그래도 한번 읽어보면서 기본 개념들을 상기시키도록 하자. 개념 학습 과정에서는 앞서 언급한 비례식의 원리를 바탕으로 서술할 것이다.

(1) 이동 거리와 변위

물리에서 운동이란 시간이 지남에 따라 물체의 위치가 변하는 것을 의미한다. 이때 물체가 이동한 **경로의 길이**를 이동 거리, **최종적인 물체의 위치 변화량**을 변위라 한다. 이동 거리는 방향 없이 크기만 존재하나 변위는 크기와 방향 모두 존재한다.

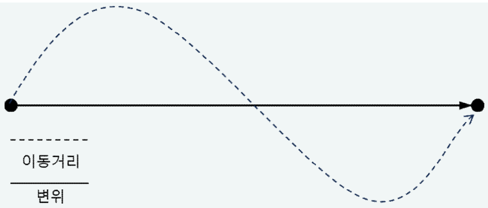


그림 1

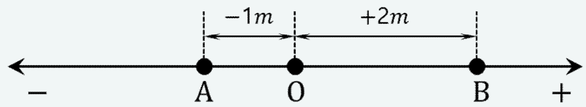


그림 2

그림 1처럼 물체가 점선(곡선)을 따라 이동하였다면 점선의 길이는 이동 거리, 실선의 길이는 변위의 크기를 나타낸다. 만약 점선이 아닌 실선을 따라 이동하였다면 이동 거리와 변위의 크기는 모두 실선의 길이로 동일하다. 따라서 물체는 직선운동을 하면 이동 거리와 변위의 크기가 동일하다.

그림 2는 두 물체 A, B가 시작점 O로부터 각각 왼쪽, 오른쪽으로 1m, 2m 이동한 모습을 나타낸 것이다. 이 때 B의 변위를 +2m이라 한다면 A의 변위는 −1m이라 할 수 있다. 이처럼 변위는 방향을 포함하는 물리량이기 때문에 변위에는 −가 붙는 것 또한 가능하다. 우리가 실질적으로 역학 문항을 푸는 과정에서 **최종적인 위치**에 대한 식을 세울 때에는 대부분 변위가 사용 된다.

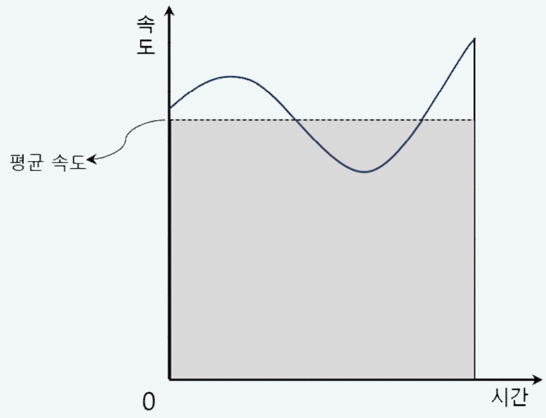
(2) 속력과 속도

단위 시간동안 물체의 이동 거리와 변위를 각각 속력, 속도라 부르며 보통 m/s의 단위를 사용한다. 속력은 단위 시간 동안의 이동거리이므로 음수가 될 수 없으나 속도는 변위이므로 음수가 될 수 있다. 이 때 속도의 부호는 운동 방향을 의미한다.

(3) 평균 속력과 평균 속도

어떤 물체가 오른쪽으로 10m 이동 후 왼쪽으로 5m 이동하기까지 총 5초가 걸렸다 하자. 5초 동안 물체의 이동 거리는 15m, 변위는 5m이다.(오른쪽을 +라 하였을 때) 이 때 이 물체의 평균 속력, 평균 속도는 이동거리와 변위를 5초로 나눠준 3m/s, 1m/s라 할 수 있다. 이처럼 우리는 어떠한 시간 범위에 대하여 이동 거리, 변위를 걸린 시간으로 나눠 구해준 평균값을 평균 속력, 평균 속도라 한다.

우리는 세 과목의 총 점수가 240점이면 평균은 80점, 대충 **과목당 80점씩 받았구나 라고** 표현하곤 한다. 마찬가지로 평균 속력, 평균 속도는 물체가 대충 해당 시간 범위에서 1초당(단위시간) 이만큼 이동했네, 이만큼 위치가 변했네 로 해석하여도 무관하다. 물론, 실제로 물체가 그렇게 운동을 한 것은 아니지만 결론적인 이동 거리(속력), 변위(속도)를 분석하는 과정에서는 이와 같이 해석하여도 무방하다.



(실선과 점선 아래의 면적은 동일.)

이동거리비 = 평균 속력비 × 걸린 시간비
변위비 = 평균 속도비 × 걸린 시간비

평균을 산출한 시간 범위에 대하여
평균 속력(속도)로 일정하게 운동하였다고 가정해도
이동거리, 변위 분석에는 문제가 없다.

이처럼 어떠한 시간 영역에 대하여 평균속력, 평균속도에 걸린 시간을 곱하면 각각 이동거리, 변위가 나오는데 이는 곱셈으로 이루어진 관계식이므로 비례식끼리도 성립한다.

예제

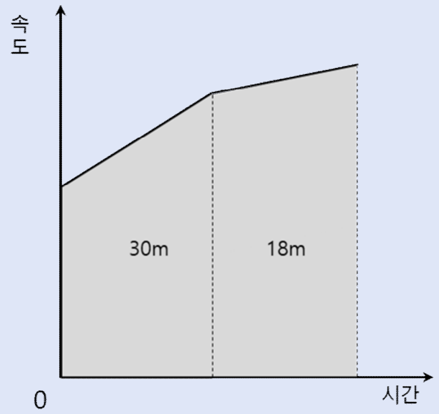
예제 1 : 두 물체 A, B의 평균 속력은 2:3, 걸린 시간은 3:5이다. 이동 거리의 비율은?
풀이 : 이동 거리는 평균 속력과 걸린 시간의 곱이므로 (2:3) × (3:5) = (6:15) = 2:5

예제 2 : 등속도 운동을 하는 두 물체 A, B가 동일한 거리를 이동하는데 걸린 시간이 2:3이다. 두 물체의 평균 속력의 비율은?
풀이 : 이동 거리가 1:1, 걸린 시간이 2:3이므로 평균 속력은 (1:1) ÷ (2:3) = 3:2

(3)-1 평균의 평균

어떤 반에서 남학생의 평균 점수는 70점, 여학생의 평균 점수는 80점이다. 그렇다면 이 반의 평균 점수는 75점인가? 아니다. 이 반의 평균 점수는 학생의 총 점수를 총 학생수로 나눠주어야 한다. 그렇다면 어떠한 물체의 두 영역에 대한 평균 속력이 각각 10m/s, 18m/s라면 두 영역을 합친 영역에서의 평균 속력은 어떻게 될까? 이 역시 마찬가지로 두 영역에 대한 전체 거리를 전체 시간으로 나눠주어야 한다. 그렇다면 한번 예시를 들어보도록 하겠다.

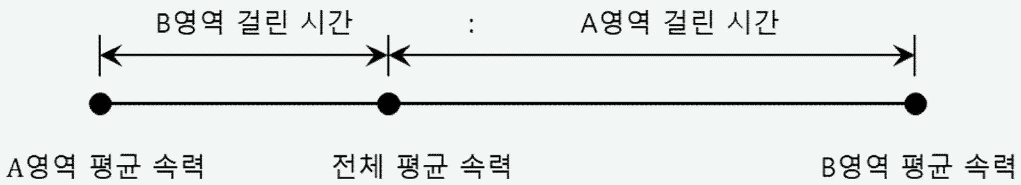
예제



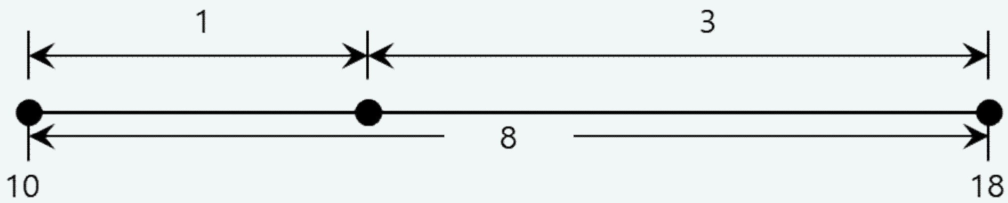
30m, 18m를 이동하는 동안의 평균 속력이 각각 10m/s, 18m/s 라면 전체 평균 속력은 어떻게 되겠는가?

위 문항을 못 푸는 사람은 없을 것이다. 걸린 시간이 각각 3초, 1초임을 계산 후에 48m를 4초로 나눠주면 그만이기 때문이다. 이처럼 두 개의 평균을 대상으로 평균을 구한다는 것은 어떤 의미인지 알아보도록 하자.

$$\text{평균 속력} = \frac{A\text{영역 평균속력} \times A\text{영역 걸린시간} + B\text{영역 평균속력} \times B\text{영역 걸린시간}}{A\text{영역 걸린시간} + B\text{영역 걸린시간}}$$



위 식을 자세히 보면 각 영역의 평균 속력을 **걸린 시간의 반대비의 내분점**을 의미함을 알 수 있다. 이와 같은 계산 방식은 농도가 다른 소금물 두 개를 섞었을때의 농도를 구하는것과 동일한 원리이다. (농도가 각각 10%, 16%인 소금물을 부피 1:2로 섞으면 10%와 16%의 2:1 내분점이 14%가 되는것과 동일)



그래서 필자의 경우에는 위와 같은 문항을 풀 때 거리비 5:3을 속력비 5:9로 나눠 시간비 3:1을 구한 뒤 10과 18에 대하여 3:1의 반대비 1:3 내분점인 12를 산출하는 방식으로 푸는 것을 선호한다. 그러나, 아마 많은이들은 내분점을 구하는 공식을 아마 많이 잊었을 수 있기에 필자는 아래와 같은 방식을 권장한다.

1과 3의 비례상수를 1로 맞춰주었을 때 이 둘의 합은 8이 되어야 한다. 1과 3의 합은 4이니 2배를 해주면 8이 될 것이다. 이는 2:6으로 내분점은 12가 된다. 필자는 내분점 공식보다는 위와 같이 계산하는 것을 선호한다.

위 방식은 **두**영역에 대한 평균을 낼 때의 이야기이다. 만약 세 영역이라면 두 영역을 평균내고, 이를 다시 나머지 영역과 평균을 내는 것으로 가능하나, 위와 같은 방식의 계산은 두 영역에 대해서만 사용할 것을 권장한다. 가속도 파트를 배운 뒤 관련 문항을 조금만 풀어보도록 하겠다.

(4) 가속도

단위 시간당 물체의 속도가 얼마나 변했는지를 나타내는 물리량으로 속도의 변화량을 걸린 시간으로 나눠 계산한다. 일반적으로 물체의 속도는 m/s를, 시간은 s단위를 사용하므로 가속도의 단위는 일반적으로 m/s^2이 사용된다. 가속도가 0이면 속력이 일정하고 이를 등속도 운동이라 부른다. 가속도가 일정한 운동을 등가속도 운동이라 한다.

$$\text{가속도} = \frac{\text{속도 변화량}}{\text{걸린 시간}} = \frac{\text{나중 속도} - \text{처음 속도}}{\text{걸린 시간}} \quad (\text{단위는 } m/s^2)$$

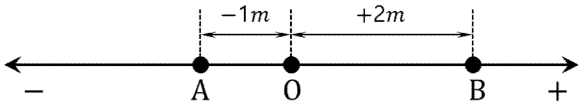
$$\text{가속도비} = \frac{\text{속도 변화비}}{\text{걸린 시간비}}$$

(5) 나중 속도

$$\text{나중속도} = \text{처음속도} + \text{가속도} \times \text{걸린시간} \quad v_2 = v_1 + at$$
$$(v_1 = 0\text{이면 } v_2\text{비} = a\text{비} \times t\text{비}),\ (v_2 = 0\text{이면 } v_1\text{비} = a\text{비} \times t\text{비})$$

가속도 공식은 위와 같이 정리할 수 있다. 나중속도의 비가 (처음속도의 비 + 가속도비*걸린시간비)가 아님에 유의한다. 두 비례식의 비례상수가 동일하다는 보장이 없기 때문이다. 단, v_1, v_2 중 하나가 0일 경우에는 위와 같은 비례식 사용이 가능하다. 0:0은 어느 상수를 곱하든 실제값이기 때문이다.(7페이지 참고) 위 비율관계를 이해하면 여러모로 용이하다. 정지된 두 물체가 t초 뒤 속력 비율이 곧 가속도 비율이 될것이며, t_1초, t_2초 뒤의 속력 비율을 알면 이 비율을 t_1:t_2 로 나눠 가속도 비율을 구하는 것이 가능하다.

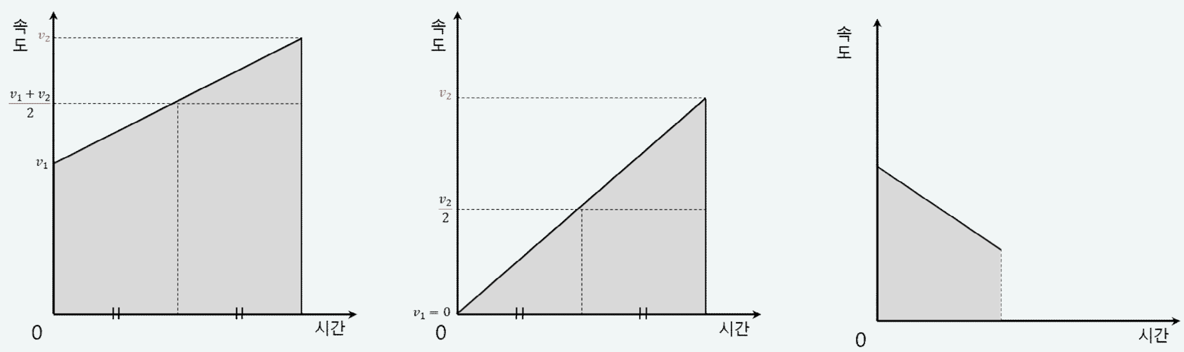
● 변위, 속도, 가속도의 방향, 부호



위 그림은 앞서 변위에 대하여 설명할 때 방향과 부호에 대하여 나타낸 그림이다. 변위, 속도, 가속도 이 셋은 모두 방향에 따른 부호가 모두 동일 하다. 위 그림은 오른쪽은 +, 왼쪽은 −로 정의하였으므로 물체가 오른쪽으로의 변위, 속도, 가속도의 부호는 모두 +로 정의된다. 우리가 속력이 증가하면 운동 방향과 가속도의 방향이 동일하다는 것은 부호가 동일하다는 의미이며 이는 $v_2 = v_1 + at$라는 식을 통해서도 알 수 있다. 그러나 필자는 식을 쓸 때 $v_2 = v_1 + at$로 딱 정하기보다는 가속도 방향을 본인이 있다면 a라는 미지수 자체를 양수라 생각한 뒤 $v_2 = v_1 - at$ 또는 $v_2 = v_1 + at$로 표현하여 식 자체에 대해 방향성을 눈에 보이게 하는 것을 선호하는 편이다. 물론 어느 방식을 사용하든 상관없다. $v_2 = v_1 + (-2) \times t$ 나 $v_2 = v_1 - 2 \times t$나 결론적으로는 같기 때문이다. 어느 방법을 택하든 그게 그거다! 하지만 개인적으론 식을 봤을 때 방향성이 직관적으로 보이는 것이 편하다고 느끼기 때문에 이와 같은 방법을 선호한다.

(6) 등가속도 운동과 평균 속도

우리는 어떠한 영역에 대하여 속도가 변하는 물체의 이동 거리, 시간 등을 용이하게 계산하기 위하여 평균 속도를 구하곤 한다. 아래는 등가속도 운동을 하는 물체의 v-t 그래프를 나타낸 것이다.



상황 1　　　상황 2　　　상황 3

물체가 등가속도 운동을 할 때 어떠한 영역에 대한 평균 속도는 처음 속도(v_1)와 나중 속도(v_2)의 평균으로 계산된다. 만약 처음 속도가 0이면 평균 속도는 나중 속도의 절반, 나중 속도가 0이면 평균 속도는 처음 속도의 절반이다. 또한 물체의 속도가 평균 속도와 동일한 **시점**은 **중간 시점**이다. **중간 지점**과 혼동하지 않도록 한다.

각 상황별 이동거리는 다음과 같이 계산이 가능하다.

상황 1 : $s = \dfrac{v_1 + v_1 + at}{2} t = v_1 t + \dfrac{1}{2} a t^2$

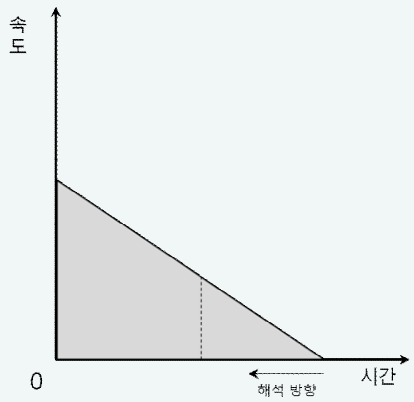
상황 2 : $s = \dfrac{v_1 + v_1 + at}{2} t = \dfrac{1}{2} a t^2$ (s비 $= a$비 $\times t^2$비)

상황 3 : $s = \dfrac{v_1 + v_1 - at}{2} t = v_1 t - \dfrac{1}{2} a t^2$

모든 등가속도 운동 영역에 대해서 우리는 평균 속도에 시간을 곱하면 물체의 위치 변화를 구할 수 있다. 이 때 상황 2처럼 처음 속도가 0일 경우 변위의 크기는 가속도와 시간의 제곱에 비례한다. 따라서 상황 2처럼 운동할 때 변위의 크기 비율은 가속도비율에 시간 제곱 비율을 곱하여 구하는 것이 가능하다.

(6)-1 기준점과 시간 해석 방향

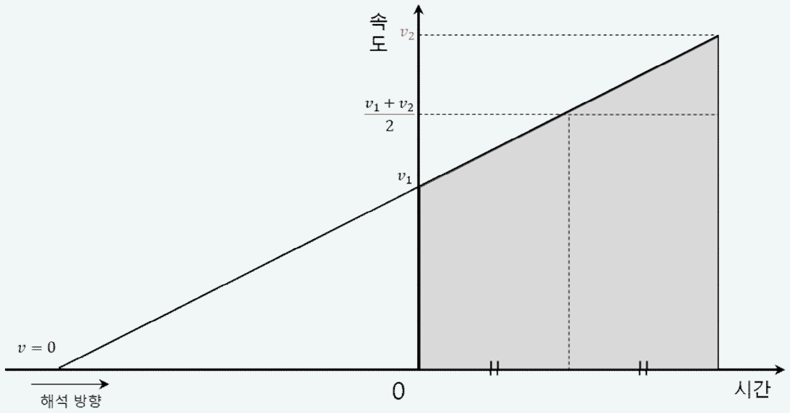
그러나 상황 1, 상황 3의 경우에는 단순히 식만 보았을 때에는 덧셈, 뺄셈 으로 인하여 비례 관계를 도출하기 쉽지 않다. 이 경우에는 그래프를 연장 시켜 비례 관계를 도출하는 것이 가능하다. 상황 3의 그래프를 연장 시킬 경우 다음과 같이 연장하는 것이 가능하다.



상황 3 : $s = \dfrac{v_1 + v_1 - at}{2} t = v_1 t - \dfrac{1}{2} a t^2$

위는 상황 3 그래프의 연장선 및 앞서 설명한 상황 3에서의 변위 s를 구하는 식이다. 여기서 포인트는 t의 기준점이 바로 원점이라는 것이다. 일반적으로, 우리는 그래프를 통해 s를 구할 때 t의 기준을 자연스레 원점을 기준으로 한다. 그러나 t의 기준을 어느시점으로 하는지는 우리의 자유이다. 예를 들어 t=0 ~ t=10초 동안의 이동거리를 계산하나, t=10초부터 역재생하여 t=0까지의 이동거리를 계산하나 그게 그것이지 않은가? 따라서 상황 3같은 경우에는 연장선에 존재하는 v=0인 지점을 기준으로 역방향으로 운동을 해석하여도 전혀 무방하다.

위 이론의 포인트는 우리가 **시간 t의 흐름에 따른 운동을 분석 할 때에는 t의 기준점을 우리가 마음대로 정해도 무관함을 의미한다.** 이 때 우리가 비례관계를 쉽게 유도 하기 위해서는 속력이 0인 어떠한 지점을 기준으로 운동을 해석하는 것이 좋다. 그러면 자연스레 등가속도 운동에 대하여 우리는 가속도 비율에 시간 제곱 비율을 곱하여 변위를 구할 수 있기 때문이다. 이는 상황 1에서도 적용이 가능하다.



$$\text{상황 1 : } s=\frac{v_1+v_1+at}{2}t=v_1t+\frac{1}{2}at^2$$

위 그림은 상황 1, 그리고 변위 s에 대한 식이다. 위 그래프 역시 일반적으로는 비례 관계를 유도하기가 어렵다. 허나, 이에 대한 연장선을 그어 속력이 0인 지점을 기준으로 운동을 해석한다면 마찬가지로 이동거리를 가속도와 시간제곱의 비율을 통해 계산하는 것이 가능하다. 이 때 v=0인 지점을 구하는 것은 경우에 따라 다르겠지만 일반적으로는 가속도와 어떠한 지점에서의 속도를 알면 v=0인 시점을 구하는 것이 가능하다.

간단한 예로, 위 상황처럼 어떠한 물체가 등가속도 운동을 하여 속력이 5m/s에서 20m/s로 증가하였다고 하자. 그렇다면 이 때 우리는 v=0인 포인트를 어떻게 잡으면 되겠는가? 5m/s보다 왼쪽 지점에 대하여 v=0 포인트를 잡고 $\triangle v=at$를 이용하면 된다.

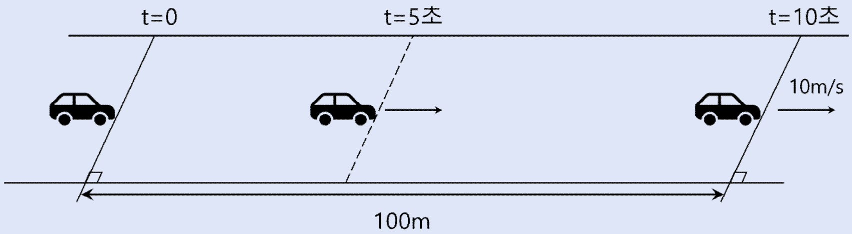
속력이 0인 지점을 잡았다면, 해당 시점을 기준으로 속력 변화가 1:4이니 t, 4t라고 둘 수 있으며 이동 거리는 s, 16s라고 잡을 수 있다. 물론 비례식을 쓰지 않아도 된다. 경우에 따라 위와 같은 풀이가 식을 썼을 때 더 복잡하게 되는 경우도 있다. 그러나 괜찮다. 어차피 비례식은 하나의 주력 무기일 뿐 이러한 비례 관계를 이용했을 때 더 복잡할것같으면 그래프 개형 또는 정량적 계산을 통해 풀어도 무방하니 말이다.

간단하게 비례 관계를 적용하여 몇 가지 문제를 풀어보며 비례관계를 연습해보도록 하자.

예제

20150902

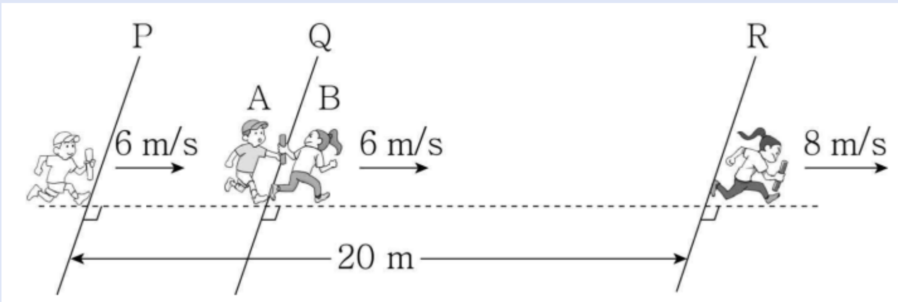
그림과 같이 직선 도로에서 t=0일 때 기준선 P에 정지해 있던 자동차가 출발하여 t=10초일 때 기준선 Q를 속력 10m/s로 통과한다. 자동차는 t=0부터 t=5초까지, t=5초부터 t=10초까지 각각 등가속도 운동을 한다. P에서 Q까지의 거리는 100m이다. t=5초일 때, 자동차의 속력은? (단, 자동차는 도로와 평행한 직선 경로를 따라 운동한다.)



예제

20181003

그림은 학생 A, B가 동일한 직선상에서 이어달리기를 하는 모습을 나타낸 것이다. 기준선 P를 속력 6m/s로 통과하여 등속도 운동하는 A가 기준선 Q에서 B에게 바통을 넘겨주면, B는 Q부터 기준선 R까지 등가속도 운동한다. Q, R에서 B의 속력은 각각 6m/s, 8m/s이다. A가 P를 통과할 때부터 B가 R를 통과할 때까지 걸린 시간은 3초이고 P와 R 사이의 거리는 20 m이다.

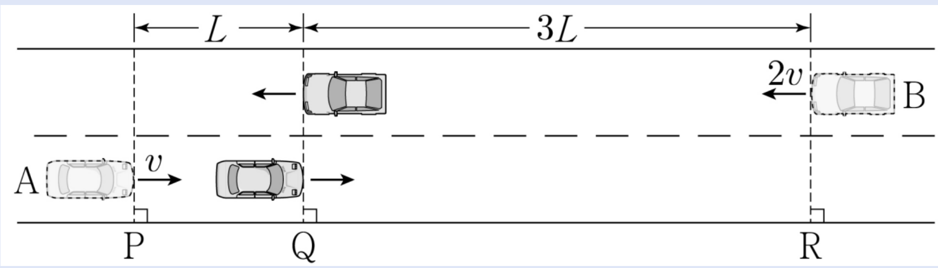


Q와 R사이의 거리는? (단, A, B의 크기는 무시한다.)

예제

20210612

그림과 같이 등가속도 직선 운동을 하는 자동차 A, B가 기준선 P, R을 각각 v, 2v의 속력으로 동시에 지난 후, 기준선 Q를 동시에 지난다. Q를 동시에 지날 때 A, B의 이동 거리는 각각 L, 3L이고 A, B의 가속도의 크기와 방향은 서로 같다. A가 기준선 Q를 지날 때의 속력은?



풀이

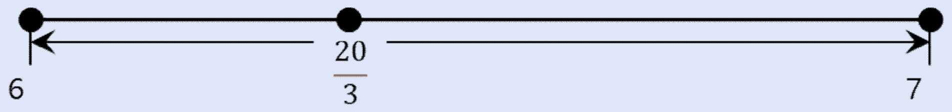
20150902

t=5초 전후 구간에 대하여 시간 비율은 1:1이다, 총 100m를 이동하는 데에 걸린 시간이 10초이므로 전체 평균 속력은 10m/s이다. 이는 t=5초 전후 구간에 대한 평균을 다시 평균 냈을 때 10m/s가 나온다는 의미이다. 양 구간의 시간 비율이 1:1이니 양 구간의 평균 속력의 중간값이 10m/s임을 의미한다. t=5초일 때의 속력을 v라고 하면 $(\frac{0+v}{2}+\frac{v+10}{2})=20$(평균 공식에서 양변에 2를 곱한식) 이를 풀면 $v=15$로 t=5초에서의 속력은 15m/s이다.

풀이

20181003

구간 PQ와 QR에서의 평균 속력은 6m/s, 7m/s이다. 총 걸린 시간은 3초이므로 전체 평균 속력을 계산해보면 $\frac{20}{3}m/s$ 이다.



각 구간의 평균속력을 평균 냈더니 이는 1:2 내분점이며 이는 시간비율이 2:1임을 의미한다. 따라서 구간 QR의 거리는 2초간 운동하였으므로 14m이다.

풀이

20210612

A의 나중 속력을 $v+k$라 하자. B의 나중속력은 가속도의 방향과 크기가 A와 동일하므로 $2v-k$라고 할 수 있다. 동일한 시간동안의 A, B의 이동거리가 1:3이므로 처음속력과 나중속력의 합 역시 1:3이다. 따라서 $(v+v+k):(2v+2v-k)=1:3$, $4v-k=6v+3k$, $4k=-2v$, $k=-0.5v$

Q에서 A의 속력은 $v+k$이므로 $0.5v$이다.

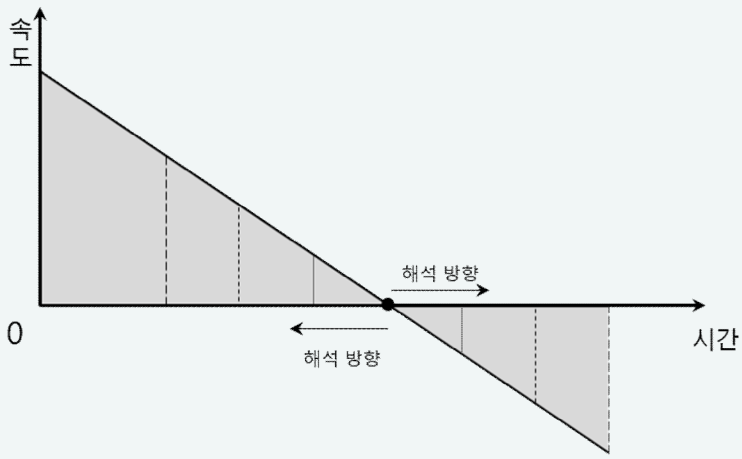
이 때, 검산을 해주면 처음속력, 나중속력의 합은 A, B가 1.5:4.5=1:3이므로 이는 문항 조건에서의 이동거리비와 동일하다.

아직은 익숙하지 않을 것인데 당연하다. 점점 더 많은 개념을 다루고 많은 예제를 풀면 차근차근 익숙해질것이니 참고 따라와주기를 바란다.

(7) 등가속도 운동의 대칭성

등가속도 운동은 여러 가지 상황이 존재한다. 빗면에 가만히 둔 운동, 일정한 힘을 가하는 운동, 위로 던진 자유 낙하 운동 등이 있다. 이처럼 등가속도 운동 과정에서 속력이 0인 지점이 존재할 경우에는 속력이 0인 지점을 기준으로 해석하면 이점이 굉장히 많다.

상황 3



상황 3의 연장선

앞서 설명한 상황 3의 연장선은 우측 그림과 같다. 위 그래프는 속도-시간 그래프이니 면적의 크기는 이동거리를, x축을 기준으로 위아래의 넓이는 서로 다른 부호의 의미를 가지게 될 것이다. 또한 위 그래프는 v=0인 지점을 기준으로 점대칭을 이루게 되며 이는 다음을 의미한다.

- 속력이 0인 시점을 기준으로 t초 전과 후는 위치 및 속력이 모두 동일하며 방향이 반대이다.
- 가속도가 동일한 영역에 대하여 속력이 동일할 경우 위치 또한 동일하다.
- 속력이 0인 시점을 기준으로 이동거리는 해당 시점으로부터 해석하였을 때 가속도와 시간 제곱에 비례한다.

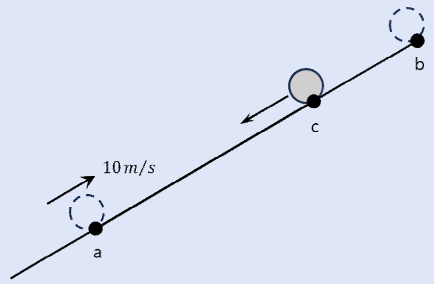
쉽게 말해 속력 v로 지나간 곳은 속력 v로 되돌아 오며 속력이 동일하면 위치 또한 동일한 마치 데칼코마니와 같은 모습을 보여준다. 이러한 이유로 우리는 여러 운동 상황들에 대하여 v=0인 지점을 잡으면 비례 관계를 이용하여 문항을 풀기 굉장히 용이하다.

이와 같은 대칭성과 관련된 문항을 몇 개 보도록 하겠다.

예제

20140919(수정)

그림은 물체가 마찰이 없는 빗면의 점 a를 지나 점 c를 통과하여 최고점 b에 도달한 후, 다시 c를 지나는 순간의 모습을 나타낸 것이다. 물체가 a에서 c까지 올라가는데 걸린 시간은 c에서 b까지 올라가는데 걸린 시간의 3배이다.



물음에 답하시오. (단, 물체의 크기와 공기저항은 무시한다.)

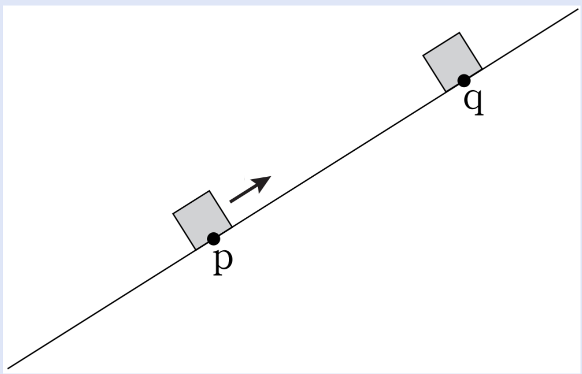
1) c에서의 속력은 몇인가?

2) a와 c 사이의 거리는 b와 c사이 거리의 몇배인가?

예제

20141118(수정)

그림은 빗면을 따라 올라가는 물체가 점 p를 지나가는 순간을 나타낸 것이다. 물체가 점 p, q를 올라가는 순간의 속력은 3:1이다.



물음에 답하시오. (단, 물체의 크기와 공기저항은 무시한다.)

1) 물체가 최고점 O에 도달한 후 점 q, p에 도달하기까지 걸리는 시간은 몇 대 몇인가?

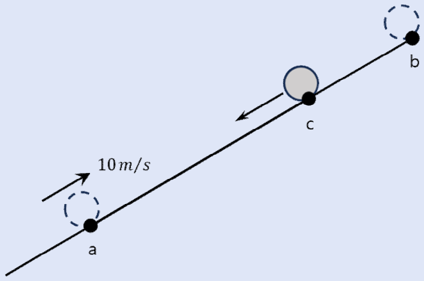
2) 최고점 O에서 q, q에서 p까지의 거리는 몇 대 몇인가?

3) p를 지나 p로 돌아오기까지 걸린 시간이 9초일 경우 최고점 O에서 q까지 걸리는 시간은?

풀이

20140919(수정)

이처럼 물체의 속력이 0인 지점이 존재한다면 이를 기준으로 비례 관계를 이용함과 동시에 대칭성을 이용하는 것이 용이합니다. 점 a를 10m/s로 지났다면 내려올 때에도 10m/s 지나가듯 동일 위치에선 동일 속력, 반대 방향임을 명심해두도록 합니다.



위 상황은 점 b에서 최고점이므로 b를 기준으로 해석하면 비례 관계를 쓸 수 있습니다. 문항 조건에서 구간 bc, ac에서 걸린 시간이 1:3이라고 나와있습니다.

1) c에서의 속력은 몇인가?

점 b로부터 c, a까지 걸린 시간비는 1:4이며 초기 속력이 0이므로 b, c에서의 속력은 걸린 시간에 비례합니다. 따라서 속력 역시 1:4이며 a에서 10m/s이므로 c에서 2.5m/s입니다.

2) a와 c 사이의 거리는 b와 c사이 거리의 몇배인가?

점 b로부터 a, c까지 걸린 시간은 1:4이므로 이동 거리는 1:16입니다. 따라서 ac사이 거리는 bc사이 거리의 15배임을 알 수 있습니다.

풀이

20141118(수정)

p와 q에서의 속력이 3:1이라는 조건이 나와있습니다. 이는 최고점 O로부터 q, p까지 걸리는 시간이 1:3임을 의미하며 거리는 1:9임을 알 수 있습니다.

1) 물체가 최고점 O에 도달한 후 점 q, p에 도달하기까지 걸리는 시간은 몇 대 몇인가?

q, p에서의 속력이 1:3이므로 걸린 시간 역시 1:3입니다.

2) 최고점 O에서 q, q에서 p까지의 거리는 몇 대 몇인가?

최고점 O로부터 q, p까지의 거리는 시간비가 1:3이므로 1:9입니다. 따라서 O에서 q, q에서 p까지의 거리는 1:8임을 알 수 있습니다.

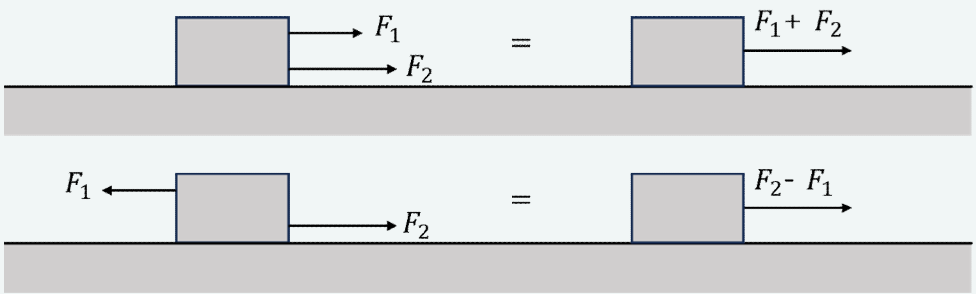
3) p를 지나 p로 돌아오기까지 걸린 시간이 9초일 경우 최고점 O에서 q까지 걸리는 시간은?

최고점 O로부터 q, p까지 걸린 시간은 1:3입니다. p를 지나 p로 돌아오기 까지 걸린 시간은 O에서 p까지 걸린 시간의 2배(대칭성)이므로 1:3이라 함은 각각 1.5초, 4.5초를 의미합니다.
따라서 O에서 q까지 걸리는 시간은 1.5초입니다.

아직까지 우리가 배운 내용이 $s = vt$, $\triangle v = at$ 정도 뿐인지라 많이 어렵지는 않을 것이다. 이제 가속도 a에 영향을 주는 질량과 힘, 이들에 대한 연관성에 대해 배워보도록 하자.

(8) 힘

힘이란 물체의 형태, 운동상태를 변화시키는 어떠한 요인으로 1kg의 물체를 $1m/s^2$으로 가속시키는데 필요한 힘의 크기를 1N(뉴턴)이라 한다. 이 때 물체에 작용하는 힘이 여러개일 때 이를 합쳐 하나의 힘으로 나타낼 수 있는데 이를 **물체에 작용하는 알짜힘** 이라 한다.



같은 방향의 힘과 반대 방향의 힘의 합력

힘과 힘을 더할 때 두 힘의 방향이 동일하면 이를 더하고, 반대 방향이면 빼서 하나의 힘으로 표현이 가능하다.

어떠한 물체에 작용하는 힘을 구하고자 할 때에는 해당 물체**만** 잘라서 보면 해석하기 편할 것이다. 보통 물리를 처음 할 때 어떠한 물체에 작용하는 힘들을 분석하는 과정에서 많이들 헷갈려하는 경우가 많은데 당황하지 말고 그 물체**만** 바라보는 것이 해석에 용이하다. 자세한건 후술토록 하겠다.

(9) 뉴턴 운동 제 2법칙(가속도 법칙)

물체에 힘을 주면 힘의 방향으로 가속 운동을 하며 이 때의 가속도는 힘의 크기에 비례하고 질량에 반비례 한다. 힘이 2배, 3배, 4배가 되면 가속도는 2배, 3배, 4배가 되고 질량이 2배, 3배, 4배가 되면 가속도는 1/2배, 1/3배, 1/4배가 된다.

$$F = ma$$

F는 물체에 작용하는 알짜힘을 의미하며 F와 a의 방향은 동일하다. 이 때 이 둘의 방향성(부호)를 제외한다면 아래와 같은 비율 관계를 도출하는 것이 가능하다.

$$\text{알짜힘의 크기 비율} = \text{질량비율} * \text{가속도의 크기 비율}$$

예 : 질량이 2:3인 물체에 대해 작용하는 알짜힘의 크기가 1:3이라면 가속도는 몇 대 몇인가?

$$\frac{1:3}{2:3} = \frac{1}{2} : 1 = 1:2$$

예 : 질량이 3:5인 두 물체의 가속도가 4:5라면 두 물체에 작용하는 알짜힘의 크기는 몇 대 몇인가?

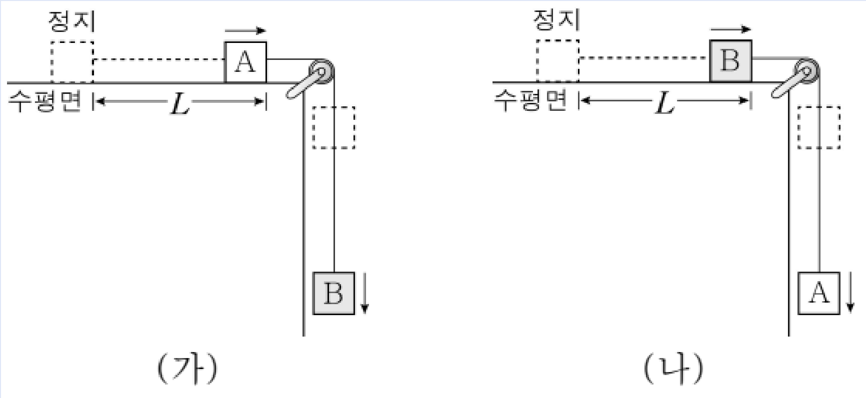
$$(3:5) \times (4:5) = 12:25$$

가속도 법칙까지 배웠으니 간단한 예제와 함께 비례식을 이용한 계산을 해보도록 하자.

예제

20200304

그림 (가), (나)는 물체 A, B를 실로 연결한 후 가만히 놓았을 때 A, B가 L만큼 이동한 순간의 모습을 나타낸 것이다. (가), (나)에서 A, B가 L만큼 운동하는 데 걸린 시간은 각각 t_1, t_2이다. 질량은 B가 A의 4배이다.



t_1 : t_2 는? (단, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

어렵지 않은 문제다. 그래도 비례식으로 차근차근 풀어보도록 하자.

풀이

동일한 거리 1:1을 이동하는데 걸린 시간비가 t_1 : t_2이므로 평균 속력비 = $\frac{1:1}{t_1:t_2}$

초기 속력이 0일 때 평균 속력은 나중속력의 절반이므로 평균 속력비는 곧 나중 속력비이다.

따라서 나중 속력비 = $\frac{1:1}{t_1:t_2}$

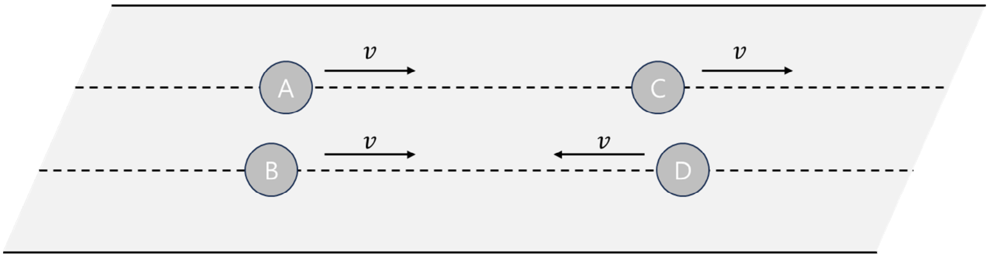
이 때 나중속력비는 가속도와 시간의 곱에 비례하므로 $가속도비 \times (t_1 : t_2) = \frac{1}{t_1 : t_2}$

가속도는 전체 알짜힘에 비례하고 전체 질량에 반비례 하므로

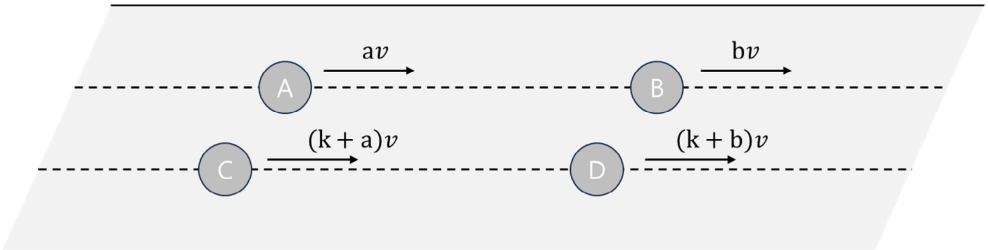
$$\frac{m_b : m_a}{1:1} \times (t_1 : t_2) = (4:1) \times (t_1 : t_2) = \frac{1}{t_1 : t_2},\ \ (t_1 : t_2)^2 = 1:4,\ \ t_1 : t_2 = 1:2$$

위 문항 풀이 과정을 보면 알겠지만 각 요소들에 무엇에 비례하는지를 알면 계산 과정에서 비율을 묶어서 계산하기 때문에 굉장히 쾌적하다. 앞으로도 이런 관계를 계속 유도해가며 비례식을 적재적소에 사용할 것이다.

(9)-1 상대속도



위 그림은 속력 v로 등속도 운동을 하고있는 물체들을 나타낸 것이다. A가 B를 바라봤을 때는 아마 정지한것처럼 보일것이며, C가 D를 바라봤을 때는 속력 $2v$로 운동하는 것으로 보일 것이다. 이처럼 물체의 속력은 관찰자의 운동 상태에 따라 방향, 크기가 다르게 보일 것이다. 이처럼 어떠한 관찰자의 입장에서 보이는 어떠한 대상의 속도를 우리는 상대속도 라고 부른다. 이 때 위처럼 평행한 방향으로 운동하는 물체에 대하여 상대속도를 구할 때에는 두 물체의 속도를 빼서 구하게 되는데 이 경우 생각보다 많은 사람들이 부호, 방향 등에 혼란을 겪어 제대로 사용하지 못하는 경우가 많다. 이 상대속도에 대하여 조금 자세히 알아보도록 하자.



(편의상 a<b라 가정하겠다.)

그림은 평행한 방향으로 운동하는 A~D를 나타낸 것이다. A 입장에서 B의 속력은 아마 $(b-a)v$로 느껴질 것이다. C, D는 각각 A, B의 속도에서 kv를 각각 더해준 것이다. C 입장에선 D의 속력이 마찬가지로 $(b-a)v$로 느껴질 것이다. 이 말이 무엇을 의미하느냐 하면 각 물체의 속도에 **동일한 속도**를 더해줄 경우 어떠한 관찰자의 시점에서 다른 물체를 보았을 때 느껴지는 속도는 **변하지 않음**을 의미한다. 우리가 익히 알고있는 상대속도는 일반적으로 A의 속도에서 B의 속도를 빼준다 로 배우지만 이를 다르게 표현하면 A, B에 대하여 B의 속도를 동일하게 가감하여 B의 속도를 0으로 만든다와 동일한 의미이다. 본 문서에서는 상대 속도와 관련된 개념을 아래와 같이 서술하겠다.

각 물체들의 속도에 대하여 동일한 속도를 가감하여도 각 물체들의 입장에서 느껴지는 상대방의 속도는 변하지 않는다.

그렇다면 이러한 상대속도가 중요한 이유는 무엇인가? 초등학생시절 풀어봤을법한 간단한 예제를 주도록 하겠다.

예제

운동회에서 철수는 영희보다 100m 앞질러있으며, 철수와 영희는 각각 10m/s, 15m/s로 등속도 운동을 하고 있다. 영희가 철수를 앞지르는데 걸리는 시간은 무엇인가?

풀이?

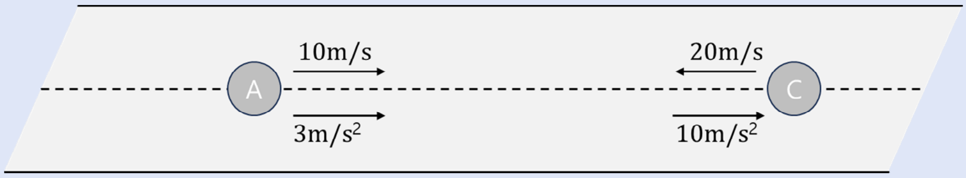
걸리는 시간을 t초라 하면 철수의 이동거리는 10t m, 영희의 이동거리는 15t m 로 영희가 철수를 앞지르기 위해서는 철수보다 100m를 더 이동해야한다. 따라서 10t + 100 = 15t
(15-10)t = 100, t=20 으로 20초가 걸린다.

아마 위 문항을 풀지 못하는 사람은 없을 것이다. (없어야 한다) 아마 초등학생 때 위 문항을 푼 사람들 중에서는

본인도 모르게 사이 거리를 속력의 차로 나눠 바로 20m를 구한적이 있을 것이다. 상대속도는 이와 같이 물체와 물체 사이 간격을 분석할 때 용이하다. 그러나, 우리가 초등학생 때 잘만 사용하던 상대속도를 물리에서는 잘 활용하지 못하는 이유가 무엇인가? 바로 가속도, 그리고 방향 때문이다.

단순히 등속도 운동을 한다면 속력을 보고, 방향을 체크하여 더할지, 빼줄지만 체크하면 되는데 이러한 사고 과정과는 달리 물리에서는 운동 방향이 변하기에 방향을 체크한다는 사고를 적용하기 애매모호하게 느껴지기 때문이다. (직관성이 떨어져서) 앞으로는 위와 같은 상대속도 개념을 적용할 때 아래와 같은 과정을 거친다면 누구나 쉽게 사용 가능할 것이다. 간단한 예제와 함께 문항을 풀어보도록 하자.

예제



그림은 t=0 때 두 물체 A, C의 운동 속력과 방향, 가속도의 크기와 방향을 나타낸 것이다. t=0 때 두 물체 사이의 거리는 50m이다. 두 물체는 언제 충돌하는가? (단, 물체의 크기는 무시한다)

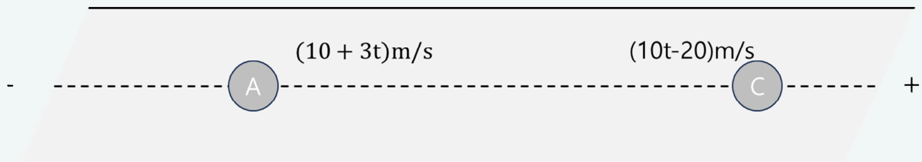
상대속도는 모든 물체에 대한 속도의 가감을 동시에 진행해주는 것이다. 아래와 같이 단계를 밟도록 하자.

상대 속도의 적용 과정.

1) 방향에 따른 부호 설정

좌와 우, 위와 아래에 대한 부호를 설정하도록 한다. 필자의 경우 평면에서는 우측을 +, 좌측을 −로 두는 것을 선호한다.

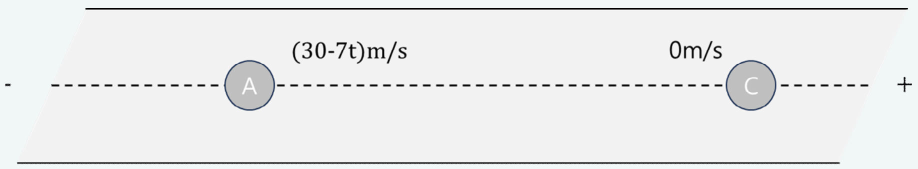
2) 속도와 가속도의 설정

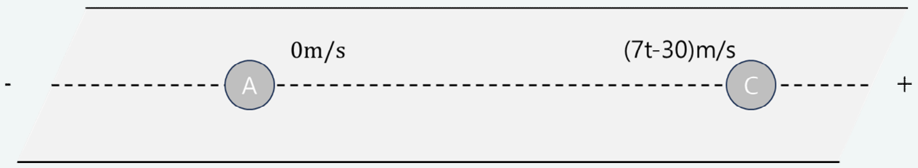


우리는 이미 오른쪽을 +, 왼쪽을 −로 두었으며 이에 따라 속도를 표기한다면 더 이상 물체에 화살표로 표기를 하지 않아도 무관하다.

앞서 말했듯, 우리가 일반적으로 상대 속도를 적용하는 과정에서 거부감, 또는 직관성의 부족으로 인해 적용하지 못하는 이유는 가속도 때문이다. 따라서 위와 같이 방향에 따른 부호를 정하고 이에 따른 속도를 정확히 표기만 하여도 상대속도를 훨씬 사용하기 수월해진다.

3) 가감하여 한쪽을 0으로 고정





양쪽 물체에 동일한 속도를 더하여 한쪽을 0으로 고정시키도록 한다. 위 그림은 가감하여 A와 C를 각각 0으로 맞춰준 모습을 나타낸 것이다.

4) 정지된 물체에 대하여 다른 물체의 변위 계산

C를 정지 상태로 만들었다면 A의 변위가 오른쪽(+)으로 50m가 나와야 하므로 $\frac{30+30-7t}{2}t=+50$ 라는 식이 나와야 한다.

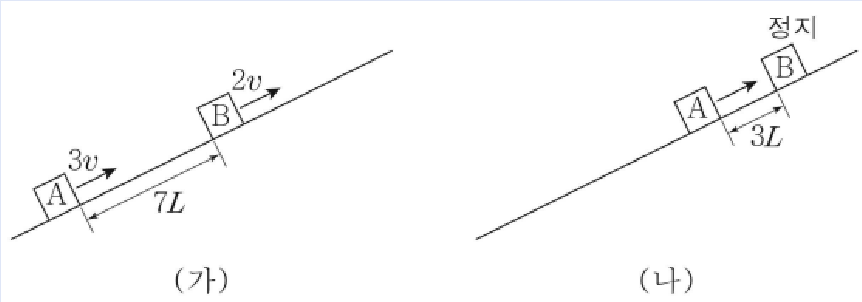
반대로 A를 정지 상태로 만들었다면 C의 변위가 왼쪽(-)으로 50m가 나와야 하므로 $\frac{-30-30+7t}{2}t=-50$ 라는 식이 나와야 한다. 이 둘은 완벽하게 부호만 바뀐 식임을 알 수 있다.

계산을 한번 해보면 $7t^2-60t+100=(7t-25)(t-5)=0$, $t=\frac{25}{7}, t=5$ 따라서 두 물체는 $\frac{25}{7}$초 때 충돌함을 알 수 있다. 근이 2개가 나오는데, 두 물체가 동일한 직선이 아닌 평행한 서로 다른 직선을 운동한다면 저 두 시점 때 두 물체는 스쳐지나가게 될 것이다.

이러한 상대 속도는 동일한 가속도를 가지는 구간에 대해서, 특히나 동일한 빗면에 대해 운동을 하는 경우 많이 유용하다. 이러한 이유로 보통 **동일 빗면이면 상대속도가 일정하다** 정도만 암기를 하는 경우도 많지만, 위와 같은 방식으로 접근한다면 헷갈리지 않고 더욱 폭넓게 활용 가능하니 염두해두도록 하자. 이와 관련된 문항을 몇 개 풀어보도록 하겠다.

예제

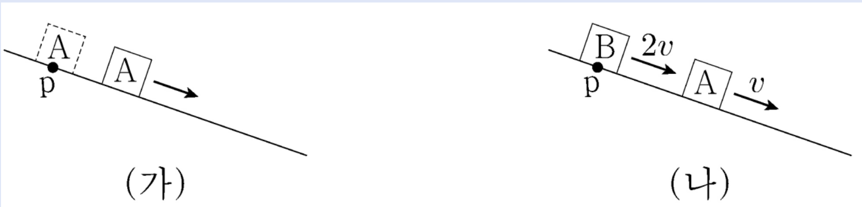
20240517
그림 (가)는 마찰이 없는 빗면에서 등가속도 직선 운동하는 물체 A, B의 속력이 각각 3v, 2v일 때 A와 B 사이의 거리가 7L인 순간을, (나)는 B가 최고점에 도달한 순간 A와 B 사이의 거리가 3L인 것을 나타낸 것이다. 이후 A와 B는 A의 속력이 v_A일 때 만난다.



v_A는? (단, 물체의 크기는 무시한다.

예제

20221114
그림 (가)는 빗면의 점 p에 가만히 놓은 물체 A가 등가속도 운동하는 것을, (나)는 (가)에서 A의 속력이 v가 되는 순간, 빗면을 내려오던 물체 B가 p를 속력 2v로 지나는 것을 나타낸 것이다. 이후 A, B는 각각 속력 v_A, v_B로 만난다.



$\frac{v_B}{v_A}$는? (단, 물체의 크기, 모든 마찰은 무시한다.)

풀이

20240517
윗방향을 +로 두고, 가속도의 크기를 a라고 한다면 각 물체의 속도는 아래와 같다.

$$A: 3v - at, B: 2v - at$$

이를 각각 가감하여 B를 정지상태로 만들면 다음과 같다.

$$A: v,\ \ B: 0$$

따라서, (가)로부터 시간 t가 지난 후의 모습이 (나)라면 가까워진 거리가 4L이므로 $vt = 4L$이다. 시간 t 동안 속력이 2v가 변하였으므로 A의 속력은 v가 된다.

(나)로부터 시간 T 뒤에 충돌한다면 $vT = 3L$이므로 $T = \frac{3}{4}t$이다.

시간 t 동안 속력이 2v가 변하였으므로 시간 T 동안에는 $\frac{6}{4}v$가 변하게 된다.

따라서 충돌할 때 A의 속력은 v에서 1.5v를 빼줘야 하므로 빗면 아랫 방향으로 0.5v이다.

풀이

20221114

(나)가 A가 출발한지 t_0후의 모습이라 해보자. 빗면에서의 가속도를 a라 한다면 (나)시점으로부터 시간 t 이후의 A, B의 속도는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$A : v + at \quad B = 2v + at \quad (at_0 = v)$$

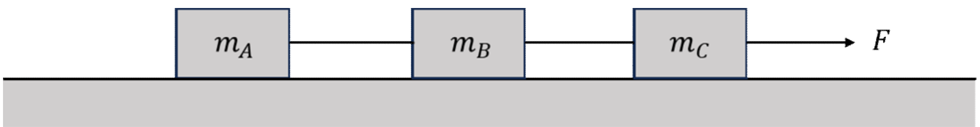
두 물체의 속도에 동일한 값을 가감하여 A의 속도를 0으로 만들면 A, B의 속도는 각각 0, v이다. (나) 이후로 시간 t 이후 충돌하기 위해서는 B가 속력 v로 A, B 사이 거리만큼 이동해야한다.(상대 속도 시점으로 보았을 때)

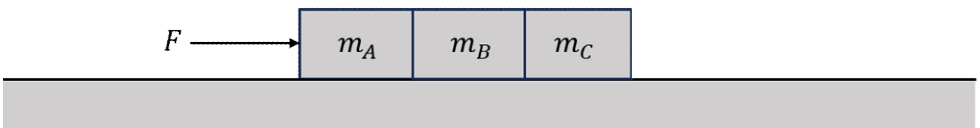
이 거리는 A가 시간 t_0동안 이동한 거리이므로 A의 평균 속력 0.5v 조건을 이용하면 $0.5vt_0$이다. 따라서 정지한 A에 대해 B가 이동한 거리 $vt = 0.5vt_0$기 위해서 $2t = t_0$여야 한다.

시간 t_0 동안 A의 속력이 v 증가하였으므로 (나) 이후 $t = \frac{1}{2}t_0$동안에는 A, B의 속력은 $0.5v$씩 증가 해야한다. 따라서 $v_A = v + 0.5v, v_B = 2v + 0.5v$로 $\frac{v_B}{v_A} = \frac{2.5}{1.5} = \frac{5}{3}$이다.

일부러 상대 속도를 일치 시키는 과정까지 서술하였으나, 동일 빗면이면 아마 상대속도가 금방 눈에 들어올 것이다. 물론, 상대 속도를 사용 가능한 상황은 빗면과 같이 가속도가 동일한 상황 외에도 여러 가지 상황이 있을 수 있다. 따라서, 단순히 빗면에선 상대속도가 일정하다 라는 조건을 알아두는 것 역시 유용하나, 폭넓게 사용 가능하도록 상대속도 식을 서술하는 과정을 정석적인 방법으로도 이해해두길 바란다.

(9)-2 알짜힘의 분산





위와 같이 연결된 물체, 또는 결합된 물체에 대하여 힘 F를 가할 때 물체가 받는 알짜힘은 어떻게 될까? 전체 알짜힘이 F이므로 전체 물체의 가속도의 크기는 $\frac{F}{m_A + m_B + m_C}$일것이며 $F = ma$로 인하여 각 물체가 받는 알짜힘의 크기는 각각의 질량을 곱해준 $\frac{F}{m_A + m_B + m_C}m_A, \frac{F}{m_A + m_B + m_C}m_B, \frac{F}{m_A + m_B + m_C}m_C$ 이다. 이 셋을 더하면 F가 된다. 이를 다르게 표현하면 아래와 같다.

연결된 물체(동일한 가속도를 공유하는)에 작용하는 알짜힘은 각 물체들에 대하여 **질량 비율로 분산된다.**

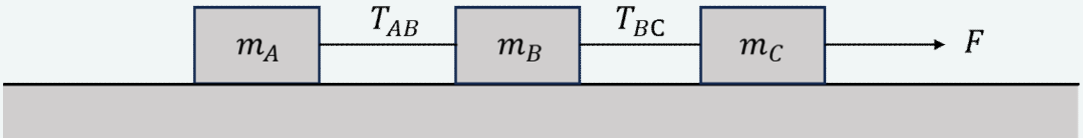
전체 알짜힘이 F일 때 질량이 m_A인 물체가 받는 알짜힘 $F_A = \frac{m_A}{\triangle m}F$

따라서 어떠한 물체가 받는 알짜힘은 **전체 알짜힘과 해당 물체의 질량에 비례, 전체 질량에 반비례 한다.**

예를 들어 질량이 2kg, 3kg, 5kg로 연결된 물체에 대하여 전체 알짜힘 20N이 작용한다면 질량 비율 2:3:5로 각각 4N, 6N, 10N으로 분산됨을 의미한다.

(9)-3 물체의 단일화

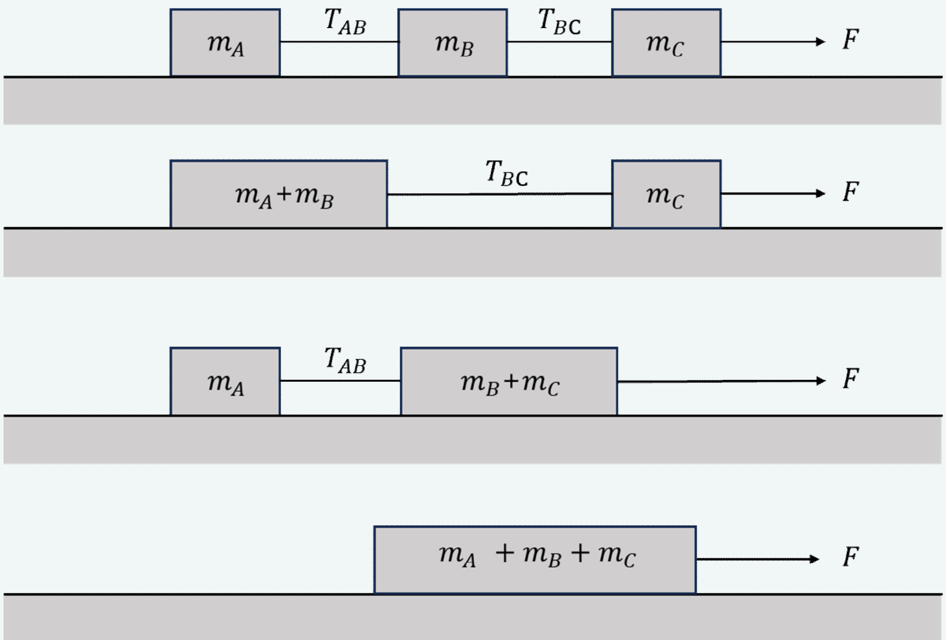
위 논리를 바탕으로 장력을 구해보면 아래와 같다.



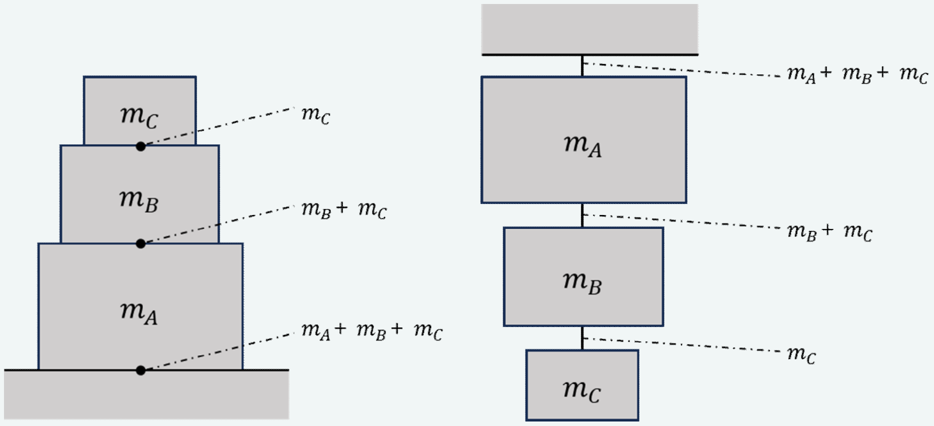
T_{AB}는 m_A가 받는 알짜힘이므로 $T_{AB} = \frac{m_A}{\triangle m}F$

m_B가 받는 알짜힘 $\frac{m_B}{\triangle m}F = T_{BC} - T_{AB}$, $T_{BC} = T_{AB} + \frac{m_B}{\triangle m}F = \frac{m_A + m_B}{\triangle m}F$

여기서 구한 T_{BC}의 식 모양을 보았을 때 어떻게 보면 질량이 $m_A + m_B$인 물체에 작용하는 알짜힘과 동일하게 보인다. 이 말은, **알짜힘을 분석하는 과정에서 연결된 물체를 합쳐도 무방함**을 의미한다. 이를 그림으로 표현하면 다음과 같다.



이러한 단일화는 연결하는 물체가 아닌, 정지된 물체에도 동일하게 적용이 가능하다. 예를 들면 수평면에 놓인, 실에 매달려있는 물체들에 대해서도 적용이 가능하다.



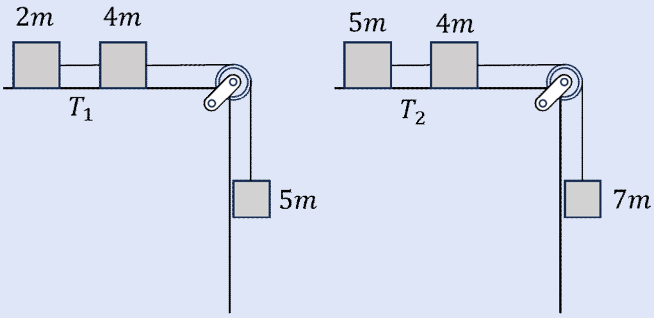
각 지점, 줄에서 작용하는 중력과 장력 (g 생략)

그림은 지점별 수직항력, 또는 장력을 표현한 것이다. 이처럼 어떠한 두 물체 사이에 상호작용하는 힘을 생략하고 이를 하나의 물체로 합쳐서 해석하여도 작용하는 알짜힘의 분석에는 차이가 없다.

알짜힘의 분산은 물체가 받는 알짜힘을 파악하고 이에 따른 각 물체별 힘을 분석 하는데에 도움이 된다. 더 나아가 이러한 관계식은 뒤에서 배울 에너지 파트에서도 용이하게 작용한다. 이는 뒤에서 배울 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지가 각각 중력, 알짜힘에 영향을 받는데 자세한 건 뒤에서 다루도록 하고 일단은 간단한 예제를 통해 알짜힘의 분산을 연습해보도록 하자.

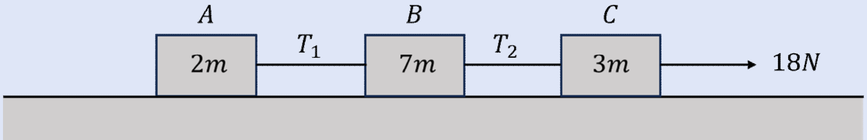
예제1

그림은 물체가 실로 연결된 상태로 가만히 두자 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 장력 T_1 : T_2를 구하시오. (단, 모든 마찰은 무시한다.)



예제2

그림은 질량이 각각 2m, 5m, 3m인 실로 연결된 A, B, C가 18N의 힘으로 당겨져 오른쪽으로 운동중인 모습을 나타낸 것이다. 두 실에 걸리는 장력 T_1, T_2를 구하시오.



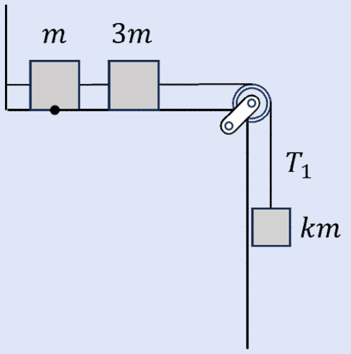
(단, 모든 마찰은 무시한다.)

$T_1 =$

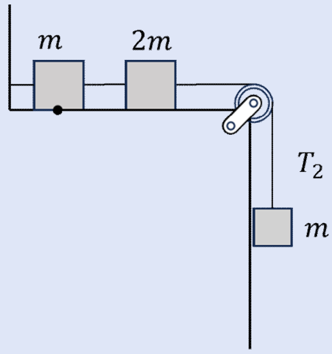
$T_2 =$

예제3

그림은 실로 연결된 물체들이 벽면에 연결된 실에 의해 정지해 있는 모습을 나타낸 것이다. t=0 때 (가)에서 벽면에 연결된 실이 끊어지고, $t=t_0$때 (나)에서 벽면에 연결된 실이 끊어진다. t=0부터 $t=2t_0$ 까지 물체가 이동한 거리는 (가)가 (나)의 8배이고, 물체가 이동할 때 도르레 아래에 연결된 물체에 연결된 실에서 측정된 장력은 각각 T_1, T_2이다. 질문에 답하시오.
(단, 모든 마찰과 저항은 무시하며 중력가속도는 g이다.)



(가)



(나)

(1) k를 구하시오.

(2) T_1, T_2를 구하시오.

예제1 풀이

T_1과 T_2는 각각 질량이 2m, 5m인 물체가 받는 알짜힘과 동일하다.

전체 알짜힘은 5:7, 알짜힘을 받는 물체의 질량은 2:5, 전체 질량은 11:16이다.
따라서 알짜힘 $T_1 : T_2 = \dfrac{(5:7)\times(2:5)}{11:16} = \dfrac{2:7}{11:16} = 32:77$
(이전에 말했듯, 분수는 항상 아래에서 위로 대각선으로 곱해야 헷갈리지 않는다.)

예제2 풀이

전체 알짜힘은 18N이며 물체의 질량비는 2:7:3이다. 2+7+3은 12이며 실제 힘의 합은 18N이다.
따라서 비례상수를 1로 만들어주기 위해 $\dfrac{18N}{12} = 1.5N$를 곱해주면 각 물체가 받는 알짜힘은 각각 3N : 10.5N : 4.5N 이다. (합 18N)

T_1은 질량이 2m인 물체가 받는 알짜힘으로 3N

질량이 7m인 물체가 받는 알짜힘은 $T_2-T_1=T_2-3N=10.5N$, $T_2=13.5N$
또는 질량이 3m인 물체가 받는 알짜힘은 $18N-T_2=4.5N$, $T_2=13.5N$

예제3 풀이

(1) (가)와 (나)에서 물체가 이동한 시간은 각각 $2t_0$, t_0 으로 2:1이다.
초기속도가 0인 물체가 이동한 거리는 가속도와 시간 제곱에 비례한다.
이동거리가 8:1이므로 $(2:1)^2 \times$ a비 = 8:1, a비 = 2:1

a는 전체 알짜힘 F에 비례, 전체 질량에 반비례 하므로 $2:1 = \frac{k:1}{k+4:4} = \frac{k}{k+4} : \frac{1}{4}$

$\frac{k}{k+4} = \frac{1}{2}, k=4$

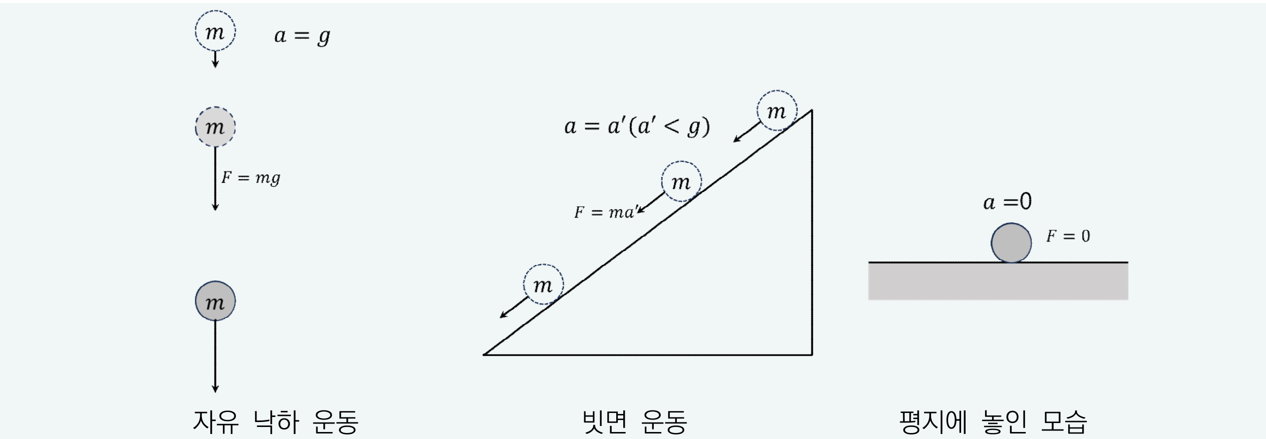
(2) 도르레 아래에 연결된 물체가 받는 알짜힘을 구해보도록 하자.

(가) : km = 4m으로 전체 알짜힘 $4mg$ 중 $\frac{4m}{m+3m+4m} = \frac{1}{2}$을 분배받으므로 $2mg$이다.

(나) : mg 중 $\frac{m}{m+2m+m} = \frac{1}{4}$를 분배 받으므로 $0.25mg$이다.

(가)는 4mg에서 T_1을 뺀 값이 2mg 이므로 T_1 = 2mg 이다.
(나)는 mg에서 T_2를 뺀 값이 0.25mg 이므로 T_2 = 0.75mg 이다.

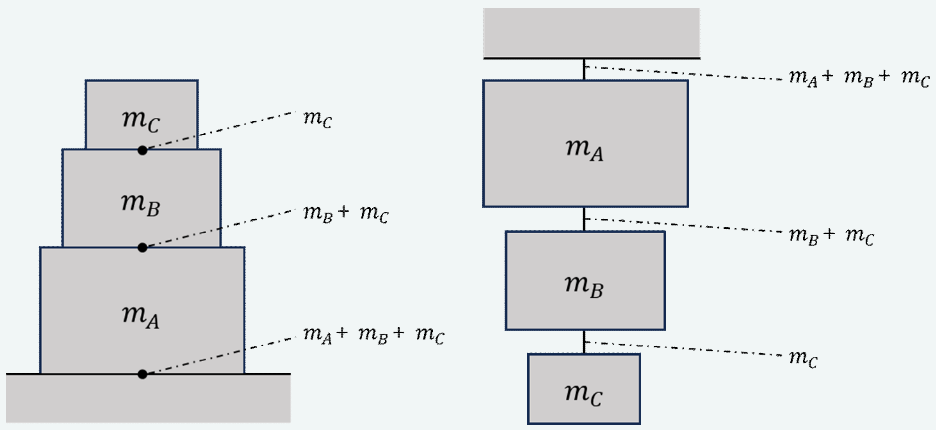
(10) 중력 가속도와 무게



물체는 자유낙하 운동시 모든 마찰, 저항이 없으면 질량과 관계없이 동일한 가속도를 가지게 되는데 이를 중력 가속도 g라고 한다. 앞서 다룬 $F=ma$에 대입하면 $F=mg$로 물체가 받는 힘의 크기를 구할 수 있는데 이를 **무게**라 한다. 물체는 공중이 아닌 빗면에 두어도 질량과 관계없이 동일한 가속도를 가지며 이 때의 가속도는 빗면의 각도에 따라 g보다 작은 어떠한 일정한 가속도를 가지게 된다. 평지에 놓여 있을 때에는 가속운동을 하지 않는다.

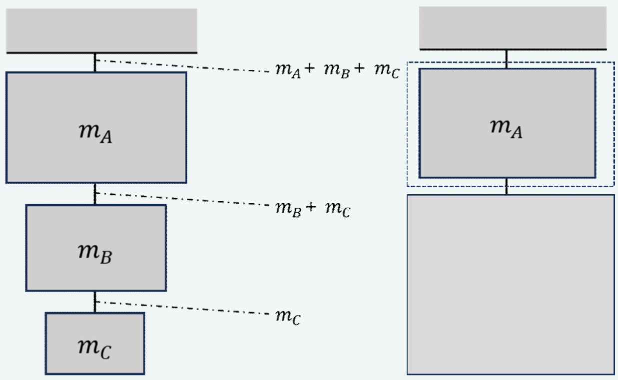
우리는 빗면이 가파를수록 가속도가 크다는 사실을 이미 알고 있다. 실제로 각도를 알면 가속도 계산이 가능하다! 하지만 물리학 1에서는 그냥 자유낙하 운동시 가속도는 중력가속도와 동일, 빗면 운동의 경우 빗면이 가파를수록 가속도가 크다 정도만 알면 무방하다. 추가로 물체가 받는 중력은 빗면으로 인하여 사선 방향으로, mg보다 작게 작용하여 g보다 작은 가속도 a'으로 운동한다는 사실 정도는 알아두도록 하자.

(11) 장력과 수직항력



각 지점, 줄에서 작용하는 중력과 장력 (g 생략)

장력은 실에 작용하는, 연결된 물체를 당기는 방향으로 작용하는 어떠한 힘을, 수직항력은 어떠한 접촉점에 대하여 수직 방향으로 작용하는 힘을 의미한다. 수직항력과 장력은 단순히 생각하였을 때에는 해당 지점에 각각 저울과 용수철저울이 있다고 생각하면 보다 생각하기 수월할 것이다. 이 두 힘은 물리를 처음 공부할 때 힘의 분석에서 많은 이들의 골머리를 앓게 하는 것 같다. 힘을 분석할 때에는 그냥 해당 물체**만**보는 습관을 들이는 것을 권장한다.



오른쪽 그림은 왼쪽 그림을 그냥 가리고 질량이 m_A인 물체 주변을 점선으로 표기한것인데, 이 점선이 곧 우리가 질량이 m_A인 물체에 작용하는 힘을 볼 때의 시선이다. 어떠한 물체에 작용하는 알짜힘을 분석하기 위해서는 해당 물체에 대해 접촉된 요소를 보는 것이다. (물론 더 나아가서는 전기력과 같이 접촉하지 않아도 작용하는 힘도 따져 줘야한다.) 결론적으론 가려진 부분에 무엇이 존재하건 해당 물체에 작용하는 힘은 연결된 두 실의 장력, 그리고 해당 물체에 작용하는 중력이니 말이다. 단, 그 연결된 힘에 대한 단서를 외부 조건을 통해 유추하는 것일 뿐이다.

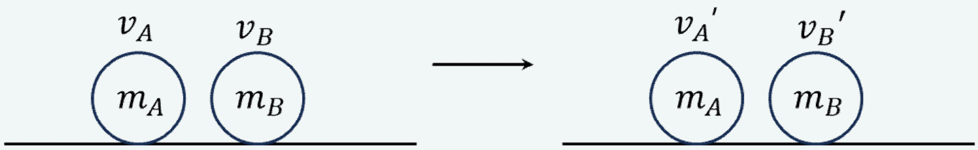
사실 그리 대단한 내용은 아니지만, 위와 같은 시선을 습관화 한다면 뒤에서 다룰 에너지 파트가 조금 더 친근하게 느껴지리라 생각한다.

(12) 운동량 p

질량이 m인 물체가 속도 v로 운동할 때 질량, 속도의 곱을 운동량이라 한다. 속도를 곱한다는 것은 운동량 자체는 방향성을 띄며, 물리학1에서는 이 방향성을 +와 −로 표기한다. 운동량은 속도에 영향을 받으니 자연스레 힘에도 영향을 받을것이며, 힘에도 영향을 받으니 자연스레 다른 물체와의 충돌에도 영향을 받게될 것이다. 어떠한 물체의 운동량의 변화는 $\Delta p = m\Delta v$로 계산이 가능하다. 앞서 말했듯 운동량은 질량과 **속도**의 곱이다. 오른쪽으로 $2v$의 속력으로 운동하던 물체가 충돌 후 왼쪽으로 $2v$의 속력으로 운동한다면 $|\Delta v| = 4v$로 계산되어야 한다. 그래서 필자는 어떠한 물체의 운동량을 표기할 때에는 방향을 같이 표현하는 것을 선호하며, 부호 설정은 오른쪽을 +, 왼쪽을 −로 설정하는 것을 선호한다.

(12)-1 운동량 보존 법칙

물체와 물체가 충돌할 때 충돌한 물체들의 총 운동량은 유지된다. 만약 두 물체가 서로 충돌한다면 아래와 같이 표현 가능할 것이다.



두 물체 A, B의 충돌 전 속도를 v_A, v_B 충돌 후 속도를 v_A', v_B' 질량을 m_A, m_B이라 하자. 충돌 전, 후 두 물체의 운동량의 합이 동일 하며 이를 토대로 다음과 같은 같이 유도할 수 있다.

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

$$m_A(v_A - v_A') = m_B(v_B' - v_B), \qquad m_A|v_A - v_A'| = m_B|v_B - v_B'|$$

$$m_A : m_B = |v_B - v_B'| : |v_A - v_A'| = (v_B - v_B') : -(v_A - v_A') =$$

- 두 물체가 충돌하는 과정에서 속도 변화량의 크기는 반대 질량비이다.
- 속도 변화의 방향은 서로 반대이며 힘을 받는 방향으로 속도가 변한다.
  (작용 반작용으로 서로 변화 방향이 반대)

예 : 질량이 각각 3m, m인 두 물체가 충돌할 때 속도 변화 크기는 1:3이며 변화 방향은 서로 반대이다.

(13) 충격량과 운동량

물체에 힘을 가할 때 힘을 받은 정도를 어떻게 표현 가능할까? **10N의 힘을 3m 이동하는 동안 받았다**처럼 거리와 연관을 지을 수도 있고 **3초 동안 받았다**처럼 시간에 연관을 지을 수도 있을 것이다. 충격량은 시간에 연관을 지은 것으로, 물체가 받은 충격량의 크기는 힘과 시간의 곱으로 나타내진다. 힘은 속도에 영향을 주고 시간 t동안 힘 F를 일정하게 줄 경우 다음과 같은 관계식이 성립한다. (물1에서는 속도의 방향과 힘의 방향이 평행한 경우에 대해서만 다룰 것이다.)

$$Ft = m\Delta v,\ \ F\text{비율} \times t\text{비율} = m\text{비율} \times \Delta v\text{비율}$$

(이 때, 속도의 변화 방향은 힘의 방향과 동일하다)

마찬가지로, 곱셈으로 이루어진 관계식이므로 위와 같이 비율간 계산도 성립한다. 두 물체가 크기가 2:3인 힘을 시간 5:4 동안 받는다면 운동량의 변화는 (2:3)과 (5:4)를 곱한 5:6으로 계산이 가능하다. 만약 이를 질량 m 비율로 나누어 준다면 속도 변화 비율도 구할 수 있을 것이다.

(14) 일

앞서 우리는 힘을 시간에 연관지은 충격량을 배워보았다. 힘을 시간이 아닌 거리에 연관을 지은 것을 우리는 일이라고 하며 힘과 이동 거리의 곱으로 나타내진다.

$$W = Fs$$

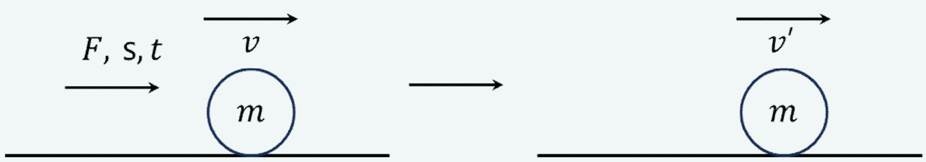
$$W\text{비} = F\text{비} \times s\text{비}$$

이 때 W의 단위는 J, F와 s는 각각 N, 초를 사용한다.

여기서 중요한 점은 s가 이동 거리이냐 변위이냐에 따라 해석하는 방향이 달라진다. 이는 운동 에너지에 대해서 좀 더 배운 뒤에 다루도록 하겠다. 일단은 간단하게 정의 정도만 알아두도록 하자.

(15) 운동 에너지 (E_k)

뉴턴의 운동 법칙에 의해 아래와 같은 유도가 가능하다.



질량이 m, 속력이 v인 물체에 힘 F 를 이동 거리 s, 시간 t동안 가하자 속력이 v'이 되었다 하자.
$s = vt$와 $F = ma$에 의해 아래의 식을 작성할 수 있다.

$$s = \frac{1}{2}(v + v')t, \quad F = m\frac{v' - v}{t}$$

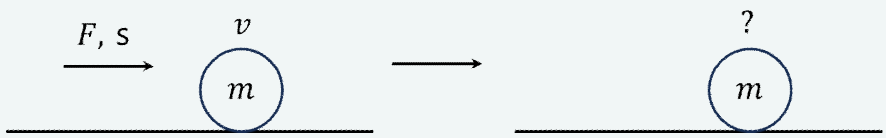
두 식을 곱해주면 다음과 같다.

$$Fs = \frac{1}{2}m(v'^2 - v^2) = \triangle\frac{1}{2}mv^2$$

결과적으로는 Fs만큼 물체의 $\frac{1}{2}mv^2$값이 변하였는데 이를 물체의 운동 에너지라 한다.

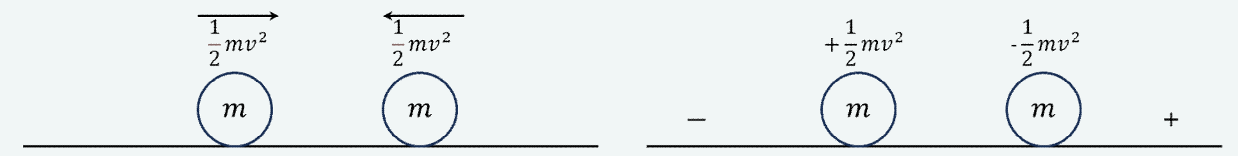
운동 에너지는 모양새를 보면 알겠지만 **양수**다. $\frac{1}{2}$, m, v^2 모두 양수이니 말이다. 그런데 운동 에너지에 **부호**를 붙여주면 어떨까? $+\frac{1}{2}mv^2$, $-\frac{1}{2}mv^2$처럼 말이다! 갑자기 양수인 운동 에너지에 마이너스를 붙인다니 무슨 소리인가 싶을 것이다. 하지만 운동 에너지에 부호를 붙여 해석을 한다면 보다 폭넓은 사고가 가능할 것이다. 다음 내용을 보도록 하자.

(15)-1 운동 에너지의 부호



그림은 질량이 m, 속력이 v인 운동 에너지가 $\frac{1}{2}mv^2$인 물체에 힘 F 를 오른쪽 방향으로, 이동 거리 s만큼 가하는 모습을 나타낸 것이다. 물체의 처음 운동 방향은 모르고 속력만 알고 있다. 그렇다면 **나중 운동 에너지를 구하는 것이 가능한가? 알 수 없다.** 물체의 운동 방향이 오른쪽이냐 왼쪽이냐에 따라 속력 v가 증가할 수도, 감소할 수도 심지어 정지할 수도 있으니 말이다. 한가지 더, 일의 양 Fs에서 s가 이동 거리일 때와 변위일 때 어떠한 차이를 가

지는지 생각해보았는가? 이번 파트에서는 이를 명확하게 알고자 한다. 그 전에 본 교재 학습 과정에서 운동 에너지를 표현할 때 다음과 같이 표현할 것을 권장한다.



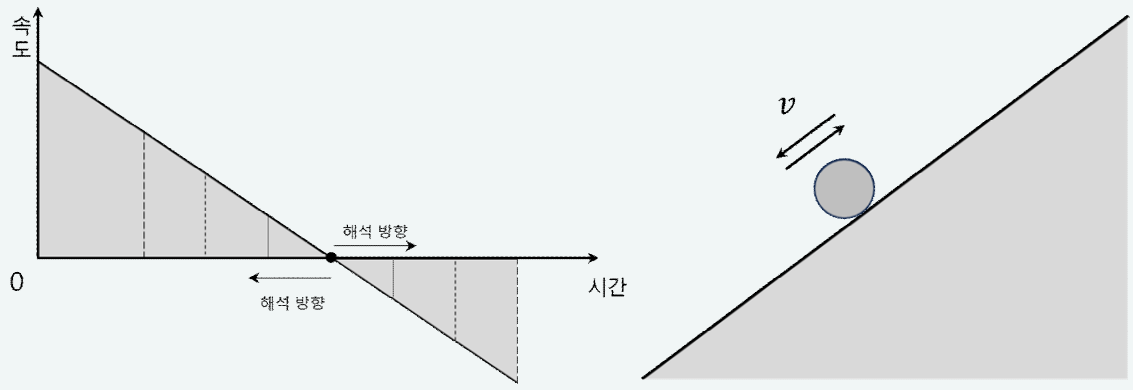
물체의 운동 방향에 따른 운동 에너지의 표기.

운동 방향을 화살표로 표현하여도 되고, 부호로(오른쪽 +) 표현하여도 된다. 단지, 본인 스타일에 따라 편한 것을 고르면 된다. 필자는 화살표로 표현을 하고, 계산할 때에는 부호를 사용하는 것을 선호한다.

(15)-2 운동 에너지의 이동 거리, 변위적 해석

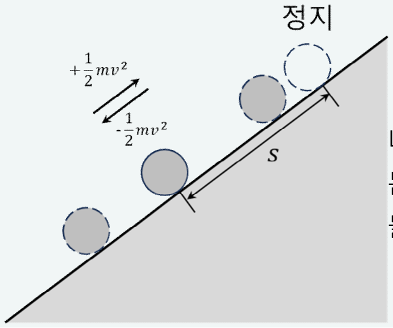
$$\frac{1}{2}mv^2 \qquad\qquad Fs$$

이번 파트 에서는 물체에 작용하는 알짜힘 F가 이동 거리, 변위와 함께 운동 에너지에 어떤 식으로 영향을 주는지 알아볼 것이다. 조금 빠른 이해를 위해 이전에 다루었던 그래프를 한번 가져오겠다.



왼쪽은 앞에서 배운 방향이 바뀌는 운동의 대칭성을 그래프로 표현한 것, 오른쪽은 이를 그림으로 표현한 것이다. 속력 v로 올라가는 지점은 다시 속력 v으로 내려옴을 나타낸 것이다.

등가속도 운동을 할 때 위와 같이 속력이 v인 두 시점은 위치가 같으니 변위는 0, 속력의 변화도 0이므로 운동 에너지의 변화 역시 0이다. 그렇다면, 방향을 고려한 운동 에너지를 표현하면 어떤 모습인지, 이를 바탕으로 어떠한 결과가 도출되는지 보자.

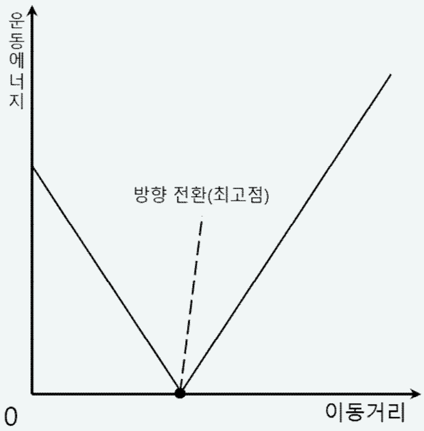


빗면 위와 아래를 각각 +, -로 정의하고 이에 따른 운동 에너지의 부호를 나타낸 것이다. 속력이 v, 0인 두 지점 사이의 거리는 s이고, 물체에 작용하는 알짜힘은 빗면 아랫 방향으로 중력 F가 작용한다. 방향을 고려하였을 때 물체에 작용하는 힘은 $-F$다.

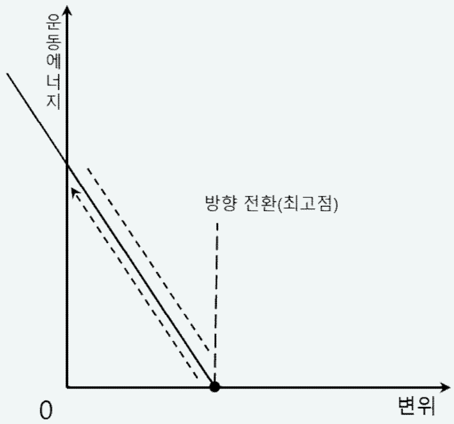
우리가 방향에 따른 부호를 붙일 수 있는 값들은 **변위, 운동 에너지, 힘** 세가지 정도가 되겠다. 일단은 부호를 붙여준 운동 에너지를 보자. 올라갈 때, 정지했을 때, 내려갈 때 순으로 물체의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$, 0, $\frac{1}{2}mv^2$이지만, 방향까지 고려하면 $+\frac{1}{2}mv^2$, 0, $-\frac{1}{2}mv^2$라고 쓸 수 있다. 그럼 질문을 하나 해보려 한다.

속력 v로 올라갈 때와 내려갈 때 운동 에너지의 변화는 0인가? mv^2인가?

운동 에너지의 변화량은 0 인가? 아니면 mv^2인가? 물론, 우리가 책에서 배운 내용대로라면 운동 에너지의 변화는 0이다. 그런데, 방향을 고려해보면 mv^2이라고 말하는 것도 충분히 가능하지 않을까? 우리는 지금부터 이러한 해석에 대해 다뤄볼 것이다. 위 그림처럼 물체가 빗면 위로 올라가다가 정지 후 내려오는 과정에서 운동 에너지의 변화를 변위, 이동 거리에 따라 그래프로 나타낸다면 아래와 같다.

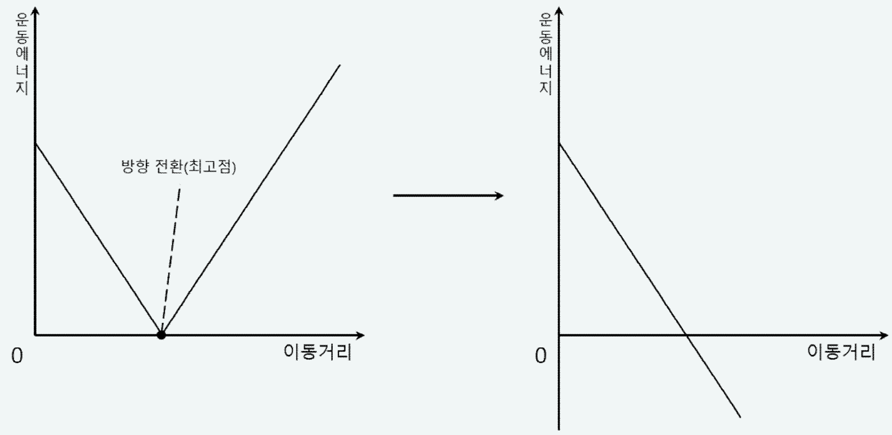


운동에너지 - 이동거리 그래프



운동에너지 - 변위 그래프

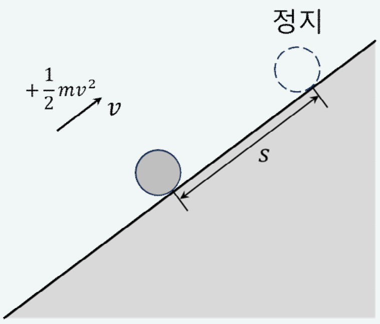
물체가 이동함에 따라 **운동에너지 - 이동거리 그래프**는 그래프 역시 좌측에서 우측으로 그려진다. 이 때 그려지는 그래프는 방향 전환이 이루어지는 점을 기준으로 좌우 대칭이며 이는 등가속도 운동에서의 속력의 대칭성을 나타내 준다. 물체가 이동함에 따라 **운동에너지 - 변위** 그래프는 변위 0에서 최고점까지(좌측 → 우측)는 운동에너지 - 이동거리 그래프와 동일하나 이후 그래프의 개형은 다시 최고점에서 변위 0으로(우측 → 좌측) 그려지며 이는 물체가 올라갈 때 그려진 그래프와 일치한다.(그래프의 작성 방향이 점선으로 나타낸 화살표 방향이다!) 위 두 그래프는 모두 운동 대칭성을 보여주는 그래프라 할 수 있다. 그러나, 왼쪽 그래프는 그래프가 진행됨에 따라 운동에너지를 계산하기가 조금 불편해보인다. 차라리 그래프를 다음과 같이 바꿔서 해석해보는건 어떨까?



운동에너지 – 이동거리 그래프 (부호 X) | 운동에너지 – 변위 그래프 (부호 O)

차라리 왼쪽같은 개형보다 오른쪽 같은 개형을 보는 것이 더 수월하지 않을까? 실제로 오른쪽 방식으로 해석하면 운동 에너지의 값을 계산 하기도, 운동 방향을 파악하기도 편하다. 따라서 우리는 s가 이동 거리일 때와 변위일 때 어떤식으로 해석을 하면 좋을지 알아보도록 할 것이다.

일단 $W = Fs$를 계산하는 과정에서 s가 이동 거리면 아래와 같이 해석할 수 있다.



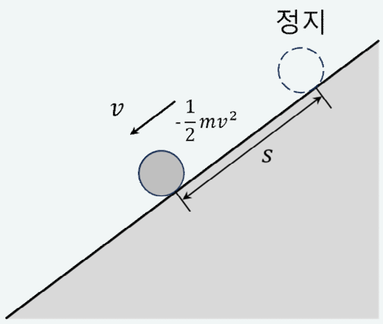
올라가다가 정지하는 구간

올라가는 시점의 운동 에너지 = $+\frac{1}{2}mv^2$

방향을 고려한 힘 = $-F$ (빗면 아래)

이동 거리로 구한 일 = $-Fs$ $(s>0)$

나중 운동 에너지 = $+\frac{1}{2}mv^2 - Fs = 0$



정지했던 물체가 내려오는 구간

정지하는 시점의 운동에너지 = 0

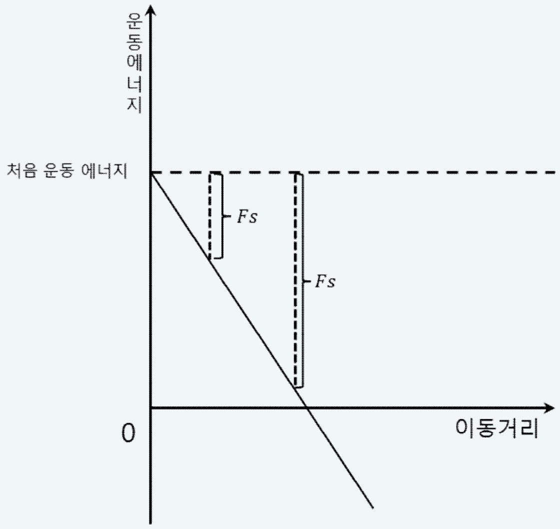
방향을 고려한 힘 = $-F$

이동 거리로 구한 일 = $-Fs$

나중 운동 에너지 = $0 - Fs = -\frac{1}{2}mv^2$

양쪽에서 구해진 Fs의 값은 $\frac{1}{2}mv^2$으로 동일하게 나오는 모습을 볼 수 있다.

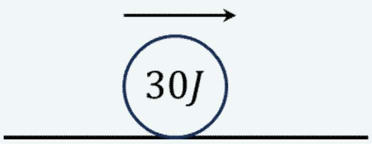
이처럼 우리가 운동 에너지, 힘에 부호를 부여하고 일을 해석할 때 **이동 거리**를 기반으로 하면 **방향까지 고려된 운동 에너지의 변화**가 나오게 된다. 이는 운동 에너지에 방향을 포함하였을 때 이동거리에 따른 운동에너지의 변화가 Fs로 반영이 되기 때문이다.



이동거리 s가 증가함에 따라 운동 에너지가 Fs만큼 감소하는 모습. 이동 거리가 증가함에 따른 방향을 고려한 운동에너지의 변화량은 가해지는 힘과 이동거리에 비례한다. 따라서 아래와 같은 관계식이 유도된다.

부호 고려 운동에너지의 변화량 비 = 알짜힘 비 × 이동거리 비

간단한 예제를 통해 이동 거리를 통한 운동 에너지를 계산해보도록 하자.



그림은 수평면에서 오른쪽으로 운동중인 물체의 모습을 나타낸 것이다. 물체의 운동 에너지는 30J이며 모든 마찰과 저항은 무시한다. 상황별 물체의 운동 에너지를 구하여라.

(일단, 오른쪽을 +라 하면 운동 에너지는 +30J이라 할 수 있겠다.)

(1) 왼쪽 방향으로 힘 10N을 1m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 −10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 −10J로 20J이 된다.

(2) 왼쪽 방향으로 힘 10N을 3m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 −10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 −30J로 0J이 된다. (정지)

(3) 왼쪽 방향으로 힘 10N을 5m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 −10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 −50J로 −20J이 된다. (방향 전환)

(4) 오른쪽 방향으로 힘 10N을 5m 이동하는 동안 가하였다.
: 힘을 +10N라 하면 이동 거리에 따른 일의 양은 +50J로 +70J이 된다.

일반적으로, 운동에너지는 양수로만 취급하기에 상황 분석 과정에서 이동 방향이 한눈에 들어오지 않는데, 위와 같

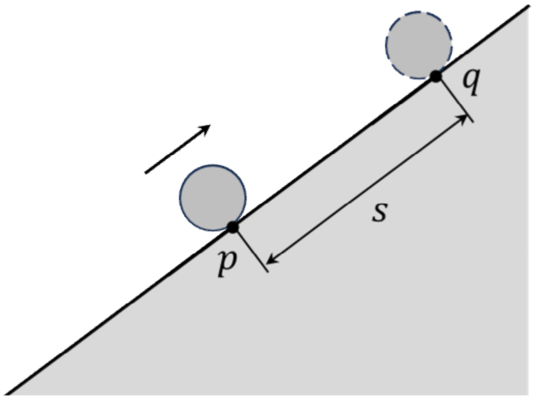
은 해석을 이용하면 에너지 분석 과정에서도 보다 상황 파악하기가 용이하다.

힘, 운동 에너지에 부호를 붙인 뒤 이동 거리로 일의 양을 구하면
방향을 고려한 운동 에너지의 변화가 나온다.

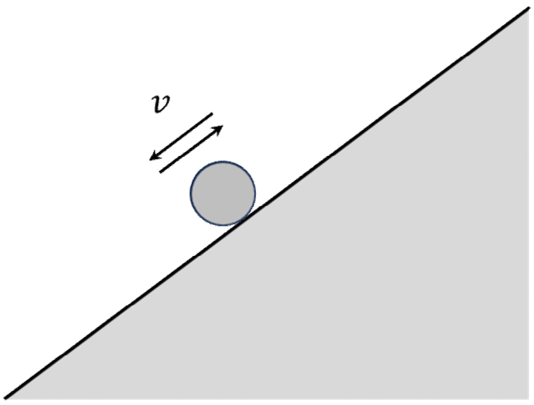
우리는 에너지를 배우기 이전에 가속 운동에서의 대칭성에 대하여 배웠는데, 운동 에너지를 이동거리에 따라 해석을 하게 되면 대칭성과 계산 방식이 유사하여 보다 적응하기가 쉬울 것이다.

이번에는 변위에 따른 운동 에너지의 변화에 대해 알아보기 이전에 간단한 아래 질문에 대해 생각해보자.

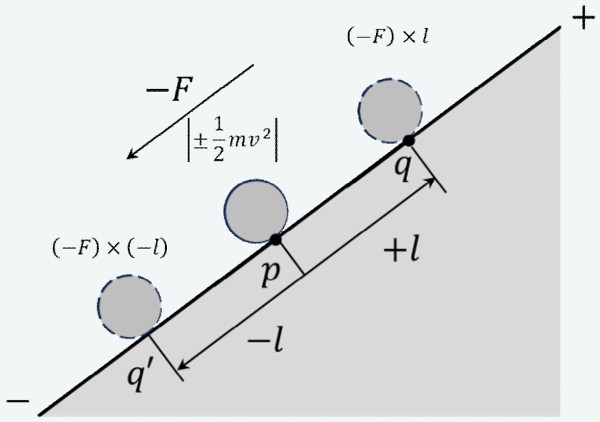
처음 위치로부터 나중 위치까지 작용한 힘, 변위를 알면 물체의 운동 방향은 특정 가능한가?



그림은 물체가 점 p를 지나 이후 점 q에 위치한 모습을 나타낸 것이다. 이 과정에서 물체는 중력만을 받고 있다. 만약 물체가 받고 있는 힘의 크기, 변위 s에 대한 정보를 알고 있다면 점 q에서 물체의 운동 방향은 특정 가능한가?



알 수 없다. (물론 p보다 q가 아래일 때 처럼알 수 있는 경우도 있다) 운동의 대칭성으로 인하여 어떠한 지점에서의 물체의 속력은 올라갈 때, 내려갈 때 모두 동일하다. 문제는 p로부터 점 q를 올라가는 순간이나, 내려가는 순간이나 까지의 변위는 같다. 하지만 방향은 반대이므로 단지 변위와 힘에 대한 정보를 알아도 위와 같은 상황에서는 운동 방향의 특정이 불가능하다. 이것이 변위와 이동거리의 차이이다. 이동거리로 해석 할 때에는 힘과 이동거리를 알면 초기 운동에너지에 일의 양을 더하여 계산된 운동 에너지는 방향이 자연스레 포함이 된다. 하지만 변위일 경우에는 불가능하다는 것이다. 그렇다면 변위에 따른 운동 에너지의 해석은 어떠한 특징이 있는가?



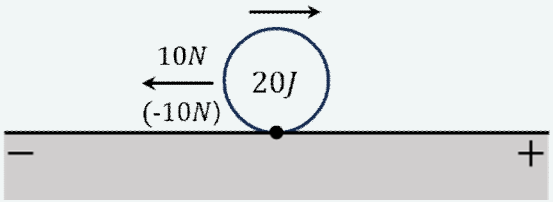
점 p에서의 운동 에너지 $\left|\pm\frac{1}{2}mv^2\right|$를 기준으로 물체가 위, 아래로 거리 l만큼 이동하였을 때
p로부터 q, q'까지의 변위는 각각 $+l$, $-l$고
운동 에너지의 변화는 각각 $-Fl$(감소), $+Fl$(증가) 이다.

우리는 p보다 위에 있는 어떠한 지점에 대하여 운동 에너지를 알아도 운동 방향을 특정할 수 없다. 이는, 변위를 바탕으로 일의 양을 계산 해야 할 때에는 부호를 제외해야함을 의미한다. 따라서, 시작점 p에서의 운동에너지는, 우리가 익히 배워왔던 부호가 없는 $\frac{1}{2}mv^2$를 그대로 사용하며, 변위에 따른 일의 양은 운동에너지의 **크기변화**에 영향을 끼침을 알 수 있다. 마치 p로 부터 거리가 같은 두 지점 q, q'까지의 운동 에너지 **크기변화**가 동일한것처럼 말이다. 이 때 크기 변화의 방향은 힘, 변위의 방향으로 계산이 가능하다.

q까지의 힘의 방향은 -, 변위는 +이므로 운동에너지의 변화는 −이다. q' 까지의 힘의 방향은 -, 변위는 −이므로 운동에너지의 변화는 +이다. 이는 우리가 이전에 배운 힘의 방향과 운동 방향이 동일하면 속력이 증가한다는 뉴턴의 운동 법칙과 상응한다. 따라서, 변위에 따른 운동에너지의 해석은 아래와 같이 정리할 수 있다.

힘, 변위에 부호를 붙인 뒤 변위로 일의 양을 구하면
운동 에너지 변화량과 변화 방향이 산출된다.

즉, 우리가 일의 양을 이동 거리로 해석을 한다면 운동 에너지에 부호를 추가하여 해석하며, 변위로 해석을 한다면 부호 없이 크기 변화에 주목 해야함을 의미한다. 다음 페이지의 표는 이를 직관적으로 확인하기 위해 운동하는 물체에 대하여 일정한 힘을 주었을 때 이동거리, 변위에 따른 운동에너지의 변화를 나타낸 것이다.



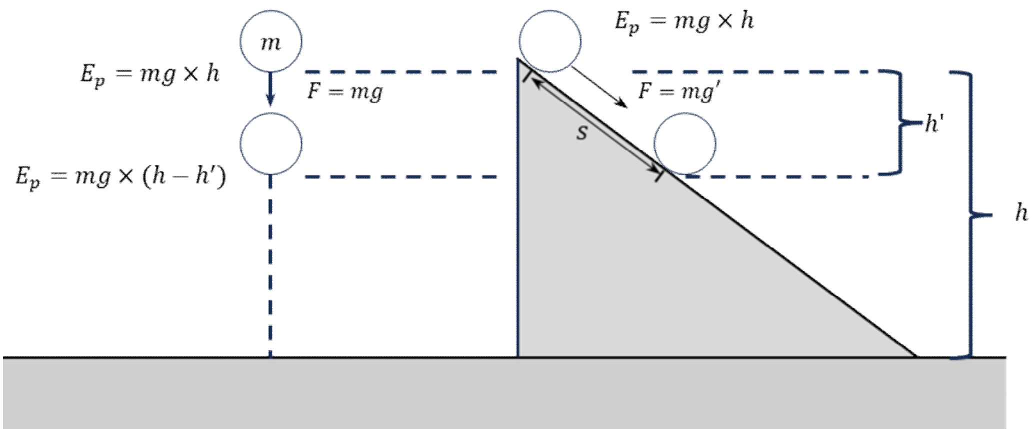
변위, 이동거리에 따른 에너지 변화는 다음과 같다.

이동거리 (m)	0	1	2	3	4	5	6
일의 양 (J)	0	-10	-20	-30	-40	-50	-60
운동 에너지 (J) (부호)	20	10	0	-10	-20	-30	-40

변위 (m)	0	+1	+2	+1	0	-1	-2
일의 양 (J)	0	-10	-20	-10	0	+10	+20
운동 에너지 (J) (부호 X)	20	10	0	10	20	30	40

위 표를 보면 알 수 있듯, 어느쪽을 택하든 운동 에너지의 절댓값은 동일하게 계산된다. 다만, 일을 계산하는 과정에서 s가 이동거리이냐, 변위이냐 에 따라서 초기 운동 에너지에 부호를 포함 시킬지, 시키지 않을지가 다르고, 이에 따른 결과값에 방향이 포함되느냐, 절댓값이 계산되느냐의 차이이다. 이 두 방식의 차이를 명확하게 알아두도록 하자.

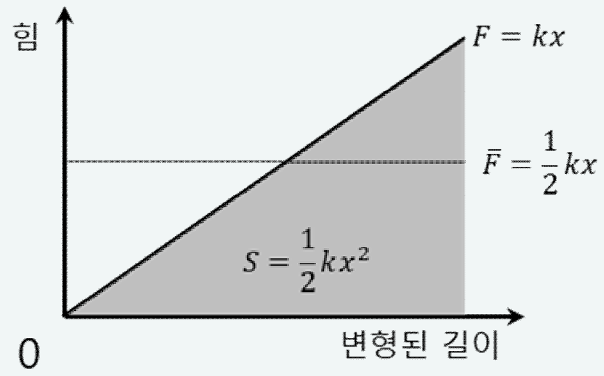
(16) 중력 퍼텐셜 에너지



중력 퍼텐셜 에너지라 하면 익히 mgh라는 익숙한 식으로 알 것이다. 하지만 Fs를 배웠으니 앞으로는 $mg \times h$처럼 힘과 거리의 곱으로 보는 것이 좋을 것이다. 중력 퍼텐셜 에너지라 하면 중력에 의해 물체가 기준점까지 운동했을 때 물체가 가지게 되는 운동 에너지의 값이라 할 수 있으며 중력에 의해 높이 h'만큼 내려 온다면 물체의 운동 에너지는 **중력이 한 일의 양인** mgh'이 된다. 여기서 포인트라면 이는 수직 방향으로의 자유 낙하 운동 뿐만 아니라 빗면에 가만히 두어도 성립한다. 단지 가속도의 크기만 다를 뿐이다. 이 경우에는 빗면 방향으로의 중력 mg'과 빗면 방향으로의 이동 거리 s의 곱이 mgh'과 동일 하다. 물론, 이처럼 각도에 따른 빗면 운동에서의 가속도는 물리학 1 에서는 배우지는 않는다! 다만, 빗면 방향으로의 이동거리와 중력의 곱이 mgh'와 동일하구나 정도는 알아두면 좋다.

(17) 탄성 퍼텐셜 에너지

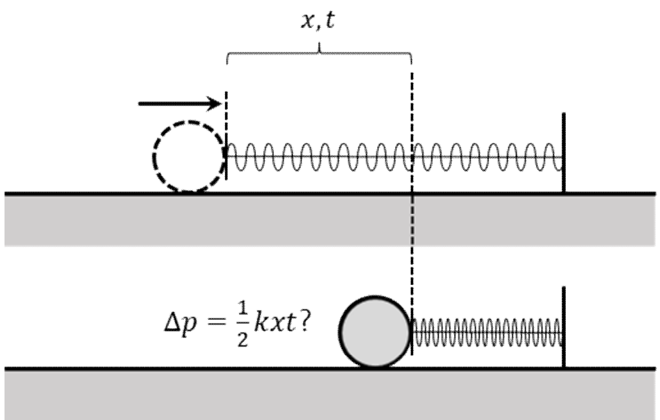
물리학 1에서 탄성 퍼텐셜 에너지는 용수철이 압축 되거나 늘어남에 따라 저장되는 에너지를 의미하는데 이전에 용수철의 늘어난 길이, 또는 압축된 길이에 따른 용수철의 특징에 대해 알아야 한다.



용수철은 압축되고 늘어남에 따라 밀어내고 당기는 특성을 가진다. 이때의 힘은 용수철이 변형된 길이에 비례하고 이 때 단위 길이당 발생하는 용수철의 힘을 용수철 상수 k라 한다. 용수철의 변형된 길이가 x일 때 용수철에 저장되는 에너지의 크기 $S=\frac{1}{2}\times x\times kx=\frac{1}{2}kx^2$로 계산되며 이 때 발생하는 평균 힘의 크기는 **거리를 기준으로 산출하였을 때** $\frac{1}{2}kx$이다. 따라서 아래와 같은 관계식이 성립한다.

저장된 에너지의 비율 = (변형 길이 비)^2 × 용수철 상수 비
예 : 어떠한 용수철에 대하여 압축된 길이가 1:2면 저장된 에너지는 1:4이다.

평균 힘의 비율 = (변형된 길이 비) × 용수철 상수 비
예 : 어떠한 용수철에 대하여 압축된 길이가 1:3이면 평균 힘도 1:3이다.
(평균힘 1:3에 길이비 1:3을 곱하여 에너지비율이 1:9가 계산 된다.)



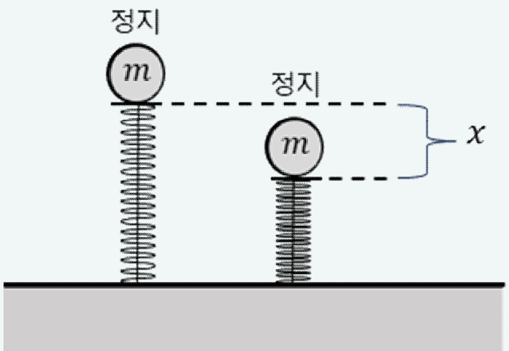
평균 힘에 대해 주의점이 하나 있다면, 위 그림처럼 운동하는 물체에 의해 용수철이 압축되는 과정에서 걸린 시간이 t일 때 물체의 운동량이 충격량 공식에 의하여 평균 힘 $\frac{1}{2}kx$에 시간 t를 곱한 $\frac{1}{2}kxt$만큼 변한다는 사고를 해서는 안 된다. 앞에서 다룬 평균 힘 $\frac{1}{2}kx$는 거리 x에 대하여 평균을 낸 것이지 t에 대하여 평균을 낸 것이 아니기 때문이다. 간혹 이렇게 해석하는 경우를 몇 번 봤는데, 위와 같이 해석하는 일은 없도록 하자.

위치 에너지와 운동 에너지는 탄성 퍼텐셜 에너지로 변환되기도 한다. 예를 들어 우리가 트램펄린 위에 올라가면 아래로 늘어나게 되는데, 이는 낮아진 높이에 해당하는 만큼의 퍼텐셜 에너지가 탄성 퍼텐셜 에너지로 저장되는 모습이라 볼 수 있다.

위치 에너지 뿐만 아니라 운동 에너지도 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되는 것이 가능하다. 지면과 수평한 방향으로 운동중인 물체가 벽면에 고정된 용수철에 닿으면 용수철을 압축 시키다가 정지하게 되는데 이 역시 운동 에너지가 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되는 모습이라 볼 수 있다.

이처럼 탄성 퍼텐셜 에너지에 어떤 에너지가 저장되는지 직관적으로 보인다면 너무나도 좋을 것이다. 이러한 직관력은 시간을 투자하면 자연스레 늘어나기는 하겠지만 그러기란 쉽지 않다. 이럴 때는 대해 물체의 시점에서 $W=Fs$를 떠올리면 보다 쉽게 떠올릴 수 있다. 어떠한 물체의 운동 상태(속도)은 알짜힘에 영향을 받으며 이러한 알짜힘의 분석을 할 때 에는 **해당 물체와의 접촉된 요소를 보도록 한다.**

(1) 퍼텐셜 에너지 ↔ 탄성 퍼텐셜 에너지



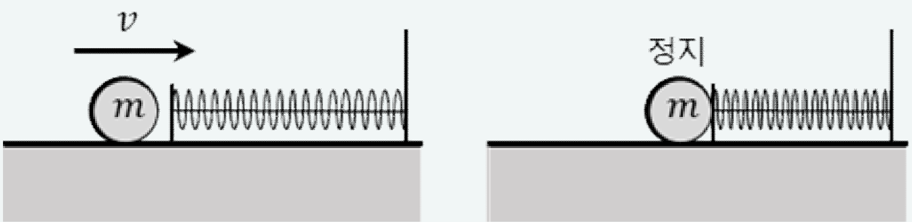
그림은 용수철 위에 가만히 둔 물체가 용수철을 길이 x만큼 압축하고 정지한 모습을 나타낸 것이다. 물체에 작용하는 힘은 중력과 탄성력, 그리고 운동 에너지의 크기 변화는 0이다. 이는, Fs값이 0임을 의미한다.

따라서 평균 탄성력을 $\frac{1}{2}kx$라 한다면 $W=Fs=(mg-\frac{1}{2}kx)x=0, mgx=\frac{1}{2}kx^2$이다.

이 때 $\frac{1}{2}kx^2$은 탄성 퍼텐셜 에너지로 위치 에너지 변화 mgx가 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되었음을 알 수 있다.

직관적으로 보이지 않는다면 이처럼 물체를 대상으로 E_k와 Fs와의 관계를 이용하면 좋다.

(2) 운동 에너지 ↔ 탄성 퍼텐셜 에너지

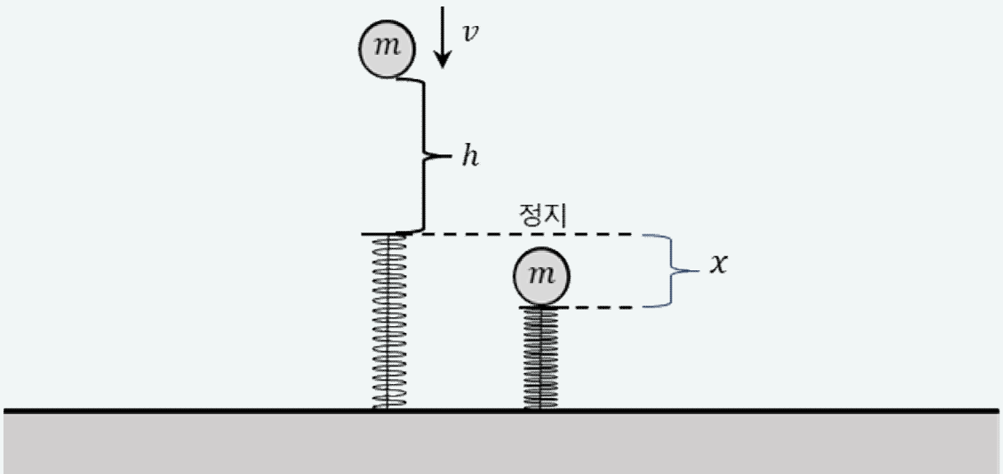


그림은 질량이 m, 속력이 v인 물체가 용수철을 x만큼 압축하고 정지한 모습을 나타낸 것이다. 물체에 작용하는 힘은 탄성력, 그리고 운동 에너지의 크기 변화는 0이다. 이는, Fs값이 $\frac{1}{2}mv^2$임을 의미한다.

따라서 평균 탄성력을 $\frac{1}{2}kx$라 한다면 $W = Fs = (\frac{1}{2}kx)x = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$이다. 이 때 $\frac{1}{2}kx^2$은 탄성 퍼텐셜 에너지로 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$이 탄성 퍼텐셜 에너지의 형태로 저장되었음을 알 수 있다.

운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지가 같이 저장되는 모습은 아래와 같이 떠올릴 수 있겠다.

(3) 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지 ↔ 탄성 퍼텐셜 에너지



그림은 질량이 m, 속력이 v인 물체가 높이 h동안 자유 낙하 운동을 하다가 용수철을 x만큼 압축하고 정지한 모습을 나타낸 것이다. 높이 h동안 물체는 중력 mg만을 받고, 압축 길이 x 동안에는 $mg - \frac{1}{2}kx$를 받는다. (아랫 방향을 +, 윗방향을 −로 정의한것이다!) 처음 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$, 나중 운동 에너지는 0이므로

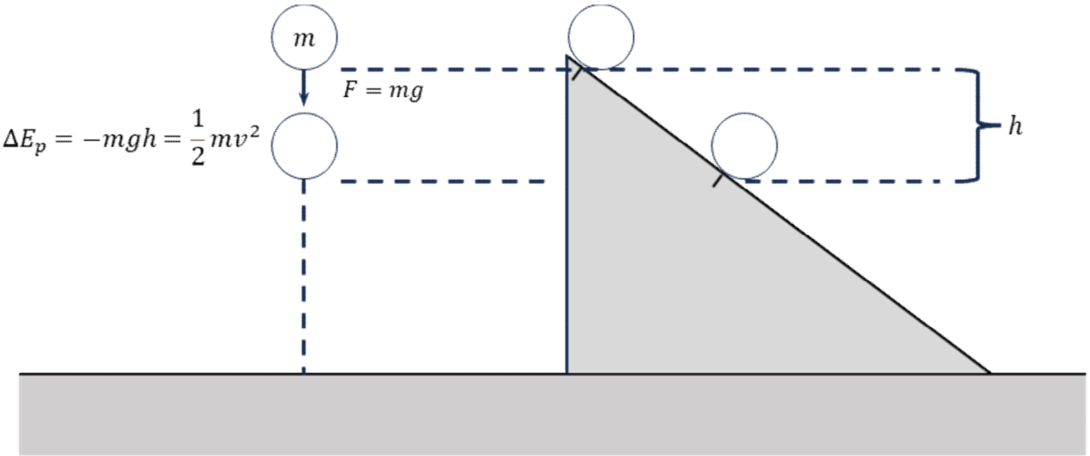
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + (mg - \frac{1}{2}kx)x = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

이는 운동 에너지와 높이 $h+x$에 해당하는 위치 에너지가 탄성 에너지의 형태로 저장된 모습이다.

이는 우리가 앞에서 배운 **접촉 요소를 통한 알짜힘의 분석**과 **이동 거리, 변위에 따른 운동 에너지의 변화**를 활용하는 것으로 이를 위해 앞에서 이 두가지를 배운 것이다. 처음에는 어떤 에너지가 어떤 형태로 저장되는지 직관적으로 잘 보이지 않는 것이 당연하다. 이러한 해석을 조금씩 하다 보면 점점 에너지의 저장이 직관적으로 보이기 시작할 것이다.

(18) 역학적 에너지의 보존



위 그림은 중력에 의해 자유낙하 운동하는 물체의 중력 퍼텐셜 에너지가 mgh 감소함에 따라 운동 에너지가 mgh 증가하였음을 나타내는 모습이다. 따라서, 아래와 같은 관계식 유도가 가능하다.

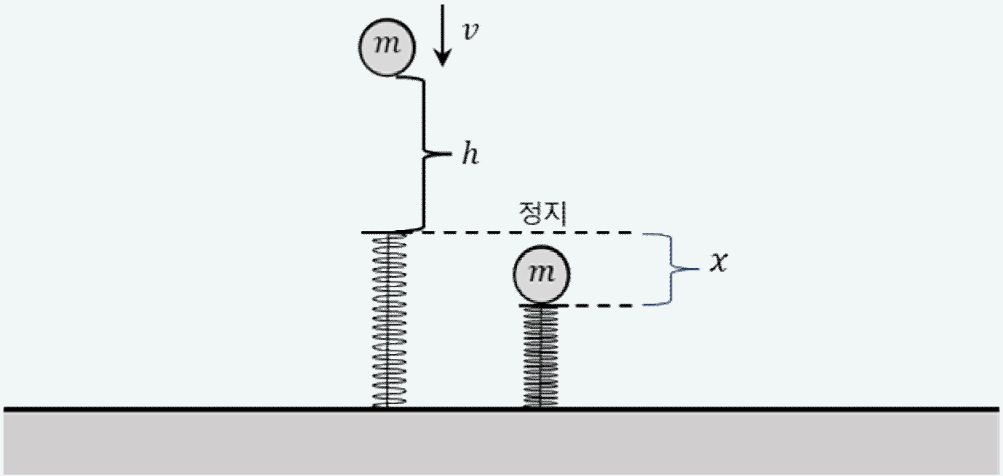
$$\left|\triangle \frac{1}{2}mv^2\right| = |\triangle mgh|,\ \left|\triangle \frac{1}{2}v^2\right| = |\triangle gh|$$

$$\triangle v^2 \propto -\triangle h$$

이는 높이가 증가하면 속력은 감소, 높이가 감소하면 속력은 증가함을 의미하며
이 때 속력 제곱의 변화량은 높이 변화량에 비례함을 의미한다.

예 : 높이가 h 변하는 동안 속력 제곱이 v^2 증가하였다면 높이가 $2h$ 변하는 동안에는 속력 제곱이 $2v^2$이 증가한다.

위 관계식은 초기 속력이 0인 물체가 가속 운동하는 과정에서 이동 거리가 시간 제곱에 비례하는것과도 연관이 있다. 운동 시간 비가 1:3이면 거리비가 1:9가 되며, 이는 높이 변화 비도 1:9이니 감소한 높이도 1:9이다. 그런데 운동 시간 비가 1:3이라는 것은 속력 변화 비도 1:3이므로 속력 제곱 변화비도 1:9이다. 이는 앞서 언급한 속력 제곱의 변화가 높이 변화에 비례함을 보여주고 있다.



$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2,\ \ \triangle E_{운} + \triangle E_{중} + \triangle E_{탄} = 0$$

(위 상황은 $\triangle E_{운} < 0, \triangle E_{중} < 0, \triangle E_{탄} > 0$))

위 상황은 어떻게 보면 높이 h 동안에는 중력 퍼텐셜 에너지가 운동 에너지로 가고 높이 x 동안에는 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지가 탄성 에너지의 형태로 저장되는 모습으로도 볼 수 있겠다.

이에 따라 자연스레 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 총합이 일정하게 보존되는데 이를 역학적 에너지 보존 법칙이라 한다. 다르게 말하면 운동 에너지는 퍼텐셜 에너지와 교환 됨을 의미하는데 이는 중력 퍼텐셜 뿐만 아니라 탄성 퍼텐셜 에너지에도 동일하게 적용된다. 이러한 모습은 앞에서 다룬 퍼텐셜 에너지의 전환 과정에서도 볼 수 있다.

에너지 파트에서는 17처럼 알짜힘이 한 일의 양을 바탕으로 $W = Fs$식을 세우는 것, 이를 바탕으로 에너지의 전환 과정을 직관적으로 파악하는 것 둘다 중요하니 꾸준한 연습을 해두도록 하자.

전반적으로 역학 파트에서 필요한 개념들을 모두 다루었다. 아마 전반적인 개념 및 비례 관계들을 이제 알게 되었을 텐데 chapter 2에서는 예제들과 함께 조금 더 깊은 내용을 다뤄보도록 할 것이다. 혹시나 chapter 2를 학습 하는 과정이 매끄럽지 않다면 chapter 1을 다시 하고 다시 학습하길바란다.