제 2 교시

2025학년도 대학수학능력시험 대비 응애 모의고사 3회 문제지

수학 영역

손풀이!

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

아픔을 내딛고서라도 짧게 빛을 내 볼까 봐

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

*

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[4]{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)^3$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$\sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)^3 = 2^{\frac14-\frac34\cdot3}$

$=2^{\frac14-\frac94} = 2^{-2}$

$=\frac14.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1}$ 의 값은? [2점]

① $-\dfrac{1}{5}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ -1

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}$

$=\frac{1}{(-1)-1} = -\frac12.$

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=(a_3)^2=9$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 9 ② 3 ③ 1 ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{9}$

$a_n = ar^{n-1}.$

$a_2 = ar = 9 \neq 0.$ $a\neq 0.$ $r\neq 0.$

$(a_3)^2 = a^2r^4 = ar\cdot ar^3 = 9\cdot ar^3 = 9.$ $ar^3 = a_4 = 1.$

$\therefore r^2=\frac19.$ $a=27.$ $r=\frac13$ or $a=-27.$ $r=-\frac13.$

$a_6 = a_4\cdot r^2 = \frac19.$

4. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<1) \\ x^2+ax+b & (x\geq 1)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(1) = 1+a+b = 1.$ $a+b=0.$

$f'(1) = 2x+a\big|_{x=1} = 2+a = 0.$ $a=-2.$ $b=2.$

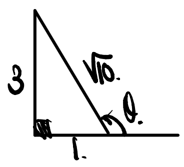
$\therefore f(3) = 9-6+2 = 9.$

*-

5. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi-\theta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$일 때, $\tan\theta\times\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ④ $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $-\frac{9\sqrt{10}}{10}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$. $\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.



$\tan\theta\times\sin\theta=(-3)\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10}$.

$=-\frac{9}{10}\sqrt{10}$.

6. 곡선 $y=x^3-x-6$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$x^3-x-6=0$.

$x=2$. $8-2-6=0$. ok.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$=(x-2)(x^2+2x+3)=0$. 실근 $x=2$.

$\therefore S=\int_0^2|x^3-x-6|dx=\int_0^2(-x^3+x+6)dx$

$=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+6x\Big|_0^2$

$=(-4)+2+12=10$.

7. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$$a-b=\log_5 2,\quad \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\log_5 3$$

일 때, 3^{ab}의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$

$=\frac{\log_5 2}{ab}=\log_5 3$.

$ab=\frac{\log_5 2}{\log_5 3}=\log_3 2$

$\therefore 3^{ab}=3^{\log_3 2}=2$.

8. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-4t-8$$

이다. 양수 k에 대하여 시각 $t=k$에서 점 P가 원점을 지날 때, 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도는? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$x(t)=t^3-2t^2-8t+0.$

$x(k)=k^3-2k^2-8k=k(k+2)(k-4)=0.$ $k=4.$

$\therefore a(k)=6t-4\big|_{t=k=4}=24-4=20.$

9. 두 상수 a, $b\,(b>0)$에 대하여 곡선 $y=2^{x+a}-b$가 곡선 $y=4^x$와 점 $(1, 4)$에서만 만날 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$x=1$만 $2^x=t\ (t>0)$로 치환.

$t^2=2^at-b.$ $t^2-2^at+b=0.$ $t=2$만.

$b>0.$ $\therefore t^2-2^at+b=(t-2)^2=0.$

$2^a=4.$ $a=2.$ $b=4.$ $\therefore a+b=6.$

10. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & (x<a) \\ x & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$x<a$에서 $f(x)\neq 0.$ $\therefore a<6.$

$x>a$에서 $f(x)\neq 0.$ $\therefore a>0.$

$\{\ 0<a<6.$

$x=a$에서 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ 연속. $\left|\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{1}{\frac{1}{2}a-3}\right|.$

$|a|=\left|\frac{1}{2}a-3\right|$ $a=2,\ \cancel{-6}.$

11. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 \times a_2 \times a_3 > 0$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$

a_{10}의 최솟값은? [4점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

(가) a_1, a_2, a_3 중 $\begin{cases} \text{셋 전부 양수} \\ \text{두개 음수, 하나 양수} \end{cases}$

(나) $5a_3 = 10$. $a_3 = 2$. $a_1 = 2-2d$ $a_2 = 2-d$

$d=1$. $a_1 = 0$. x

$d=2$. $a_2 = 0$. x

$d = 3, 4, 5, \cdots$. $a_1 < 0$. $a_2 < 0$. ok.

$a_1 \times a_2 \times a_3 = (2-2d)(2-d) \cdot 2 > 0$을 풀어도 good.

$\therefore a_{10} = 7d + 2$. 최소 $21 + 2 = 23$.

sol 2 > $f(x) + f(x+2) = f(x+2) + f(x+4) = a$

$\therefore f(x) = f(x+4)$. V.

$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x+2)dx$

$= \int_{-1}^{1} \{f(x) + f(x+2)\} dx$

$= \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$.

$\therefore \int_{-1}^{10} f(x)dx = \int_{-1}^{11} f(x)dx - \int_{10}^{11} f(x)dx$.

$= \left(\int_{-1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{7} f(x)dx + \int_{7}^{11} f(x)dx\right) - \int_{2}^{3} f(x+8)dx$.

$= \int_{-1}^{3} \{f(x) + f(x+4) + f(x+8)\} dx - \int_{2}^{3} f(x)dx$

$= 3 \times \int_{-1}^{3} f(x)dx - \int_{0}^{1} \{1 - f(x)\} dx$

$= 3 \cdot 2 - \left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{13}{2}$.

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-a}^{10} f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

> (가) $f(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 & (-1 \le x < 0) \\ -x+2 & (0 \le x < 1) \end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) + f(x) = a$이다.

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{41}{6}$ ④ 7 ⑤ $\frac{43}{6}$

연속. $\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = f(-1)$. $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$.

$x = -1$. $a = f(-1) + f(1)$

$= f(-1) + \lim_{x \to 1-} f(x)$.

$= 0 + 1 = 1$. V.

sol 1 > $\int_{-1}^{10} f(x)dx = \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{3} + \int_{3}^{5} + \int_{5}^{7} + \int_{7}^{9} + \int_{9}^{10}$.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2(x+1)^2 dx + \int_{0}^{1} (2-x)dx$

$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$.

$\int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x+2)dx$

$= \int_{-1}^{1} \{a - f(x)\} dx$.

$= 2 - \frac{13}{6}$.

$\int_{3}^{5} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x+2)dx = \int_{1}^{3} \{a - f(x)\} dx$

$= 2 - \left(2 - \frac{13}{6}\right) = \frac{13}{6}$.

여기서 주기 파악해도 good.

$\int_{5}^{7} f(x)dx = \int_{3}^{5} f(x+2)dx = 2 - \frac{13}{6}$

$\int_{7}^{9} f(x)dx = \int_{5}^{7} f(x+2)dx = 2 - \left(2 - \frac{13}{6}\right) = \frac{13}{6}$.

$\int_{9}^{10} f(x)dx = \int_{7}^{8} f(x+2)dx = \int_{7}^{8} \{a - f(x)\} dx$

주기 4...!

$= \int_{5}^{6} \{a - f(x+2)\} dx = \int_{5}^{6} [a - \{a - f(x)\}] dx = \int_{5}^{6} f(x)dx$

$= \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \{a - f(x)\} dx$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

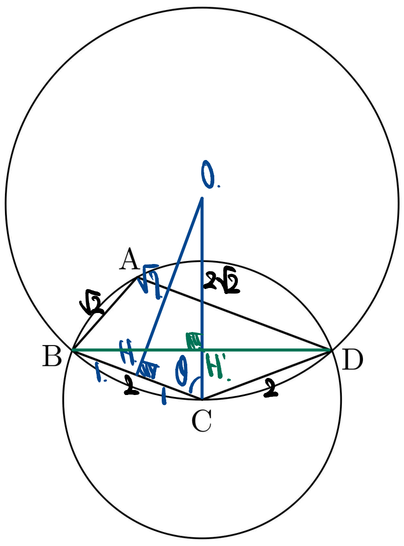
$= \left\{\frac{13}{6} + \left(2 - \frac{13}{6}\right)\right\} \times 2 + \frac{13}{6} + \frac{1}{3}$

$= 4 + \frac{13}{6} + \frac{1}{3} = \frac{13}{2}$

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=\sqrt{2},\quad \overline{BC}=\overline{CD}=2,\quad \angle BAD>\frac{\pi}{2}\ (*)$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABD의 외접원의 중심이 C이고, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{7}$ ② $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

sol 1> 삼각형 BCD 외접원 중심 O에서
선분 BC에 내린 수선의 발 H. $\angle OCH=\theta$.

$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. $\overline{OH}=\sqrt{7}$. V.

B에서 선분 OC에 내린 수선의 발 H'.

$\overline{BH'}=2\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. $\overline{CH'}=2\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\overline{BD}=2\times\overline{BH'}=\sqrt{14}$. V.

$\therefore \triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CH'}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

By 원에 내접하는 사각형의 성질. $\angle BAD=\pi-\theta$.

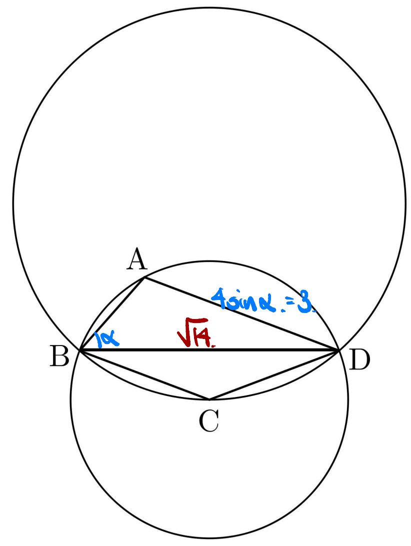
Let $\overline{AD}=x$. $\triangle ABD$에서 코사인법칙.

$x^2+2+2\cdot x\cdot\sqrt{2}\cdot\left(+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=x^2+x+2=14$. $\therefore x=3$.

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{7}$.

$\therefore S=\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{7}=\frac{5}{4}\sqrt{7}$.



sol 2> $\triangle BCD$에서 사인법칙.

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle DBC)}=2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

$\therefore \sin(\angle BDC)=\sin(\angle DBC)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$\cos(\angle BDC)=\cos(\angle DBC)=+\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. $(\because \overline{BC}=\overline{CD})$

$\triangle BCD$에서 코사인법칙. $\overline{BD}=x$.

$x^2+4-2\cdot x\cdot2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=x^2-\sqrt{14}x+4=4$. $x=\sqrt{14}$.

$\therefore \triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\triangle ABD$에서 사인법칙. $\angle ABD=\alpha$. $(\because (*)\ \alpha<\frac{\pi}{2})$

$\frac{\overline{AD}}{\sin\alpha}=2\cdot2=4$. $\overline{AD}=4\sin\alpha$. 물론 다른 식을 이용해도 good.
sol 1과 다른 방향을 보여주려고..

$\triangle ABD$에서 코사인법칙.

$2+14-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\alpha=\cancel{16}-4\sqrt{7}\cos\alpha$

$=(4\sin\alpha)^2=16\sin^2\alpha$

$=\cancel{16}-16\cos^2\alpha$. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$. $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

$\therefore \triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{7}$. $S=\frac{5}{4}\sqrt{7}$.

By (*).
반지름 2인 원의 호 BD중 짧은 것 위에 A 존재.

14. 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}=f(0)$$

일 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{27}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{19}{27}$ ④ $\frac{23}{27}$ ⑤ 1

(분모)→0. 극한값 존재

∴ (분자)→0. $\sqrt{f(1)}-f(1)=0$. $f(1)=0$ or 1

i) $f(1)=0$; $f(x)=(x-1)^n g(x)$ $n=1.2.3.$ $g(1)\neq0.$
g는 다항함수...

sol 1> $n=1.3.$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-1)^2}\cdot\{1-\sqrt{f(x)}\}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{(x-1)^n g(x)}}{(x-1)^2}\cdot\{1-\sqrt{f(x)}\}\right).$$

$g(1)>0.$ $x\to1-$ 에서 $(x-1)^n g(x)\to0-.$ $\sqrt{(x-1)^n g(x)}$ 극한값 존재 X.

$g(1)<0.$ $x\to1+$에서.. X.

$n=2.$ $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{(x-1)^2 g(x)}}{(x-1)^2}\cdot\{1-\sqrt{f(x)}\}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{|x-1|}{(x-1)^2}\cdot\sqrt{g(x)}\cdot\{1-\sqrt{f(x)}\}\right)$$ 수렴 X.

ii) $f(1)=1$; $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{\sqrt{f(x)}-f(x)\}\{\sqrt{f(x)}+f(x)\}}{(x-1)^2\cdot\{\sqrt{f(x)}+f(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-f(x)}{(x-1)^2}\cdot\frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+f(x)}\right).$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{1-f(x)}{(x-1)^2}=f(0)$$

∴ $f(x)=(x-1)^2(ax+b)+1.$ $a\neq0.$ $f(0)=b+1.$

$$\lim_{x\to1}\frac{1-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)^2(ax+b)}{(x-1)^2}$$

$=-(a+b)=2(b+1).$ $a+3b+2=0.$ v.

∴ $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}a+b\right)+1.$

$=\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1=\frac{19}{27}.$

sol 2> $n=1.$ $f(x)=(x-1)g(x).$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{(x-1)g(x)}}{(x-1)^2}\cdot\{1-\sqrt{f(x)}\}\right).$$ 수렴X.

$n=3.$ $f(x)=(x-1)^3 g(x).$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\left(\frac{|x-1|\cdot\sqrt{(x-1)g(x)}}{(x-1)^2}\cdot\{1-\sqrt{f(x)}\}\right).$$ 수렴 X.

⋮

15. $a_1>0$, $a_2>0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}<2a_n) \\ a_{n+1}-3a_n & (a_{n+1}\ge 2a_n) \end{cases}$$

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4=1$, $a_6=2$인 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값의 합은? [4점]

① 27 ② $\frac{82}{3}$ ③ $\frac{83}{3}$ ④ 28 ⑤ $\frac{85}{3}$

$a_6=\begin{cases} a_5+a_4=a_5+1=2. & a_5=1<2 \text{ ok.} \\ a_5-3a_4=a_5-3=2. & a_5=5 \ge 2 \text{ ok} \end{cases}$

$a_5=1$; $a_7=a_6-3a_5=-1$.

Sol 1> $a_n=\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}. & (a_{n+1}<2a_n).\ a_{n+1}<2a_{n+2}-2a_{n+1}.\ a_{n+2}>\frac{3}{2}a_{n+1} \\ \frac{a_{n+1}-a_{n+2}}{3}. & (a_{n+1}\ge 2a_n).\ a_{n+1}\ge\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_{n+2}).\ a_{n+2}\ge -\frac{1}{2}a_{n+1} \end{cases}$

$\times(-\frac{1}{3})$..!

$a_5=1$. $a_4=1$. $\nearrow a_3=0$. x. $\searrow a_3=\frac{0}{3}=0$. ok. $\nearrow a_2=1$ ok. $\nearrow a_1=-1$. x $\searrow a_1=\frac{1}{3}$. ok. $\searrow a_2=-\frac{1}{3}$. x

$a_5=5$; $a_7=5+2=7$.

$a_5=5$. $a_4=1$. $\nearrow a_3=5-1=4$. ok $\nearrow a_2=1-4=-3$. x $\searrow a_2=\frac{4-1}{3}=1$. ok. $\nearrow a_1=4-1=3$. ok. $\searrow a_1=\frac{1-4}{3}=-1$. $\cancel{\text{ok}}$

$\searrow a_3=\frac{1-5}{3}=-\frac{4}{3}$ ok. $\nearrow a_2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$. ok. $\searrow a_2=\frac{-\frac{4}{3}-1}{3}=-\frac{7}{9}$. $\cancel{\text{ok}}$

$\nearrow a_1=(-\frac{4}{3})-\frac{7}{3}=-\frac{11}{3}$. x

$\searrow a_1=\frac{\frac{7}{3}-(-\frac{4}{3})}{3}=\frac{11}{9}$. $\cancel{\text{ok}}$. 밑줄. 쓸 필요 X..!

$\therefore \{a_n\}: \frac{1}{3}. 1. 0. 1. 1. 2. -1. \cdots$ $\sum_{k=1}^{7}a_k=\frac{13}{3}$.

or $\{a_n\}: 3. 1. 4. 1. 5. 2. 7. \cdots$ $\sum_{k=1}^{7}a_k=23$.

$\frac{82}{3}$.

Sol 2> $a_1=\alpha>0$. $a_2=\beta>0$.

$a_3=\begin{cases} \alpha+\beta & (\beta<2\alpha) \\ \beta-3\alpha. & (\beta\ge 2\alpha). \end{cases}$

$a_5=1$. $a_3=0. = \overset{\text{무조건}}{\beta-3\alpha}$ $\beta\ge 2\alpha$.

$a_3-2a_2=(\beta-3\alpha)-\beta<0$. $a_4=a_3+a_2=(\beta-3\alpha)+\beta=2\beta-3\alpha=1$.

$\therefore \beta=1$. $\alpha=\frac{1}{3}$. $\{a_n\}: \frac{1}{3}. 1. 0. 1. 1. 2. -1. \cdots$

$a_5=5$. $a_3=-\frac{4}{3}$ or 4.

$a_3=-\frac{4}{3}=\beta-3\alpha$. $\beta\ge 2\alpha$.

$a_4=2\beta-3\alpha=1$. $\beta=\frac{7}{3}$ $\alpha=\frac{11}{9}$ x.

$a_3=4.=\alpha+\beta$. $\beta<2\alpha$.

$a_3-2a_2=\alpha-\beta\begin{cases} <0. & a_4=a_3+a_2=\alpha+2\beta=1>\alpha+\beta=4.\ \text{x} \\ \ge 0. & a_4=a_3-3a_2=\alpha-2\beta=1.\ \ \alpha=3. \beta=1 \end{cases}$

$\{a_n\}: 3. 1. 4. 1. 5. 2. 7. \cdots$

$a_3=\beta-3\alpha=4$ $\beta\ge 2\alpha$.

$a_3-2a_2=(\beta-3\alpha)-2\beta<0$.

$\therefore a_4=a_3+a_2=2\beta-3\alpha=1>\beta-3\alpha=4$. x. •••

*

15. $a_1>0$, $a_2>0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}<2a_n) \\ a_{n+1}-3a_n & (a_{n+1}\geq 2a_n) \end{cases}$$

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4=1$, $a_6=2$인 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값의 합은? [4점]

① 27 ② $\frac{82}{3}$ ③ $\frac{83}{3}$ ④ 28 ⑤ $\frac{85}{3}$

단답형

16. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3+x$이고 $f(0)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 19

$f(x)=x^4+\frac{1}{2}x^2+1$. $f(2)=16+2+1=19$

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=b_n+2n+1$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{7}a_k-\sum_{k=1}^{7}b_k$의 값을 구하시오. [3점] 63

$a_n-b_n=2n+1$.

$\sum_{k=1}^{7}a_k-\sum_{k=1}^{7}b_k=\sum_{k=1}^{7}(a_k-b_k)$

$=\sum_{k=1}^{7}(2k+1)=63$.

18. 함수 $f(x)=3x^2-3x-2$와 일차함수 $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-4}{x-2}=15$일 때, $g(6)$의 값을 구하시오. [3점] 7

$f(2)g(2)=(12-6-2)g(2)=4.\quad g(2)=1.$

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=\underline{9\cdot 1+4\cdot g'(2)=15}.\quad g'(2)=\frac{3}{2}.$

여기서 바로 $g(6)=4g'+1=(15-9)+1$ 봐도 good..!

$\therefore g(x)=\frac{3}{2}(x-2)+1.\quad g(6)=7$

19. $\pi<x<4\pi$일 때, 부등식

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\le \sin x$$

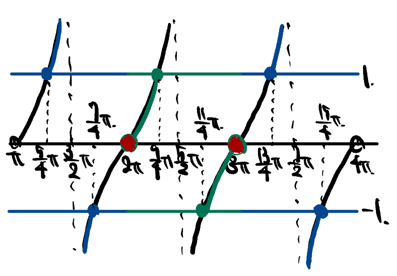
를 만족시키는 x의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $\frac{4(\alpha+3\beta)}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점] 90.

sol 1> $\underline{\sin x<0}$. v. $\pi<x<2\pi$ or $3\pi<x<4\pi$.

$i\quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x\ge 1.\quad \tan x\le -1$ or $\tan x\ge 1.$

$\underline{\sin x=0}$. v. $x=2\pi, 3\pi\quad i\quad 0\le 0.$ 성립.

$\underline{\sin x>0}$. v. $2\pi<x<3\pi\quad i\quad \tan^2 x\le 1.\quad -1\le \tan x\le 1.$



$\therefore \frac{5}{4}\pi\le x<\frac{3}{2}\pi\quad \frac{3}{2}\pi<x\le\frac{7}{4}\pi$

$2\pi\le x\le\frac{9}{4}\pi\quad \frac{11}{4}\pi\le x\le 3\pi.$

$\frac{13}{4}\pi\le x<\frac{7}{2}\pi.\quad \frac{7}{2}\pi<x\le\frac{15}{4}\pi.$

$\alpha=\frac{5}{4}\pi.\quad \beta=\frac{15}{4}\pi.\quad \frac{4(\alpha+3\beta)}{\pi}=50.$

20. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\int_0^x |x-t|(at-2)\,dt$$

가 극값 -3을 가질 때, $f(-6)$의 값을 구하시오. [4점] 84.

$f(0)=0.$

$x<0.\quad f(x)=\int_0^x |x-t|(at-2)dt.\quad t\in[x,0]...$

$=\int_0^x -(x-t)(at-2)dt.=-x\int_0^x(at-2)dt+\int_0^x t(at-2)dt.$

$f'(x)=-\int_0^x(at-2)dt-x(ax-2)+x(ax-2).$

$=-\int_0^x(at-2)dt=-\frac{1}{2}ax^2+2x.$

$x>0.\quad f(x)=\int_0^x |x-t|(at-2)dt.\quad t\in[0,x]...$

$=\int_0^x(x-t)(at-2)dt.=x\int_0^x(at-2)dt-\int_0^x t(at-2)dt.$

$f'(x)=\int_0^x(at-2)dt+x(ax-2)-x(ax-2).$

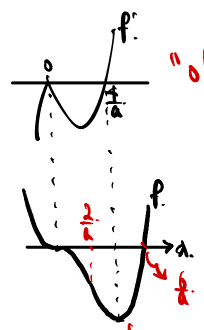
$=\int_0^x(at-2)dt=\frac{1}{2}ax^2-2x.$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\left\{-x\int_0^x(at-2)dt+\int_0^x t(at-2)dt\right\}=0.$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\left\{x\int_0^x(at-2)dt-\int_0^x t(at-2)dt\right\}=0.$

$f'(0)=0.$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}ax^2+2x & (x<0)\\ \frac{1}{2}ax^2-2x & (x\ge 0)\end{cases}$



"이차"

"삼차"

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{6}ax^2(x-\frac{6}{a}) & x<0\\ \frac{1}{6}ax^2(x-\frac{6}{a}) & x\ge 0.\end{cases}$

$\therefore f.\ x=\frac{4}{a}$에서 극값.

$\int_0^{\frac{4}{a}}(\frac{1}{2}ax^2-2x)dx=\frac{1}{6}ax^3-x^2\Big|_0^{\frac{4}{a}}=\frac{1}{6}a\cdot\frac{64}{a^3}-\frac{16}{a^2}$

$=-\frac{16}{3a^2}=-3.\quad a=\frac{4}{3}.$

$\therefore f(-6)=f(0)+\int_0^{-6}f'(x)dx=\int_0^{-6}(-\frac{2}{3}x^2+2x)dx.$

$=-\frac{2}{9}x^3+x^2\Big|_0^{-6}$

$=(-\frac{2}{9})\cdot(-216)+36=84.$

sol 2> $\sin x=t.\ -1\le t\le 1.\quad \cos^2 x=1-t^2\ge 0.$

$\frac{t^3}{1-t^2}\le t.$

$t^2\ne 1.\quad t^3\le t(1-t^2)=-t^3+t.$

$2t^3-t=t(\sqrt{2}t+1)(\sqrt{2}t-1)\le 0.\quad \therefore \begin{cases} t<0. & -1<t\le -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{or}\ \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\le t<1}. \\ t=0. & \text{ok.} \\ t>0. & \cancel{-\frac{1}{\sqrt{2}}\le}\ t\le\frac{1}{\sqrt{2}}\quad 0< \end{cases}$

⋮

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 값의 곱을 구하시오. [4점] 148.

> (가) $f(0)=4$
>
> (나) $\log_2 \dfrac{1}{f(x)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 7이다.

$\log_2 \frac{1}{f(x)} = -\log_2 f(x) = $ (자연수). $\log_2 f(x) = -$(자연수).

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \cdots$

2개. 2개. 2개. 1개. 0개. ⋯ f 최소 $\frac{1}{16}$.

$f(x) = x^2 + ax + 4 = (x+\frac{a}{2})^2 + 4 - \frac{a^2}{4}$.

$4 - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{16}$. $a = \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}$

$f(4) = 20 + 4a = 20 - 6\sqrt{7}$. $20 + 6\sqrt{7}$. 곱 148.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 두 집합

$$A=\{x \mid f(x)g(x)=0\}, \quad B=\{x \mid f(x)-g(x)=0\}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 $\{f'(a) \mid A \subset B\}$의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점] 6

> $\{a \mid A \subset B\} = \{f(a) \mid A \subset B\} = \{0, 2\}$

A. f의 x절편 $\times$ g의 x절편.

B. $f(x)=g(x)$의 실근.

$A \subset B$인 a. 0.2뿐.
그때 $f(a) = 0.2$.

sol 1> 가능한 $(a. f(a))$ 조합.

i) (0.0). (2.2). or ii) (0.2). (2.0).

i) $f(0)=0$. $f(2)=2$. $f(x) = x(x-2)(x-\alpha)+x$.

$a=0$; $g(x) = (2\alpha+1)x$ $A = \{0\} \cup \{x \mid x^2-(\alpha+2)x+2\alpha+1=0\}$. $(\alpha \neq -\frac{1}{2})$.
$=$ (실수 전체). $(\alpha = -\frac{1}{2})$ v.

$f(x)-g(x) = x^2\{x-(\alpha+2)\}$. $B = \{0.\ \alpha+2\}$ $(\alpha \neq -2)$.
$= \{0\}$ $(\alpha=-2)$.

$A \subset B$. $x^2-(\alpha+2)x+2\alpha+1=0$의 실근 x
or $x=0$. $\alpha+2$ 중에서만 실근을...

실근 x. $(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1) = \alpha^2-4\alpha<0$. $0<\alpha<4$. v.

$x=0$을 실근으로. $\alpha = -\frac{1}{2}$. ($x=\alpha+2$를 실근으로 가질 때도..). X.

$a=2$; $g(x) = (5-2\alpha)(x-2)+2 = 0$. $x = 2 + \frac{2}{2\alpha-5}$.

$A = \{0.\ 2+\frac{2}{2\alpha-5}\} \cup \{x \mid x^2-(\alpha+2)x+2\alpha+1=0\}$. $(\alpha \neq 2.\ \frac{5}{2})$

$= \{0\}$ $(\alpha = 2.\ \frac{5}{2})$

$f(x)-g(x) = x(x-2)(x-\alpha)-(5-2\alpha)(x-2)+(x-2)$.
$= (x-2)\{x(x-\alpha)-(5-2\alpha)+1\}$.
$= (x-2)^2\{x-(\alpha-2)\}$.

$B = \{2.\ \alpha-2\}$. $(\alpha \neq 4)$. $= \{2\}$ ~~$(\alpha=4)$~~.

$0 \in A$. $\therefore 0 \in B$. $\alpha=2$. $f(x) = x(x-2)^2+x$.

조건 만족시키는지 점검.

$f'(x)=(x-2)^2+2x(x-2)+1$.
$\quad =3x^2-8x+5$.

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)=0$.

$x=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}=a-\dfrac{a(a^2-4a+5)}{(a-1)(3a-5)}$.

$\therefore A=\left\{0,\ a-\dfrac{a(a^2-4a+5)}{(a-1)(3a-5)}\right\}$ $\quad (a\neq 0, 1, \frac{5}{3}, 2)$

$\quad =\{0\}$ $\quad (a=0, 1, \frac{5}{3}, 2)$

$f(x)-g(x)=\{f(x)-f(a)\}-f'(a)(x-a)$

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & -4 & 5 & 0 \\ & & a & a^2-4a & f(a) \\ \hline & 1 & a-4 & a^2-4a+5 & \boxed{f(a)} \end{array}$$

$=(x-a)\{x^2+(a-4)x+(a^2-4a+5)\}$
$\quad -(x-a)(3a^2-8a+5)$
$=(x-a)\{x^2+(a-4)x-(2a^2-4a)\}$
$=(x-a)^2\{x-(4-2a)\}$ 비근의합 이용해도 good.

$\therefore B=\{a, 4-2a\}$ $\quad (a\neq\frac{4}{3})$
$\quad =\{\frac{2}{3}\}$ $\quad (a=\frac{4}{3})$

$0\in B$. $\quad \therefore a=0, 2$ $\begin{cases} a=0. & A=\{0\}\subset B=\{0, 4\} \\ a=2. & A=\{0\}\subset B=\{0, 2\} \end{cases}$

$0\notin B$. $\quad a\neq 0, 2$ $\quad A\not\subset B$.

$\therefore A\subset B \iff a=0, 2$.
그때 각각 $f(a)=0, 2$. ok...

ii) $f(0)=2$. $f(2)=0$. $\quad f(x)=x(x-2)(x-\alpha)+(-x+2)$.

$a=0$; $g(x)=(2\alpha-1)x+2=0$. $x=\dfrac{2}{1-2\alpha}$.

$A=\left\{2, \dfrac{2}{1-2\alpha}\right\}\cup\{x \mid x^2-\alpha x-1=0\}$. $(\alpha\neq\frac{1}{2})$
$\quad =\left\{2, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$ $(\alpha=\frac{1}{2})$

$f(x)-g(x)=\{x(x-2)(x-\alpha)+(-x+2)\}-\{(2\alpha-1)x+2\}$
$\quad =x\{(x-2)(x-\alpha)-1-(2\alpha-1)\}=x^2\{x-(\alpha+2)\}$

$B=\{0, \alpha+2\}$ $(\alpha\neq-2)$. $\quad =\{0\}$ $(\alpha=-2)$.

$2\in B$. $\alpha=0$. $\quad A\not\subset B$ $\quad$ x.

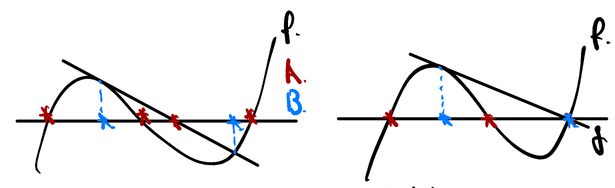
$\therefore$ i). ii)에서 $f(x)=x(x-2)^2+x$

$f'(0)=2^2+1=5$. $f'(2)=1$.

$\therefore \{f'(a) \mid A\subset B\}=\{1, 5\}$. 원소 합 6.

sol 2> $f(x)=0$ 실근 개수로 case 분류...

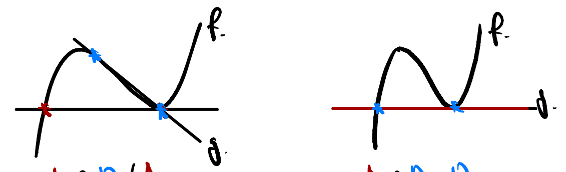
3개 ;



$A\cap B\neq A$. x. $A\cap B$ 원소 존재해야...

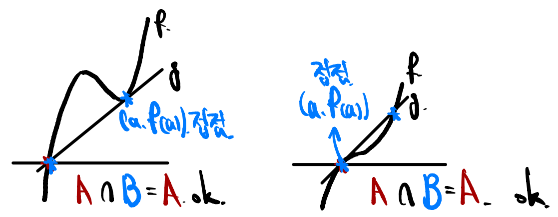
$n(B)=1$ ("변곡접선"). 2 ("변곡접선" x)에서
$n(A)>n(B)$임을 파악하고 바로 걸러도 good!

2개 ;



$A\cap B\neq A$. x. $\qquad A\cap B=B$. x.

1개 ;



$A\cap B=A$. ok. $\qquad A\cap B=A$. ok.

g. { x축과의 교점 지나는 접선.
x축과의 교점에서의 접선.

x절편이 0일 때 $\quad f(0)=0$. & (2. 2)에서의 접선이 원점 지남.
$\therefore f(x)=x(x-2)^2+x$.

2일 때. $f(2)=0$. & (0. 2)에서의 접선이 (2. 0) 지남.
$\therefore f(x)=x^2(x-2)+(-x+2)$. $f(x)=0$ 실근 3개. x. ...

제 2 교시 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+n+\frac{1}{n}}{n^2+2n+2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+\frac{1}{n}}{n^2+2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}$

$= 3.$

24. 함수 $f(x)=x\cos x$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하자. $F(\pi)=0$ 일 때, $F(2\pi)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\pi-2$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ 2 ⑤ π

$F(x) = \int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\cos x}\,dx$

$= x\sin x - \int \sin x\,dx.$

$= x\sin x + \cos x + C.$

$F(\pi) = -1+C=0. \quad C=1.$

$\therefore F(2\pi) = 1+1=2.$

25. 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x^3+x+1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $f(3)=2$, $f'(3)=4$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{20}$　② $\frac{1}{16}$　③ $\frac{1}{12}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{4}$

$x=1.$ $f(3)=2.$ $g(2)=1.$ ...

x^3+x+1 증가함수.
$x^3+x+1=3$ 풀어도 좋은데 근이 보인다면...

$\{f(x^3+x+1)\}'=(3x^2+1)f'(x^3+x+1)\Big|_{x=1}$

$=4f'(3)=16.$

$\therefore g'(2)=\dfrac{1}{\{f(x^3+x+1)\}'\big|_{x=1}}.$

$=\dfrac{1}{16}.$

26. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $(x,\,y)$가

$$x=3t^4\cos(t^2),\quad y=3t^4\sin(t^2)$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\sqrt[4]{5}$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① 19　② 20　③ 21　④ 22　⑤ 23

$\dfrac{dx}{dt}=12t^3\cos t^2-6t^5\sin t^2.$　$\dfrac{dy}{dt}=12t^3\sin t^2+6t^9\cos t^2.$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$=144t^6\cos^2 t^2\cancel{-144t^8\cos t^2\sin t^2}+36t^{10}\sin^2 t^2$
$+144t^6\sin^2 t^2\cancel{+144t^8\sin t^2\cos t^2}+36t^{10}\sin^2 t^2.$

$=36t^{10}+144t^6.$

$\therefore L=\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{5}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$

$=\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{5}}6t^3\sqrt{t^4+4}\,dt.$　$t^4+4=u.$

$=\displaystyle\int_4^9\frac{3}{2}\sqrt{u}\,du.$ $=19.$

27. 모든 항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 > 2|a_3|, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(7a_{2n-1}-2a_n)=8a_1$$

이 성립할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{|a_n|}\times(a_{2n}+5\times a_{3n})\right\}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$a_n = ar^{n-1}$. $a\neq 0$. $r \neq 0$.

$a > |2ar^2|$ $a>0$. ✓ $r^2 < \frac{1}{2}$. ✓ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 수렴.

$\sum_{n=1}^{\infty} 7a_{2n-1} = 7a \cdot \frac{1}{1-r^2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \frac{2a}{1-r}$.

$7a \cdot \frac{1}{1-r^2} - \frac{2a}{1-r} = 8a$. $7-2(1+r)=8(1-r^2)$.

$8r^2-2r-3=(2r+1)(4r-3)=0$. $r=-\frac{1}{2}$. $\cancel{\frac{3}{4}}$.

$\frac{1}{|a_n|}\times(a_{2n}+5\times a_{3n}) = \frac{2^{n-1}}{a}\cdot\left\{\left(-\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{5}{4}a\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{|a_n|}\times(a_{2n}+5a_{3n})\right\}$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = 0$.

28. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=x-\ln f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g'(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

$f(-1)=5$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

$g: \mathbb{R} \rightarrow$ ___. $f(x)>0$.

$g'(x) = 1-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)} \geq 0$. $g'(0)=0$. $f(0)=f'(0). >0$.

$g'(x)$가 $x=0$에서 최소. $g''(0)=0$.

$g''(x) = \frac{\{f'(x)\}^2-f(x)f''(x)}{\{f(x)\}^2}$ $\{f'(0)\}^2 = f(0)f''(0)$. $f(0)=f'(0)=f''(0). >0$.

$\therefore f(x) = x^4+ax^3+bx^2+2bx+2b. = x^4+4x^2+8x+8.$

$f(x)-f'(x) = x^4+(a-4)x^3+(b-3a)x^2.$
$= x^2\{x^2+(a-4)x+(b-3a)\} \geq 0.$

$x^2+(a-4)x+(b-3a)=0$의 판별식
$D=(a-4)^2-4(b-3a)$
$= a^2+4a+16-4b \leq 0.$ …(*)

$f(-1) = 1-a+b=5$. $b=a+4$.

(*)에 대입. $a^2+4(a+4)-4(a+4) = a^2 \leq 0$. $\therefore a=0$. $b=4$. ✓

$f(2) = 16+16+16+8=56$.

Q. $f(x)>0$?

$(x^2)^2+4(x+1)^2+4 \geq 4$로 확인하고 넘어가도 good!

$f(x) = x^4+4x^2+8x+8$. $f'(x) = 4x^3+8x+8$. $f''(x)=12x^2+8>0$.

$f'(x)=0$ 실근 1개. α.
$\alpha^3+2\alpha+2=0$. $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ ✓ ($\because$ 사잇값 정리…).

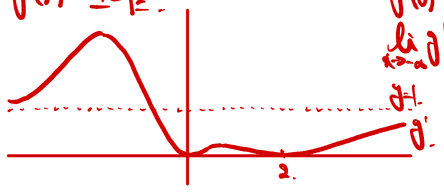
f. $x=\alpha$에서 극소 & 최소.

$f(\alpha) = \alpha^4+4\alpha^2+8\alpha+8 = \alpha(\alpha^3+2\alpha+2)+2\alpha^2+6\alpha+8$.

$= 2\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}. > 4.$

A. Yes!
($\alpha \sim -0.77$. $f(\alpha) \sim 4.56$.)

$y=g'(x)$ 그래프.

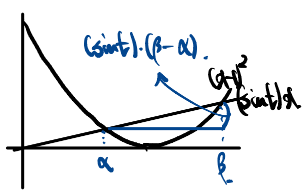


$g'(0)=g'(2)=0$. $g''(0)=g''(2)=0$.
$\lim_{x\to-\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} g'(x) = 1$.

단답형

29. $0<t<\pi$인 실수 t에 대하여 직선 $y=(\sin t)x$가 곡선 $y=(x-1)^2$과 만나는 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때,

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t\sqrt{t}}{f(t)-2\sqrt{\sin t}}$ 의 값을 구하시오. [4점] 4.



$(x-1)^2=(\sin t)x$.

$x^2-(\sin t+2)x+1=0$의 두 실근 $\alpha<\beta$.

$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{(\sin t+2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{1}=\sqrt{\sin^2 t+4\sin t}$.

$\therefore f(t)=\sqrt{1+\sin^2 t}\,(\beta-\alpha)$.

$=\sqrt{1+\sin^2 t}\cdot\sqrt{\sin^2 t+4\sin t}$.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t\sqrt{t}}{f(t)-2\sqrt{\sin t}}=\lim\limits_{t\to 0+}\left\{\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{(1+\sin^2 t)(\sin t+4)}-2}\right\}$

$(1+\sin^2 t)(\sin t+4)=\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4$

$\dfrac{t}{\sqrt{\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4}-2}$

$=\dfrac{t\cdot\left(\sqrt{\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4}+2\right)}{\sin t\,(\sin^2 t+4\sin t+1)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\left\{\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}}\cdot\dfrac{t}{\sin t}\cdot\dfrac{\sqrt{\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4}+2}{\sin^2 t+4\sin t+1}\right\}$

$=1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{4}+2}{1}=4$.

sol 3> (나) 양변 적분. $(-\infty, 0]$의 부분집합에서!

$\int_{-\ln 3}^{0}\{f(x)+f(e^{-x})\}dx=\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx+\int_{-\ln 3}^{0}f(e^{-x})dx$ $\quad e^{-x}=s$.

$=\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx+\int_{3}^{1}f(s)\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)ds$.

$=\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx+\int_{1}^{3}\frac{1}{s}f(s)ds$

$=\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx+\int_{1}^{3}\left(\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}\right)ds$.

$=\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(s)ds-\int_{1}^{3}f(s)ds-3\ln 3$.

$\therefore k=\ln 27+\int_{1}^{3}f(s)ds+\int_{2}^{3}f(s)ds$.

$=\ln 27+2\ln(s+1)\Big|_{1}^{3}+2\ln(s+1)\Big|_{2}^{3}$

$=\ln 27+2\ln 2+2\ln\frac{4}{3}=\ln 192$. $\quad e^k=192$.

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\ge 0$일 때, $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$이다.
>
> (나) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)+f(e^{-x})=3$이다.

$\int_{-\ln 3}^{3}f(x)\,dx=k$일 때, e^k의 값을 구하시오. [4점] 192

sol 1> $\int_{0}^{3}f(x)dx=2\ln(x+1)\Big|_{0}^{3}=\ln 16$.

$x<0$. $\quad f(x)=3-f(e^{-x})$.

$\int_{-\ln 3}^{0}f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}\{3-f(e^{-x})\}dx$.

$=3\ln 3+\int_{-\ln 3}^{0}-f(e^{-x})dx$. $\quad e^{-x}=t$.

$=\ln 27+\int_{3}^{1}f(t)\cdot\frac{1}{t}dt$.

$=\ln 27+\int_{3}^{1}\frac{2}{t(t+1)}dt=\ln 27+\int_{1}^{3}\left(\frac{2}{t+1}-\frac{2}{t}\right)dt$.

$=\ln 27+\{2\ln(t+1)-2\ln t\}\Big|_{1}^{3}$

$=\ln 27+2\ln 2-2\ln 3=\ln 12$.

$\therefore k=\ln 16+\ln 12=\ln 192$. $\quad e^k=192$.

sol 2> ⋯ $=3\ln 3+\int_{-\ln 3}^{0}-f(e^{-x})dx$. $\quad e^{-x}>0$.

$=\ln 27-\int_{-\ln 3}^{0}\frac{2}{e^{-x}+1}dx$.

$=\ln 27-\int_{-\ln 3}^{0}\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}dx$.

$=\ln 27-2\ln(1+e^{x})\Big|_{-\ln 3}^{0}$

$=\ln 27-2\ln 2+2\ln\frac{4}{3}=\ln 12$. ⋯

sol 2-1> ⋯ $=\ln 27-\int_{-\ln 3}^{0}\frac{2}{e^{-x}+1}dx$. $\quad e^{-x}+1=u$

$=\ln 27-\int_{2}^{4}2\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{u-1}du$.

$=\ln 27-\{2\ln(u-1)-2\ln u\}\Big|_{2}^{4}=\ln 12$ ⋯

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.