2025학년도 제2회

『挫折模擬考査』

『좌절모의고사』

목차

공통과목 해설

(2쪽부터 7쪽까지)

1. [2점] ◇◇◇

지수법칙에 의하여

$$(9\times 3^{\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}=(3^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}=3^{4-2}=9$$

를 얻는다.

2. [2점] ◇◇◇

함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=3ax^2+1$이다. 이때

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=7$$

이므로 $f'(1)=3a+1=7$에서 $a=2$이다.

3. [3점] ◇◇◇

삼각함수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2&=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

이고, 이 값이 $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$을 얻는다.

4. [3점] ◇◇◇

우선 함수가 실수 전체의 집합에서 정의되어야 하므로 $a=3$이어야 한다. 또, $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$k=\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

을 얻는다. 따라서 $a+k=3+6=9$이다.

5. [3점] ◈◇◇

부정적분과 미분의 관계에 의하여

$$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x-1\right)\right\}dx=\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x+C$$

이다. (단, C는 적분상수) 이때 $f(2)=4$이므로

$$f(2)=C=4$$

이고 따라서 $f(0)=4$이다.

6. [3점] ◈◇◇

〔해제의 급소〕 등비중항

> 등비중항을 이용하면 간단히 풀리는 문제다. 모든 걸 초항과 공비로만 풀려는 것은 시간 낭비.

등비중항의 성질에 의하여

$$a_1a_7=a_4^2=144$$

이다. 첫째항이 양수이고 공비가 1보다 크므로 $a_4>0$이고, 따라서 $a_4=12$를 얻는다. 등비수열의 공비를 r $(r>1)$이라 놓으면 $a_3=\frac{12}{r}$, $a_5=12r$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{12}{r}+12r=40\quad\Rightarrow\ 12+12r^2=40r\\&\Rightarrow\ 3r^2-10r+3=0\quad\Rightarrow\ (3r-1)(r-3)=0\end{aligned}$$

이때 $r>1$이므로 $r=3$이어야 한다. 따라서 $a_2=\frac{4}{3}$.

7. [3점] ◈◇◇

$f(x)$를 미분하면 $f'(x)=12x^3-6x^2=3x^2(2x-1)$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값을 갖는다.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}-\frac{1}{4}-k=-1$$

이어야 하므로 $k=\frac{15}{16}$를 얻는다.

8. [3점] ◆◇◇

〔해제의 급소〕 곡선 밖에서 그은 접선의 방정식

> 방법만 알면 금방 풀 수 있는 문제.

원점에서 곡선 $y=x^3+x^2+3$에 그은 접선이 곡선과 접하는 점을 $(t,\,t^3+t^2+3)$으로 놓을 때 접선의 기울기는 $3t^2+2t$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2+3$$

이며 이 접선이 원점을 지나므로

$$\begin{aligned}&0=(3t^2+2t)(-t)+t^3+t^2+3\\&\Rightarrow\ 2t^3+t^2-3=0\quad\Rightarrow\ (t-1)(2t^2+2t+3)=0\end{aligned}$$

에서 $t=1$이어야 한다. 이때 접선의 방정식을 구하면 $y=5x$이다.

한편 이 접선이 곡선 $y=x^4+9x+k$와 접하려면 $y'=4x^3+9$의 값이 접선의 기울기인 5와 같은 지점을 찾아야 한다.

$$4x^3+9=5\quad\Rightarrow\ x^3=-1$$

에서 $x=-1$이어야 하고, 이 점의 좌표는 $(-1,\,k-8)$이다. 그런데 이 점이 직선 $y=5x$ 위에 있으므로

$$k-8=-5$$

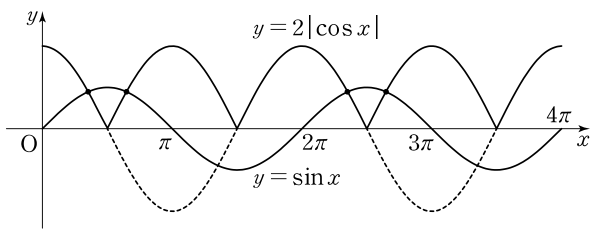
에서 $k=3$으로 구할 수 있다.

9. [4점] ◆◇◇

〔해제의 급소〕 삼각방정식에서 대칭성의 활용

> 단골소재이므로 확실하게 해놓자. 대칭축이 어디인지 알면 합은 대칭축의 두 배로 간단히 계산할 수 있다.

$0 \le x \le 4\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=2|\cos x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 확인할 수 있듯이 두 곡선은 서로 다른 네 점에서 만나고, 왼쪽의 두 점은 $x=\frac{\pi}{2}$에, 오른쪽의 두 점은 $x=\frac{5\pi}{2}$에 대칭이므로 네 점의 x좌표의 합은

$$\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{5\pi}{2}\times 2=6\pi$$

가 된다.

10. [4점] ◆◇◇

〔해제의 급소〕 수열에서 절댓값 처리

> 절댓값이 씌워져 있는 항이 조건으로 나왔을 때는 우선 안쪽의 부호로 경우부터 나누고 보는 것이 당연하다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\,(d<0)$이라 하자. 만약 $a_9 \ge 0$이라면

$$a_5+a_9=2a_7=|a_7|$$

에서 $a_7=0$이므로 모순이다. 따라서 $a_9<0$이어야 하고,

$$|a_7|=a_5-a_9=-4d$$

이다. 만약 $a_7>0$이라면 $a_7=-4d$여야 하므로 $a_9=-6d>0$에서 모순이다. 따라서 $a_7<0$이고, $a_7=4d$이다.

이제 조건 (나)를 살피면 $a_3=0$, $a_6=3d$에서 $9d^2=12$이므로 $d^2=\frac{4}{3}$이다. $a_7=4d$, $a_9=6d$이므로 $a_7\times a_9=24d^2=32$이다.

11. [4점] ◆◈◇

〔해제의 급소 ①〕 수직선 위에서 움직이는 점

> 위치, 이동거리, 속도, 속력, 가속도 등 기본 개념은 당연히 숙지하고 있어야 한다.

〔해제의 급소 ②〕 적분상수의 결정

> 특히 수직선 상의 점 문제에서 적분상수에 대한 힌트를 "t=0일 때 ~를 출발하여"와 같이 줄 때가 많으니 발문을 유심히 읽자. 단, 구간별로 주어졌다면 적분상수는 위치함수의 연속성으로 결정.

점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$는

$$x(t)=\begin{cases} 6t^2-t^3+C_1 & (0\le t\le 4) \\ -t^2+kt+C_2 & (t>4) \end{cases}$$

이다. (단, C_1, C_2는 적분상수) $x(0)=-16$이어야 하므로 $C_1=-16$을 얻는다. 또, 원래 주어진 식에서 $v(4)=0$이라는 것은 $x(t)$가 $t=4$에서 미분가능하다는 뜻이므로 $k=8$이어야 한다.
이제 $x(t)$가 $t=4$에서 연속이므로

$$96-64-16=-16+32+C_2$$

에서 $C_2=0$이다. 이제 점 P의 위치가 $t=\alpha\ (\alpha>0)$에서 0이 되려면, $0<\alpha\le 4$인 경우

$$6\alpha^2-\alpha^3-16=0 \quad \Rightarrow \alpha^3-6\alpha^2+16=0$$
$$\Rightarrow (\alpha-2)(\alpha^2-4\alpha-8)=0$$
$$\Rightarrow \alpha=2 \text{ 또는 } \alpha=2\pm2\sqrt{3}$$

에서 $\alpha=2$여야 하며, $\alpha>4$인 경우

$$-\alpha^2+8\alpha=0 \quad \Rightarrow \alpha(\alpha-8)=0$$

에서 $\alpha=8$이어야 하므로, 모든 α의 값의 합은 $2+8=10$이다.

12. [4점] ◆◈◇ [융합]

〔해제의 급소〕 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이

> 특이하게도, 적분하는 법을 배우지 않은 함수가 등장한다. 그런데 이 함수는 펼쳐보면 원의 방정식이 나오므로, 주어진 영역을 적당히 나누어서, 한 쪽은 수Ⅱ의 내용으로, 다른 쪽은 중학도형으로 푼다.

주어진 영역을 직선 $y=-x+2$로 나누면 한쪽은 활꼴 모양의 영역 A가 되고, 다른 쪽은 직선과 삼차함수로 둘러싸인 영역 B가 된다. 우선 영역 A의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{4}\times 4\pi-\frac{1}{2}\times 2\times 2=\pi-2$$

이다. 또한 영역 B의 넓이를 구하면

$$\int_0^2\left((2-x)-\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2\right)\right)dx$$
$$=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^2=-2-4+10=4$$

이므로, 구하는 영역의 넓이는 $\pi-2+4=\pi+2$이다.

13. [4점] ◆◆◇ [신유형]

〔해제의 급소 ①〕 사인 법칙의 활용

> 외접원의 반지름의 길이가 나오면 일단 사인 법칙을 생각하는 것이 문제 풀이의 기본.

〔해제의 급소 ②〕 코사인 법칙 및 넓이공식의 활용

> 코사인 법칙을 써서 식 하나를 얻고, 넓이공식을 써서 식 하나를 얻은 후에 이 둘을 연립하여 풀어야 깔끔하다.

삼각형 ABC에서 사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}} = 4\sin(\angle\mathrm{BAC}) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

이다. 여기에서 삼각형 ABD의 넓이를 이용할 사실상의 유일한 방법은 두 변 AB, AD의 길이로 식을 세우는 것뿐이므로 $\overline{\mathrm{AB}} = x$, $\overline{\mathrm{AD}} = y$라 놓자. 이때 $\overline{\mathrm{AC}} = y$이다.

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$이므로, 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos(\angle\mathrm{BAC}) = \overline{\mathrm{BC}}^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - xy = 12 \ \cdots \ (\text{ㄱ})$$

를 얻는다. 또한, 삼각형 ABD에서 $\angle\mathrm{BAD} = \frac{2\pi}{3}$이므로 넓이공식에 의하여

$$\frac{1}{2}xy\sin(\angle\mathrm{BAD}) = 3 \quad \Rightarrow xy = 4\sqrt{3} \ \cdots \ (\text{ㄴ})$$

을 얻는다.

이제 (ㄴ)을 (ㄱ)에 대입하면

$$x^2 + y^2 = 12 + 4\sqrt{3}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\angle\mathrm{BAD})$$
$$= x^2 + y^2 + xy$$

이므로 구하는 값은 $(12 + 4\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3}$이다.

14. [4점] ◆◆◈ [고난도] [계산]

〔해제의 급소 ①〕 귀납적으로 주어진 수열에서의 조건 활용

> 귀납적으로 주어진 수열에서 조건을 활용할 때는 일단 최소한의 항만으로 생각한다. 초항을 추론하는 건 그 다음.

〔해제의 급소 ②〕 역방향 추론

> 귀납적으로 주어진 수열에서 역방향으로 추론할 때, 즉 이후의 항으로 이전의 항을 추론할 때는, 주어진 귀납적 관계를 구간별 함수로 나타내는 것이 효과적일 때가 있다. 이렇게 하면 불가능한 값이 무엇인지 한 눈에 보이기 때문이다.

수열 $\{a_n\}$의 초항이 실수인 경우만을 고려하므로, 귀납식에 의하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 실수이다. 이제 주어진 조건 $a_2 + a_4 = -2$를 이용하기 위하여 $a_2 = k$라 두고 경우를 다음과 같이 나눈다.

(ⅰ) $a_2 > 1$인 경우

$a_3 = 1 - a_2 < 0$이므로 $a_4 = \frac{4}{2 - a_3} = \frac{4}{k+1}$이다. 주어진 조건 $a_2 + a_4 = -2$에 이를 대입하면

$$k + \frac{4}{k+1} = -2 \quad \Rightarrow k^2 + 3k + 6 = 0$$

이므로 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2 \le 1$이고 $a_3 > 1$인 경우

$a_3 = \frac{4}{2-k}$이고, $a_3 > 1$을 가정하므로 $a_4 = 1 - \frac{4}{2-k}$이다. 이를 $a_2 + a_4 = -2$에 대입하면

$$k + 1 - \frac{4}{2-k} = -2 \quad \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (k+2)(k-1) = 0$$

이므로 $k = -2$ 또는 $k = 1$이다. 그런데 $k = -2$를 대입하면 $a_3 = 1$이므로 모순이다. 즉, $k = 1$이어야 한다.

(ⅲ) $a_2 \le 1$이고 $a_3 \le 1$인 경우

$a_3 = \frac{4}{2-k}$이고, $a_3 \le 1$이어야 하므로 $k \le -2$이고

$$a_4 = \frac{4}{2 - \frac{4}{2-k}} = \frac{2(k-2)}{k}$$

이다. 이를 $a_2 + a_4 = 0$에 대입하면

$$k + \frac{2(k-2)}{k} = -2 \quad \Rightarrow k^2 + 4k - 4 = 0$$
$$\Rightarrow k = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

인데, $k \le -2$에서 $k = -2 - 2\sqrt{2}$여야 한다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 a_2의 값으로 가능한 수는 1, $-2-2\sqrt{2}$의 두 개뿐이다. 이제 a_1의 값을 구해 본다.

만약 $a_1 > 1$이라면 $a_2 = 1 - a_1$에서 a_1의 값은 -1 및 $3 + 2\sqrt{2}$로 구할 수 있는데, $a_1 > 1$이므로 $a_1 = 3 + 2\sqrt{2}$여야 한다.

만약 $a_1 \le 1$이라면 $a_2 = \frac{4}{2 - a_1}$에서 a_2의 값이 양수여야 한다. 따라서 $a_2 = 1$인 경우를 고려하면 $a_1 = -2$를 얻는다.

따라서 a_1의 값으로 가능한 모든 실수의 합은 $1 + 2\sqrt{2}$이다.

15. [4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 삼차함수 그래프에서의 복잡한 추론

> 딱히 무언가 이 문제에서 "스킬"을 써야 한다고 생각되는 부분은 없다. 그냥 논리적 추론 및 직관을 잘 써야 한다는 것 정도.

〔해제의 급소 ②〕 극한값이 무시하는 것

> 극한값은 기준점 주위에 있는 유한 개의 예외는 무시한다. 이것을 직관적으로 이해하지 못하면 문제 해결에 다소간의 애로사항이 생긴다.

주어진 방정식이 나타내는 도형은 삼차함수 $y=x^3+9x^2+24x$와 일차함수 $y=f(x)$의 그래프를 합집합한 모양이다. 이때 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+9x^2+24x$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

곡선에 직선을 섞음으로써 대부분의 t의 값에 대해서는 그저 $g(t)=h(t)+1$인 결과가 나올 것이다. 그런데 곡선과 직선이 만나는 점의 y좌표에 해당하는 t의 값에서는 $g(t)=h(t)$이다. 이러한 예외적인 상황은 곡선과 직선의 교점에서만 생기므로, 최대 3개의 t의 값에서만 이러한 상황이 일어날 수 있다.

다시 말해, $g(t)$는 $h(t)+1$에서 "최대 3개"의 점만을 바꾸어놓은 함수이다. 극한은 주변에 있는 유한 개의 점은 무시하므로,

$$\lim_{t\to k+} g(t)=\lim_{t\to k+} h(t)+1$$

이 성립해야 한다. 좌극한에서도 마찬가지. 따라서 조건의 등식은

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t)-\lim_{t\to k-} h(t)\right|=g(k)$$

와 같은 말이다. 삼차함수의 그래프에서 위 식의 좌변이 가질 수 있는 값은 0과 2뿐임이 당연하므로 $g(k)=0$ 또는 $g(k)=2$이다.

그런데 $g(t)=0$이 되는 것은 절대 불가능하다. 따라서 주어진 조건의 등식을 만족시키는 실수 k는 $g(k)=2$를 만족시켜야 하고,

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t)-\lim_{t\to k-} h(t)\right|=2$$

이므로 직선 $y=k$는 곡선 $y=x^3+9x^2+24x$의 극점을 지난다.

극점이 중요한 상황임은 분명하므로 $P(x)=x^3+9x^2+24x$를 미분하자. $P'(x)=3x^2+18x+24=3(x+2)(x+4)$이므로 함수 $P(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 M을, $x=-2$에서 극솟값 m을 갖는다. (M와 m의 값은 나중에 필요하면 계산한다.) 위에서 구한 k의 값 두 개가 M과 m이 된다.

한편 직선 $y=f(x)$가 $y=M$과 만나는 지점이 곡선 $y=P(x)$ 위가 아니면 $g(M)=3$이어야 하는데 이는 모순이다. 따라서 직선 $y=f(x)$는 곡선과 $y=M$이 만나는 지점 중 하나를 지나야 한다. 이는 직선 $y=m$에 대해서도 마찬가지이다.

따라서 이 지점들의 위치를 구해 보자. 인수정리에 의하여

$$P(x)=(x+4)^2(x+1)+M,$$
$$P(x)=(x+2)^2(x+5)+m$$

이므로 직선 $y=f(x)$는 $(-1, M)$ 및 $(-4, M)$ 중 하나의 점을, 그리고 $(-2, m)$ 및 $(-5, m)$ 중 하나의 점을 지난다.

이제 M과 m의 값이 필요한 것이 확실하므로 구해 놓자.

$$M=P(-1)=-1+9-24=-16,$$
$$m=P(-2)=-8+36-48=-20$$

이다. 네 점 $(-1, -16)$, $(-4, -16)$, $(-2, -20)$, $(-5, -20)$을 그려 놓고 이어 보면,

$f(6)$이 최대가 될 때 $(-4, -16)$ 및 $(-5, -20)$을 선택하여 직선의 방정식은 $y=4x$,
$f(6)$이 최소가 될 때 $(-4, -16)$ 및 $(-2, -20)$을 선택하여 직선의 방정식은 $y=-2x-24$

와 같다. 즉 최댓값은 24, 최솟값은 -36이고, 그 합은 -12이다.

16. [3점] ◇◇◇

$$\sum_{n=1}^{12} n^2=\frac{12\times13\times25}{6}=650$$이다.

17. [3점] ◇◇◇

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$
$$=2f'(1)+2g'(1)=2(f'(1)+g'(1))=6$$

으로 구할 수 있다.

18. [3점] ◈◇◇

자연수 x에 대하여 $\log_3\frac{5x-1}{6}\geq\log_3\frac{2}{3}>-1$이므로 $\log_3\frac{5x-1}{6}$의 값이 0, 1, 2, …인 경우에 대해 차례로 x의 값이 정수인지 확인한다. 0인 경우 $\frac{5x-1}{6}=1$에서 $x=\frac{7}{5}$이므로 불가능하고, 1인 경우 $\frac{5x-1}{6}=3$에서 $x=\frac{19}{5}$이므로 불가능하고, 2인 경우 $\frac{5x-1}{6}=9$에서 $x=11$이므로 가능하다. 따라서 자연수 x의 최솟값은 11이다.

19. [3점] ◆◈◇

〔해제의 급소 ①〕 복잡한 삼각방정식의 풀이

> 삼각방정식이 풀리지 않을 때는 tan를 sin/cos으로 바꾸어 보면 풀리는 경우가 다반사. sin, cos이 들어 있는 이차삼각방정식도 쉽게 풀 수 있어야 한다.

〔해제의 급소 ②〕 당황…하셨어요?

> 26번 자리에 간간이 어려운 문제가 나온다. 당황하지 말 것.

점 A의 x좌표를 t라 하면

$$3k\cos t=3\sqrt{2}(k+2)\sin^2 t=8k\tan t$$

이다. 맨 왼쪽과 맨 오른쪽을 이용하여 방정식을 세우면, $k>0$이므로

$$3k\cos t=8k\tan t \quad\Rightarrow\ 3\cos t=8\tan t$$
$$\Rightarrow\ 3\cos^2 t=8\sin t \quad\Rightarrow\ 3-3\sin^2 t=8\sin t$$
$$\Rightarrow\ 3\sin^2 t+8\sin t-3=0 \quad\Rightarrow\ (3\sin t-1)(\sin t+3)=0$$

에서 $\sin t=\frac{1}{3}$을 얻는다. 따라서 $\cos t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고,

$$3k\cos t=3\sqrt{2}(k+2)\sin^2 t$$
$$\Rightarrow\ 3k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}(k+2)\times\frac{1}{9}$$

을 풀면 $k=\frac{2}{5}$를 얻는다. 점 A의 y좌표는

$$3k\cos t=3\times\frac{2}{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

가 되므로, 구하는 값은 $100\times\frac{32}{25}=128$이다.

20. [4점] ◆◈◇

〔해제의 급소 ①〕 미분변수가 피적분함수에 들어있는 경우

> 미분변수 x가 피적분함수(적분당하는 함수)에 들어 있는 경우, 어떤 방법을 써서든 이것을 바깥으로 끄집어내야 한다. 미분하는 것은 그 다음 일.

〔해제의 급소 ②〕 정적분함수에서 대입의 중요성

> 대입하는 것을 까먹고 하지 않아 헤매는 경우가 잦다. 엔간하면 아래 풀이와는 다르게 식 (ㄱ)을 찾자마자 대입하는 것을 추천한다.

주어진 등식에 $x=1$을 대입하면 $0=1+a+b$에서 $a+b=-1$이다. 이제 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$\int_1^x (2t+1)F(t)dt - x\int_1^x F(t)dt$$

이므로, 양변을 미분하면

$$(2x+1)F(x) - xF(x) - \int_1^x F(t)dt = 5x^4+2ax+b$$

$$\Rightarrow (x+1)F(x) - \int_1^x F(t)dt = 5x^4+2ax+b \ \cdots \ (ㄱ)$$

이다. 양변을 다시 미분하면

$$(x+1)f(x)+F(x)-F(x) = 20x^3+2a$$
$$\Rightarrow (x+1)f(x) = 20x^3+2a$$

이때 양변에 $x=-1$을 대입하면 $0=-20+2a$이므로 $a=10$이고, $b=-11$이다. 한편 $x\neq-1$에서 $f(x)=20(x^2-x+1)$이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(-1) = \lim_{x\to-1} 20(x^2-x+1) = 60$$

을 얻는다.

한편 식 (ㄱ)에 $x=1$을 대입하면

$$2F(1) = 5+20-11 = 14$$

이므로 $F(1)=7$이다. 따라서 구하는 값은

$$f(-1)+F(1) = 60+7 = 67$$

이 된다.

21. [4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 움직이는 구간에서의 최대·최소함수

> 움직이는 구간에서의 최대·최소함수는 구간 내에서 기준함수가 갖는 극대·극소와 양끝점을 따진다. 결국 원래 하던 것과 똑같은 것.

〔해제의 급소 ②〕 방정식의 해석

> 주어진 방정식을 M(x)+m(x)=k 그대로 해석하면 미적분을 배웠다 할지라도 해석이 힘들어진다. 당연히 M(x)=-m(x)+k 따위로 변형해야 할 것이다.

함수 $y=|f(x)|=|2^x-4|$는 $x\leq2$에서 감소하고 $x\geq2$에서 증가하는 함수이며, $x=2$에서 최솟값 0을 갖는다.

우선 최솟값 함수 $m(t)$부터 구해 본다. 만약 구간 $[t, t+1]$ 전체가 $x=2$의 왼쪽에 있다면 $m(t)=|f(t+1)|$이 된다. 또한 구간 $[t, t+1]$ 전체가 $x=2$의 오른쪽에 있다면 $m(t)=|f(t)|$가 된다. 한편, $[t, t+1]$이 $x=2$를 포함하는 상황에서는 $m(t)$의 값이 0이 된다.

다음으로 최댓값 함수 $M(t)$를 구해 본다. 함수 $y=|2^x-4|$는 극대점이 없으므로 구간 $[t, t+1]$에서의 최댓값은 항상 양끝점에서 일어난다. 즉, $M(t)$는 $|f(t)|$와 $|f(t+1)|$ 중 작지 않은 것을 취하는 함수로 이해할 수 있다. 따라서 $|f(t)|=|f(t+1)|$이 되는 시점을 아는 것이 중요하다. $y=|f(x)|$의 그래프에 의하여 $t<2<t+1$이어야 함은 분명하므로

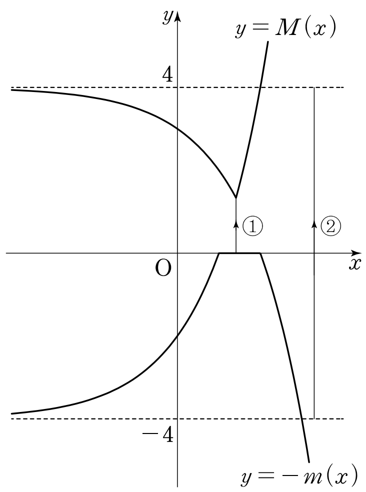
$$|f(t)|=|f(t+1)| \quad \Rightarrow -f(t)=f(t+1)$$
$$\Rightarrow f(t)+f(t+1)=0 \quad \Rightarrow 2^t-4+2^{t+1}-4=0$$
$$\Rightarrow 3\times2^t=8 \quad \Rightarrow 2^t=\frac{8}{3} \quad \Rightarrow t=\log_2\frac{8}{3}=3-\log_2 3$$

을 얻는다. 따라서 $t<3-\log_2 3$에서 $M(t)=|f(t)|$이고, $t\geq3-\log_2 3$에서 $M(t)=|f(t+1)|$이다.

고려해야 하는 방정식은 $M(t)+m(t)=k$이고, 이를

$$M(t) = -m(t)+k$$

로 해석하면 그래프 해석이 가능해질 것이다. 따라서 두 함수 $y=M(x)$와 $y=-m(x)$의 그래프를 각각 그려 보면 다음과 같다.



위 그림에서 화살표로 연결된 직선은 $g(k)$가 불연속이 되는 k의 값을 시각화한 것이다.

①의 상황에서 k의 값은

$$M\left(\log_2\frac{8}{3}\right) = \left|f\left(\log_2\frac{8}{3}\right)\right| = \left|\frac{8}{3}-4\right| = \frac{4}{3}$$

로 구할 수 있으며, ②의 상황에서 k의 값은 두 점근선 사이의 거리인 8이다.

따라서 함수 $g(k)$가 $k=\alpha$에서 불연속이도록 하는 모든 실수 α의 값의 합은 $\frac{4}{3}+8=\frac{28}{3}$이므로, $p+q=3+28=31$이다.

22. [4점] ◆◆◆ [최고난도]

〔해제의 급소 ①〕 근과 계수의 관계

근과 계수의 관계는 절대 까먹어서는 안 될 내용이다. 실제 시험에서 이 정도로 나올 리는 없겠지만, 그래도 알고는 있어야 할 내용이다.

〔해제의 급소 ②〕 방정식의 근의 범위

이 문제의 핵심이 되는 내용으로, 네 실근을 크기순으로 나열했을 때 각 근이 존재할 수 있는 범위가 정해진다는 것을 알고 있어야 한다. 이 부분을 놓치면 아예 문제의 답이 나오질 않는다.

〔해제의 급소 ③〕 끈기있는 분석 능력

발문 자체를 이해하고 분석하는 데까지의 시간이 오래 걸릴 뿐만 아니라, 잔계산도 상당히 많다. 이 문제를 푸는 것에는 강인한 정신력이 필요할 뿐만 아니라 이전 문항들을 빠르게 해결해 놓았다는 전제 또한 필요하다.

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 4이도록 하는 실수 t의 값의 범위를 우선 알아야 하므로, 함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2-72x=4x(x+3)(x-6)$$

에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=0$, $x=6$에서 차례로 극소, 극대, 극소이다. 두 극솟값의 대소관계는 $f(-3)>f(6)$임이 당연하므로, 방정식 $f(x)=t$가 서로 다른 네 실근을 갖기 위해서는 $f(-3)<t<f(0)$이어야 한다.

한편, 네 실수 α_1, α_2, α_3, α_4는 방정식

$$x^4-4x^3-36x^2+3-t=0 \ \cdots \text{(ㄱ)}$$

의 서로 다른 네 실근이므로, 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=3-t$$

가 성립한다. 즉, 주어진 등식 $g(\alpha_2)-40=\alpha_1\alpha_3\alpha_4$를

$$g(\alpha_2)-40=\frac{3-t}{\alpha_2} \ \cdots \text{(ㄴ)}$$

과 같이 쓸 수 있다. 그런데 여기에서 α_2는 방정식 (ㄱ)의 근이므로

$$\alpha_2{}^4-4\alpha_2{}^3-36\alpha_2{}^2+3-t=0$$
$$\Rightarrow 3-t=-\alpha_2{}^3+4\alpha_2{}^2+36\alpha_2$$

가 성립한다. 이를 (ㄴ)에 대입하면

$$g(\alpha_2)=-\alpha_2{}^3+4\alpha_2{}^2+36\alpha_2+40$$

을 얻는다. 따라서 실수 α_2는 두 함수 $y=-x^3+4x^2+36x+40$과 $y=g(x)$의 그래프의 한 교점의 x좌표이다. 이때 편의를 위하여 $p(x)=-x^3+4x^2+36x+40$이라 놓자.

위 문단에 의하여 네 실근 중에서 α_2의 값이 특히 중요하다는 것을 알 수 있다. 그런데 α_2가 취할 수 있는 값에는 제한이 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형에 의하여 α_2는 반드시 $x=-3$과 $x=0$ 사이에 있어야 하므로, $-3<\alpha_2<0$이 성립해야 한다. 또한 $-3<\alpha_2<0$과 $f(-3)<t<f(0)$의 범위에서 α_2와 t는 서로 일대일 대응 관계임을 알 수 있다.

지금까지의 논의를 종합하면, α_2는

- $-3<\alpha_2<0$인 실수이고,
- $y=g(x)$와 $y=p(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이며,
- 실수 t의 값에 일대일로 대응된다.

따라서 $h(k)=2$라는 사실을 달리 말하면

- $y=g(x)$와 $y=p(x)$의 그래프는 $-3<x<0$인 곳에서 정확히 두 번 만난다.

와 같이 요약할 수 있다.

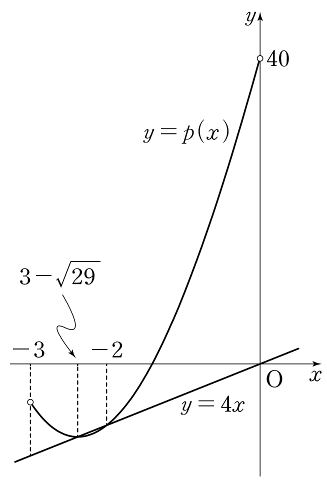
한편 함수 $g(x)$에서 $x<k$인 부분은 $4x$로 고정되어 있다. 따라서 $x<k$에서 $p(x)=g(x)$를 분석하기 더 수월하므로 이쪽을 먼저 고려한다. 방정식 $-x^3+4x^2+36x+40=4x$를 풀면

$$x^3-4x^2-32x-40=0$$
$$\Rightarrow (x+2)(x^2-6x-20)=0$$
$$\Rightarrow x=-2 \text{ 또는 } x=3\pm\sqrt{29}$$

이므로 주어진 구간 $-3<x<0$에서 주목할 만한 근은 $x=-2$와 $x=3-\sqrt{29}$뿐이다.

$x\ge k$에서의 분석은 식보다는 그래프가 더 편하다. 일단 함수 $g(x)$가 무엇인지부터 규명해 보자. $x<k$에서는 $y=4x$를 따라가다가, $x\ge k$에서는 $y=20x-16k$를 따라가는 함수이다. 특히, $x=k$에서 연속이므로 $y=4x$를 따라가다가 $x=k$에서 기울기를 20으로 꺾어 진행하는 그래프라 이해할 수 있다.

이제 함수 $y=p(x)$의 그래프와 직선 $y=4x$를 모두 그려 보면 다음과 같다. (그림은 실제보다 y축의 방향으로 10배만큼 축소했기 때문에 기울기가 이상해 보일 수 있다.)



그림에서 알 수 있듯이, 만약 꺾는 지점 $x=k$가 -2보다 왼쪽이라면 $h(k)=3$이 되는 것이 도저히 불가능하다. 한편, 꺾는 지점이 정확히 $k=-2$라면, 꺾은 후의 y절편이 40보다 작으면 가능하다. 실제로 $k=-2$일 때 $g(x)$는 $x\ge k$에서 $20x+32$와 같으므로 $k=-2$가 가능하다.

이제 $k>-2$인 경우를 생각해 보자. 이미 $x=3-\sqrt{29}$와 $x=-2$에서 실근을 가졌으므로, $x\ge k$에서는 정확히 하나의 실근만을 가져야 한다. 이렇게 되는 것은 곡선 $y=p(x)$와 직선 $y=20x-16k$가 서로 접할 때뿐이다. 따라서 $p'(x)=20$을 풀면

$$-3x^2+8x+36=20 \quad \Rightarrow (3x+4)(x-4)=0$$

이고 주목할 만한 근은 $x=-\frac{4}{3}$뿐이다. 따라서 두 그래프는 이곳에서 접해야 하고,

$$p(x)=20x-16k \text{의 한 실근이 } x=-\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow x^3-4x^2-16x-40=16k \text{의 한 실근이 } x=-\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow 16k=\left(-\frac{4}{3}\right)^3-4\left(-\frac{4}{3}\right)^2-16\left(-\frac{4}{3}\right)-40=-\frac{760}{27}$$
$$\Rightarrow k=-\frac{95}{54}$$

를 얻는다.

따라서 k의 값으로 가능한 모든 수의 합은 $-2-\frac{95}{54}=-\frac{203}{54}$이므로 $-54\times S=203$이다.

선택과목 해설 [확률과 통계]

(8쪽부터 9쪽까지)

23. [2점] ◇◇◇

x^4가 나오는 항은 ${}_5\mathrm{C}_2 \times (x^2)^2 \times 2^3 = 80x^4$이다. 따라서 계수는 80이다.

24. [3점] ◈◇◇

주사위를 세 번 던져 나온 눈의 합이 5 미만일 확률을 고려한다. 나올 수 있는 경우의 수는 $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$의 4가지뿐이므로, 주사위를 세 번 던져 나온 눈의 합이 5 미만일 확률은 $\frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}$이다. 여사건의 확률에 의하여 구하는 확률은 $1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54}$이다.

25. [3점] ◇◇◇

2학년 학생들을 묶어서 나열하면 원순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{4} = 6$가지의 방법이 있는데, 이때 두 학생의 자리를 서로 바꾸는 것을 고려하면, 해당하는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$이다.

26. [3점] ◆◇◇

〔해제의 급소〕 합사건과 곱사건의 확률의 관계

> P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)로 적어놓고 나면 문제가 단숨에 풀린다. 쉽게 풀 수 있어야 하는 문제.

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 된다. 이를 주어진 등식에 대입하면

$$3\mathrm{P}(A) + 3\mathrm{P}(B) - 3\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = 3\mathrm{P}(A) + 2\mathrm{P}(B)$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(B) = 3\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

인데, $\mathrm{P}(B) \neq 0$이므로 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$을 얻는다.

27. [3점] ◆◈◇

〔해제의 급소 ①〕 문제를 읽으세요!

> 발문이 다소 사설틱하지만, 제발 문제 발문을 읽었으면 좋겠다는 마음에서 만들게 된 문제다. 발문을 꼼꼼히 독해하는 습관을 들이자.

〔해제의 급소 ②〕 표본의 합

> 표본의 합과 관련한 문제의 경우, 표본평균을 확률변수로 놓고, (표본의 합)=(표본평균)×(표본의 크기)로 나타내어 해결한다.

강판 25장의 평균 질량을 X라 놓으면, $\mathrm{E}(X) = 350$, $\sigma(X) = \frac{4}{5}$를 얻는다. 한편 최대 적재 중량은 구조 상 적재 중량의 1.1배이므로 8800 kg으로 계산할 수 있고, 강판 25장의 총 질량은 $25X$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(25X \leq 8800) = \mathrm{P}(X \leq 352)$$

와 같다.

이때 X를 표준화하면 $\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)} = \frac{5}{4}(X - 350)$이므로, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X \leq 352) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{5}{4}(352 - 350)\right) = \mathrm{P}(Z \leq 2.5)$$

이다. 표준정규분포의 성질에 의하여

$$\mathrm{P}(Z \leq 2.5) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.9938$$

로 구할 수 있다.

28. [4점] ◆◆◇

〔해제의 급소 ①〕 같은 것이 있는 순열

> 같은 것이 있는 순열의 수는 아주 기본적인 내용이다.

〔해제의 급소 ②〕 경우 분석은 조심히

> 놓치는 경우가 없도록, 중구난방으로 경우를 찾는 것이 아니라 체계적으로 접근해야 한다. 가령 경우를 찾을 때 사전식으로 가장 앞쪽이 작은 것부터 찾아나가는 방법이 있다.

조건 (나)는 $f(1) \times f(2) \times f(3) \times f(4) = N$이 세제곱수라는 말을 하고 있다. 따라서 어떤 세제곱수인지를 기준으로 경우를 나눈다.

(i) $N = 1^3$

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$이어야 하므로 가능한 경우의 수는 1이다.

(ii) $N = 2^3$

가능한 모든 방법은 다음과 같다.

1, 1, 2, 4를 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{2!} = 12$가지,

1, 2, 2, 2를 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{3!} = 4$가지,

를 합하여 총 16가지의 방법이 있다.

(iii) $N = 3^3$

가능한 방법은 1, 3, 3, 3을 나열하는 것뿐이므로 방법의 수는 4가지이다.

(iv) $N = 4^3$

가능한 모든 방법은 다음과 같다.

1, 4, 4, 4를 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{3!} = 4$가지,

2, 2, 4, 4를 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{2!2!} = 6$가지

를 합하여 총 10가지의 방법이 있다.

(v) $N = 5^3$

가능한 방법은 1, 5, 5, 5를 나열하는 것뿐이므로 방법의 수는 4가지이다.

(vi) $N = 6^3$

가능한 모든 방법은 다음과 같다.

1, 6, 6, 6을 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{3!} = 4$가지,

2, 3, 6, 6을 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{2!} = 12$가지,

3, 3, 4, 6을 나열하는 방법의 수 $\frac{4!}{2!} = 12$가지

를 합하여 총 20가지의 방법이 있다.

(i)~(vi)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $1 + 16 + 4 + 10 + 4 + 28 = 63$이다.

29. [4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 확률분포표가 주어지지 않은 이산확률변수

> 이산확률변수의 확률분포표가 주어지지 않았을 때 가장 먼저 해야 할 일은 확률변수가 취할 수 있는 값이 무엇인지 알아내는 것이다. 그 다음에는 각 값을 취할 확률을 구하면 된다.

〔해제의 급소 ②〕 경우의 기준 정하기

> 어떤 변수를 기준으로 경우를 나눌 것인지는 아주 중요한 문제이다. 잘못된 변수로 경우를 나누면 시험 전체에 변수가 생기는 꼴이 된다.

〔해제의 급소 ③〕 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수

> 적당한 변형을 통해 음이 아닌 정수의 합으로 표현한 후 중복조합을 쓰면 쉽게 구할 수 있다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0과 2뿐이다. 따라서 $\mathrm{E}(X)=2\times \mathrm{P}(X=2)$로 계산할 수 있으므로 $\mathrm{P}(X=2)$만 찾으면 된다. 우선 전체 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{H}_{8}={}_{11}\mathrm{C}_{8}=165$로 구해 놓자.

이제 $X=2$인 경우의 수만 구하면 된다. 삼차함수가 서로 다른 두 극값을 가지려면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 판별식에 의하여

$$b^2-3ac>0,\quad b^2>3ac$$

를 얻는다. 즉 $b^2>3ac$이고 $a+b+c+d=12$인 순서쌍의 개수를 구하면 된다. 당연히 b의 값으로 경우를 나눈다. $b=1$인 경우는 당연히 불가능하므로 패스.

$b=2$인 경우 $3ac<4$에서 $(a,c)=(1,1)$이어야 한다. 따라서 이때의 경우의 수는 1이다.

$b=3$인 경우 $3ac<9$에서 ac의 값은 1 또는 2이므로

$$(a,c)=(1,1),\ (1,2),\ (2,1)$$

이 가능하다. 이때의 경우의 수는 3이다.

$b=4$인 경우부터는 개수가 많아진다. <u>$a\neq c$인 경우 $a<c$인 경우만을 표시하고, 실제 경우의 수 계산에서는 두 배</u>하면 된다. $a=c$인 경우는 위 내용과 별개로 그냥 1개로 센다. 이때 (a,c)로 가능한 것은

$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,2)$$

이므로 경우의 수는 10이다.

$b=5$인 경우에서부터는 $a+b+c+d=12$임을 염두에 두어야 한다. 즉 $a+b+c\le 11$인 셈이므로 $a+c\le 6$이고, $3ac<25$에서 $ac\le 8$이다. 그런데 $a+c\le 6$인 (a,c) 중에서 $ac\le 8$이 아닌 것은 $(a,c)=(3,3)$뿐이므로 이때의 경우의 수는 14이다.

$b=6$인 경우에는 $a+b+c\le 10$이므로 $a+c\le 4$인데, 만족시켜야 하는 조건은 $3ac<36$, 즉 $ac\le 11$이므로 $a+b+c+d=12$가 이미 $ac\le 11$의 충분조건이다. 따라서 $b\ge 6$인 경우부터는 $a+b+c+d=12$이기만 하면 충분하다. $a=a'+1$, $b=b'+6$, $c=c'+1$, $d=d'+1$로 놓으면 $a'+b'+c'+d'=3$이므로 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{H}_{3}=20$이다.

즉 구하는 경우의 수는 $1+3+10+14+20=48$이므로 $\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{48}{165}=\dfrac{32}{55}$이다. 따라서 $p+q=55+32=87$이다.

30. [4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 독립시행의 확률

> 독립시행의 확률은 외우는 것이 아니라 느끼는 것이다.

〔해제의 급소 ②〕 복잡한 조건부확률

> 조건부확률이 아무리 복잡해도 결국 본질은 같다. A였을 때 B일 확률을 구하라고 하면, P(A∩B)÷P(A)를 계산하면 된다.

나온 눈이 3의 배수인 사건이 일어난 횟수를 X라 두고, X의 값에 따른 확률을 각각 구해 보자. 단, 주머니에서 임의로 하나 꺼낸 공의 색이 흰색이라 했으므로 $X\neq 0$이다.

(ⅰ) $X=1$

일단 $\mathrm{P}(X=1)$을 구해 보자. 3의 배수인 눈이 나오는 것이 1번, 그렇지 않은 것이 2번이므로 독립시행의 확률에 의하여

$$ {}_{3}\mathrm{C}_{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$$

로 구할 수 있다. 이때 주머니에는 흰 공이 2개, 검은 공이 2개 들어 있으므로 확률은 다음과 같다.

$$([X=1\ \rightarrow\ \text{흰 공}]\text{의 확률})=\frac{6}{27},$$

$$([X=1\ \rightarrow\ \text{흰 공}\ \rightarrow\ \text{검은 공}]\text{의 확률})=\frac{3}{27}$$

(ⅱ) $X=2$

위에서와 마찬가지로 계산하면

$$\mathrm{P}(X=2)={}_{3}\mathrm{C}_{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{27}$$

으로 구할 수 있다. 주머니에는 흰 공이 4개, 검은 공이 1개 들어 있으므로 확률은 다음과 같다.

$$([X=2\ \rightarrow\ \text{흰 공}]\text{의 확률})=\frac{24}{27\times 5},$$

$$([X=2\ \rightarrow\ \text{흰 공}\ \rightarrow\ \text{검은 공}]\text{의 확률})=\frac{24}{27\times 5^2}$$

(ⅲ) $X=3$

위에서와 마찬가지로 계산하면

$$\mathrm{P}(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

이 된다. 주머니에는 흰 공만이 6개 있으므로

$$([X=3\ \rightarrow\ \text{흰 공}]\text{의 확률})=\frac{1}{27},$$

$$([X=3\ \rightarrow\ \text{흰 공}\ \rightarrow\ \text{검은 공}]\text{의 확률})=0$$

으로 구할 수 있다.

(ⅰ)~(ⅲ)의 내용을 종합할 때, 흰 공이 나올 확률은

$$\frac{30+24+5}{27\times 5}=\frac{59}{27\times 5}$$

이고, 흰 공이 나온 후 검은 공이 나올 확률은

$$\frac{75+24}{27\times 5^2}=\frac{99}{27\times 5^2}$$

로 구할 수 있다. 마지막으로 조건부 확률을 구하면

$$\frac{99}{5\times 59}=\frac{99}{295}$$

이므로 $p+q=295+99=394$이다.

선택과목 해설 [미적분]

(10쪽부터 12쪽까지)

23. [2점] ◇◇◇

$f'(x)=2^x\ln 2+4^x\ln 4$이므로 $f'(1)=2\ln 2+4\ln 4=10\ln 2$ 이다.

24. [3점] ◈◇◇

$\sec^2\theta=\dfrac{10}{9}$이므로 $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\dfrac{1}{9}$이다. 따라서 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$이고, 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}\times 1}=2$$

가 된다.

25. [3점] ◆◈◇ **[역배치]**

(해제의 급소) 급수와 정적분의 관계

> 개념이 확실치 않으면 흔들리기 아주 쉬운 부분이다. 꿈결에도 풀 준비가 되어 있도록 한다.

$f(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)$와 같이 쓸 수 있다. 극한값을 구하기 전에, $f(n)-\ln n$부터 간단히 하자.

$$\begin{aligned}f(n)-\ln n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-\ln n\\&=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-n\ln n\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k)-\ln n)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

로 쓸 수 있으므로, 정적분과 급수의 관계에 의하여 구하는 극한값은

$$\int_1^2\ln x\,dx=[x\ln x-x]_1^2=2\ln 2-1$$

이 된다.

26. [3점] ◆◇◇ **[함정]**

직선 $x=k$를 포함하고 x축과 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6\sin x-x^2}$이다. 따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}4(6\sin x-x^2)\,dx&=4\left[-6\cos x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\\&=4\left(6-\frac{7\pi^3}{81}\right)=24-\frac{28\pi^3}{81}\end{aligned}$$

으로 구할 수 있다.

27. [3점] ◆◆◇

(해제의 급소 ①) 삼각함수 극한의 도형 활용

> 요즘에 자취를 감춘 유형이지만, 갑작스레 내도 할 말은 없다.

(해제의 급소 ②) 0으로 가지 않는 극한에의 대처법

> 일반적으로 삼각함수 극한의 도형 활용 문제에서는 변수가 0으로 향하지만, 그러지 않는 경우도 있다. 이때는 간단한 치환을 통해 변수가 0으로 향하는 극한을 강제로 만들어 주면 된다.

사다리꼴의 넓이를 구해야 하니 우선 윗변과 아랫변의 길이를 구한다. 선분 BP를 그리면 삼각형 ABP는 $\angle P$가 직각인 직각삼각형이므로 $\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=4\cos\theta$이다. 또, 선분 QR의 길이는 선분 AP의 길이의 절반으로 주어졌으므로 $\overline{QR}=2\cos\theta$.

이제 높이를 구해 본다. 반원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 선분 AP와 QR에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$$\overline{OH}=\overline{OA}\sin\theta=2\sin\theta,$$
$$\overline{OH'}=\sqrt{\overline{OR}^2-\overline{RH'}^2}=\sqrt{4-\cos^2\theta}$$

로 구할 수 있다. 따라서

$$\overline{HH'}=\sqrt{4-\cos^2\theta}-2\sin\theta$$

이므로 사다리꼴 APQR의 넓이는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 6\cos\theta\times(\sqrt{4-\cos^2\theta}-2\sin\theta)$$

가 된다.

이제 주어진 극한값을 계산해보자. $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$로 놓으면($\varphi$는 '피'라 읽는다) $\varphi\to 0+$, $\sin\theta=\cos\varphi$, $\cos\theta=\sin\varphi$이므로

$$f(\theta)=3\sin\varphi\times(\sqrt{4-\sin^2\varphi}-2\cos\varphi)$$

이고, 이때

$$\begin{aligned}&\lim_{\varphi\to 0+}\frac{\sqrt{4-\sin^2\varphi}-2\cos\varphi}{\varphi^2}\\&=\lim_{\varphi\to 0+}\frac{4-\sin^2\varphi-4\cos^2\varphi}{\varphi^2\times(2\cos\varphi+\sqrt{4+\sin^2\varphi})}\\&=\lim_{\varphi\to 0+}\frac{3\sin^2\varphi}{4\varphi^2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

이므로, 구하는 극한값은

$$\begin{aligned}&\lim_{\varphi\to 0+}\frac{3\sin\varphi\times(\sqrt{4-\sin^2\varphi}-2\cos\varphi)}{\sin^3\varphi}\\&=\lim_{\varphi\to 0+}\frac{3(\sqrt{4-\sin^2\varphi}-2\cos\varphi)}{\varphi^2}\times\frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}\\&=3\times\frac{3}{4}\times 1^2=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

로 구할 수 있다.

28. [4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 합답형에서 힌트 주워먹기

> ㄱ에서 준 힌트를 ㄷ에서 생각해내야 한다.

〔해제의 급소 ②〕 역함수의 미분법

> 이 문제는 역함수의 미분법을 제대로 이해하고 적용할 수 있지 않으면 풀기 어렵다. 역함수의 미분법은 반드시 완벽하게 숙달하자.

〔해제의 급소 ③〕 함수의 볼록성

> 함숫값의 차와 미분계수의 대소관계를 비교하는 것은 함수의 볼록성을 이용하는 것이 일반적이다. 평균값 정리를 통해서 풀 수도 있다.

[ㄱ. (참)] 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하다. 한편, $f'(x)=(x+1)e^x$이고 $f''(x)=(x+2)e^x$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록임을 알 수 있다. 따라서,

$$\frac{g(5)-g(3)}{2}<g'(3)<g'(2)$$

여야 한다.

[ㄴ. (참)] 함수 $g(x)$를 미분해 보자.

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$$

인데, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$이다. 다시 말해, $g(x)e^{g(x)}=x$이므로 $e^{g(x)}=\dfrac{x}{g(x)}$로 쓸 수 있다. 따라서

$$g'(x)=\frac{1}{(g(x)+1)\times\dfrac{x}{g(x)}}=\frac{g(x)}{x(g(x)+1)}$$

로 구할 수 있고,

$$\frac{\sqrt{g(x)}}{xg'(x)}=\frac{g(x)+1}{\sqrt{g(x)}}=\sqrt{g(x)}+\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$$

이므로, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\dfrac{\sqrt{g(x)}}{xg'(x)}$는 $g(x)=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

[ㄷ. (거짓)] $4g(k)=3g(4)$이므로 $g(k)<g(4)$이고, $g(x)$는 증가함수이므로 $k<4$이다. ㄱ에서 $g(x)$의 위로 볼록함을 이용했는데, 이를 힌트로 이용하면

$$\frac{g(4)-g(k)}{4-k}>g'(4)$$

라 쓸 수 있다. 한편, ㄴ에서 $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$임을 구했으므로, 이를 이용하면

$$\frac{g(4)-g(k)}{4-k}>\frac{g(4)}{4(g(4)+1)}$$

이다. 이제 $g(k)=\dfrac{3}{4}g(4)$임을 이용하여 식을 정리하면

$$\frac{1}{4}\times\frac{g(4)}{4-k}>\frac{g(4)}{4(g(4)+1)}$$
$$\Rightarrow\ 4-k<g(4)+1 \qquad \Rightarrow\ k+g(4)>3$$

을 얻는다.

29. [4점] ◆◆◇

〔해제의 급소 ①〕 무한등비급수

> 근래에는 무한등비급수를 도형이 아닌 수식으로 묻는 문제가 많이 나오고 있다. 하지만 도형이든 아니든 원칙은 같다.

〔해제의 급소 ②〕 수렴하는 급수의 성질

> 수렴하는 급수의 항은 0으로 수렴해야 한다. 당연한 내용이지만 까먹을 경우 한참 헤맬 수 있다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 초항을 a라 하면 수렴하는 급수의 성질에 의하여

$$k=\sum_{m=1}^{\infty}a_m=\frac{a}{1-r}$$

를 얻는다. 한편, 등비수열의 합 공식에 의하여

$$\sum_{m=1}^{n}a_m=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이므로 주어진 등식은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(k-\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right)=7$$

이 된다. 이때 등비급수 내의 $\dfrac{a}{1-r}$는 k와 같은 값이므로 정리하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ar^n}{1-r}=7 \quad\Rightarrow\ \frac{a}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}r^n=7$$
$$\Rightarrow\ \frac{a}{1-r}\times\frac{r}{1-r}=7$$

을 얻는다. 따라서 $a=\dfrac{7(1-r)^2}{r}$으로 쓸 수 있다.

이제 $a_3=ar^2$의 값이 최대가 되려면,

$$ar^2=7r(1-r)^2$$

이 최대가 되어야 한다. $r=\dfrac{1}{3}$에서 최대가 된다는 것이 분명하므로 이때 $k=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{7(1-r)}{r}=14$로 구할 수 있다.

30. [4점] ◆◆◆ **[최고난도]**

〔해제의 급소 ①〕 낯선 함수의 그래프

> 낯선 함수의 그래프도 미분해서 척척 그려낼 수 있어야 한다. 낯선 함수의 경우 특히 점근선에 주의해서 그린다.

〔해제의 급소 ②〕 낯선 방정식의 해석

> f(f(x)/t) = f(x)라는 방정식을 해석하는 스킬 같은 건 없다. 그저 지금까지 봐왔던 합성함수 방정식 해석의 방법을 적용하면 되는 것.

〔해제의 급소 ③〕 흐려지지 않는 집중력

> 여러 개념이 섞인 복잡한 문제에서는 끝까지 논리를 이어나가는 집중력이 무엇보다도 중요하다. 기껏 30번까지 와서 흐리멍텅한 눈으로 문제를 읽어봤자 집중이 없는데 풀릴 리가 만무하다.

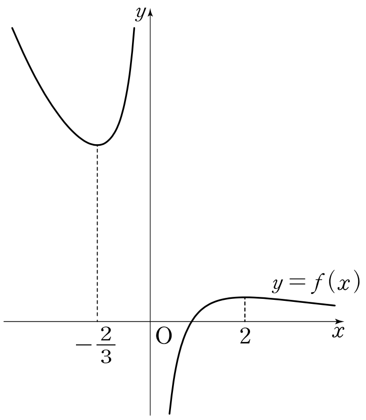
우선 주어진 함수 $f(x)$의 그래프를 그려 보자. 일단 $x=0$인 곳에서는 값을 알지 못하므로 보류해 두고, 나머지 부분만 그린다.

$$f'(x)=\left(-3+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^{-x}=-\frac{e^{-x}}{x^2}(x-2)(3x+2)$$

에서 $f'(x)=0$의 근은 $x=2$ 및 $x=-\frac{2}{3}$이다. 한편

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0,$$
$$\lim_{x\to0-}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to0+}f(x)=-\infty,$$
$$f(2)=e^{-2}<6e^{\frac{2}{3}}=f\left(-\frac{2}{3}\right)$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식 $f\left(\frac{f(x)}{t}\right)=f(x)$에서 $\frac{f(x)}{t}=s$로 놓으면 $f(s)=ts$라 쓸 수 있다. 따라서 이때 s의 값은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=tx$의 교점의 x좌표가 된다. 또한, 이러한 s의 값에 대하여 $f(x)=ts$를 만족시키는 x의 값을 찾아야 하는 것이므로 각 교점에서 y축에 수직인 직선을 그어 다시 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점들의 x좌표가 주어진 방정식의 실근이다.

이제 $g(t)$가 불연속이 되는 상황에 대하여 생각해 보자. 우선 당연하게 $y=f(x)$와 $y=tx$가 접하는 것을 고려해야 한다. 접점의 좌표를 $(\tau, f(\tau))$라 두면(τ는 '타우'라 읽는다) 접선의 방정식은

$$y=f'(\tau)(x-\tau)+f(\tau)$$
$$\Rightarrow\ y=\left(-3+\frac{4}{\tau}+\frac{4}{\tau^2}\right)e^{\tau}(x-\tau)+\left(3-\frac{4}{\tau}\right)e^{\tau}$$

이며 이 접선이 원점을 지나야 하므로

$$0=\left(-3+\frac{4}{\tau}+\frac{4}{\tau^2}\right)(-\tau)e^{\tau}+\left(3-\frac{4}{\tau}\right)e^{\tau}$$
$$\Rightarrow\ \left(3\tau-1-\frac{8}{\tau}\right)e^{\tau}=0\quad\Rightarrow\ 3\tau^2-\tau-8=0$$

을 얻으므로 $\tau=\frac{1\pm\sqrt{97}}{6}$이다.

위 문단에서 구한 τ의 값을 각각 τ_1, τ_2라 할 때, 이에 대응하는 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면 $g(t)$는 $t=m_1$, $t=m_2$에서 k의 값에 관계없이 무조건 불연속이다. k의 값을 고려하지 않았을 때의 교점의 개수는 극한값이 4, 함숫값이 2이기 때문에 한 점이 추가된다고 불연속이 해소될 리 없기 때문이다. 따라서 m_1과 m_2는 무조건 A의 원소가 되므로, 미리 그 곱을 계산해 두자. 근과 계수의 관계에 의하여 $\tau_1+\tau_2=\frac{1}{3}$, $\tau_1\tau_2=-\frac{8}{3}$이므로

$$m_1\times m_2=\frac{1}{\tau_1}\left(3-\frac{4}{\tau_1}\right)e^{-\tau_1}\times\frac{1}{\tau_2}\left(3-\frac{4}{\tau_2}\right)e^{-\tau_2}$$
$$=\frac{1}{(\tau_1\tau_2)^2}(9\tau_1\tau_2-12(\tau_1+\tau_2)+16)e^{-(\tau_1+\tau_2)}=-\frac{27}{16}e^{-\frac{1}{3}}$$

으로 구할 수 있다.

한편, $y=tx$를 열심히 움직이다 보면 극점을 지날 때도 불연속이 일어난다. 극대점을 지날 때의 기울기는 $m_3=\frac{e^{-2}}{2}$, 극소점을 지날 때의 기울기는 $m_4=-\frac{27}{2}e^{\frac{2}{3}}$이다. 그런데 A의 모든 원소의 곱이 최소가 되려면 아까 전에 구한 $m_1\times m_2$와 곱해서 최소가 되도록 해야 한다. $m_1\times m_2<0$이므로 m_3이 A의 원소여야 하고 m_4는 A의 원소가 아니어야 한다.

그런데 어떻게 m_4, 즉 극대점을 지날 때의 기울기가 A의 원소가 아니게 될 수 있을까? 이때 k가 중요한 포인트가 된다. k가 없는 상황에서는 극대점 및 극소점에서 $g(t)$의 극한값이 4이고 함숫값이 3인데, 정확히 k가 극대점 또는 극소점에 있으면 그곳에서 $g(t)$의 함숫값을 1만큼 올려 연속이 되게끔 할 수 있기 때문이다. 따라서 $t=m_4$에서 $g(t)$가 연속이 되려면 k는 극솟값인 $9e^{\frac{2}{3}}$이 되어야 한다는 것을 알 수 있다.

마지막으로 m의 값을 구하면

$$m=m_1\times m_2\times m_4=-\frac{27}{32}e^{-\frac{7}{3}}$$

이 되고, 여기에 $K=9e^{\frac{2}{3}}$을 곱하면

$$K\times m=-\frac{243}{32}e^{-\frac{5}{3}}$$

이다. 따라서 $32pq=32\times\left(-\frac{243}{32}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=405$이다.

선택과목 해설 [기하]

(13쪽부터 15쪽까지)

23. [2점] ◇◇◇

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$의 크기는 각각 2이고, 서로 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 따라서

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=2$$

를 얻는다.

24. [3점] ◈◇◇

구의 중심은 $(0,3,1)$이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{(3-0)^2+(4-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{26}$$

이므로 구의 방정식은

$$x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=26$$

이고, 이를 풀면

$$x^2+y^2+z^2-6y-2z=16$$

이 된다. 따라서 $a+b+c=(-6)+(-2)+16=8$이다.

25. [3점] ◈◇◇

포물선의 초점이 $(2,0)$이고 준선이 y축이므로 꼭짓점은 $(1,0)$이며 초점거리는 $p=1$이다. 따라서 포물선의 방정식은

$$y^2=4(x-1)$$

로 구할 수 있고, 이 포물선 위에 점 $A(4,a)$가 있으므로 $a=2\sqrt{3}$으로 구할 수 있다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=\frac{2}{2\sqrt{3}}(x-4)+2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$$

로 구할 수 있으므로 x절편은 -2이다.

26. [3점] ◆◇◇

(해제의 급소) 내·외분점의 벡터표현

> 내·외분점의 벡터표현을 m : n으로 하는 것에만 익숙하다면 큰일이다. 시점이 같은 두 벡터 a, b에 대하여 ta+(1-t)b는 종점을 이은 직선을 나타낸다. 0≤t≤1이 주어지면 선분.

실수 t에 대하여 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$인 점 P가 나타내는 도형은 직선 BC와 같다. 다시 말해, $\left|t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\right|$의 최솟값이 $4\sqrt{2}$라는 것은 점 A에서 직선 BC에 이르는 거리가 $4\sqrt{2}$라는 것과 같은 말이다.

점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=4\sqrt{2}$인 셈이므로, 직각삼각형 ABH에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{BH}=2$를 얻는다. 삼각형 ABC는 둔각삼각형이므로 $\overline{CH}=7$이며, 직각삼각형 ACH에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{AC}=9$를 얻는다.

27. [3점] ◆◈◇

(해제의 급소) 정사영의 넓이

> 구하기 힘든 넓이를 갑자기 구하라고 하는 경우, 정사영을 통해 역계산하는 것이 일반적이다.

점 C, D에서 원기둥의 아랫면으로 내린 수선의 발을 C′, D′라 하면, 구하는 단면을 원기둥의 아랫면으로 정사영한 영역은 오른쪽 그림과 같다. 따라서 그 넓이를 $\pi+2$로 구할 수 있다.

한편 주어진 단면과 원기둥의 아랫면이 이루는 각을 θ라 하자. 선분 AB의 중점을 O, 선분 CD의 중점을 M이라 하고 점 M에서 원기둥의 아랫면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH}=4,\quad \overline{OH}=\sqrt{2}$$

가 성립하는 것은 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 $\overline{OM}=3\sqrt{2}$로 구할 수 있고, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$이 된다.

단면의 넓이를 S라 할 때, 정사영한 넓이가 $\pi+2$이므로

$$S\cos\theta=\pi+2$$

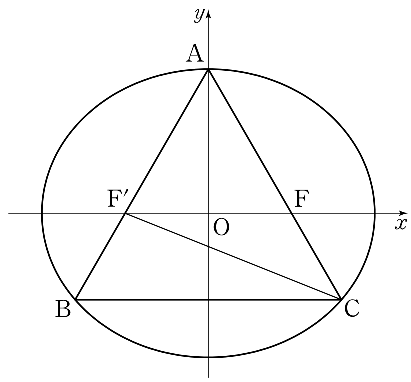
가 성립해야 한다. 따라서 $S=3(\pi+2)$이다.

28. [4점] ◆◆◇

(해제의 급소) 이차곡선의 성질

> 이차곡선 문제에서, 초점과 무언가가 연결된 상황에서는 항상 이차곡선의 정의를 활용할 생각을 해야 한다.

주어진 상황을 그림으로 그리면 아래와 같다.



$\overline{AF}=\overline{AF'}=x$로 놓자. $\overline{AC}=2$이므로 $\overline{CF}=2-x$로 구할 수 있다. 또한, 타원의 장축의 길이가 $\overline{AF}+\overline{AF'}=2x$이므로

$$\overline{CF}+\overline{CF'}=2x$$

$$\Rightarrow\ \overline{CF'}=2x-(2-x)=3x-2$$

를 얻는다.

한편, 삼각형 ACF′에서 $\angle CAF'=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인 법칙을 적용하면

$$(3x-2)^2=x^2+2^2-2\times x\times2\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\ 9x^2-12x+4=x^2-2x+4$$

$$\Rightarrow\ 8x^2-10x=0\quad\Rightarrow\ x=\frac{5}{4}$$

를 얻는다. 따라서 $\overline{AF'}=\frac{5}{4}$, $\overline{CF'}=\frac{7}{4}$로 구할 수 있다.

어차피 코사인 값을 구하는 것이므로 삼각형 AF′C의 모든 변의 길이를 4배 해도 관계 없다. 따라서

$$\cos(\angle AF'C)=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\frac{1}{7}$$

이 된다.

29. [4점] ◆◆◈ [고난도]

조건 (가)의 양변을 제곱하면

$$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2+2\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF'}}=250 \ \cdots \ (ㄱ)$$

이다. 이때 조건 (나)에 똑같은 $\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF'}}$이 보인다. 따라서 조건 (나)에 두 배 하여 (ㄱ)에서 변끼리 빼주면

$$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2-2\,\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=250-4b^2$$
$$\Rightarrow \left(\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}\right)^2=250-4b^2$$

이 된다.

이때 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이다. 따라서

$$4a^2=250-4b^2 \quad \Rightarrow \ 4(a^2+b^2)=250$$

을 얻는다. $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F'}(-c,\,0)$ $(c>0)$이라 놓으면 쌍곡선의 성질에 의하여 $a^2+b^2=c^2$이 된다는 사실을 안다. 따라서

$$4c^2=250 \quad \Rightarrow \ c=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

인 셈이다.

한편, 조건 (가)를 달리 해석하면 두 점 F, F′의 중점 O에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{PF'}}}{2}$이므로

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|=5\sqrt{10} \quad \Rightarrow \ \overline{\mathrm{OP}}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

이다. 그런데 $c=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$로 같다는 사실이 굉장히 수상하다. 실제로 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}=c$이므로 점 O가 삼각형 PFF′의 외심이고, 삼각형 PFF′은 $\angle\mathrm{FPF'}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

이제 $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=5\sqrt{10}$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=250$이고 $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$은 모두 자연수이다. 일일이 대입하며 $\overline{\mathrm{PF}}$와 $\overline{\mathrm{PF'}}$의 길이를 탐색해 보면

$$\left\{\overline{\mathrm{PF}},\,\overline{\mathrm{PF'}}\right\}=\{5,\,15\},\ \{9,\,13\}$$

만이 가능하므로 $2a$로 가능한 값은 4와 10이다. 따라서 $a=2$ 또는 $a=5$이므로 $b^2=\dfrac{125}{2}-a^2$으로 가능한 값은 $\dfrac{117}{2}$과 $\dfrac{75}{2}$이고, 이 둘의 합은 96이다.

30. [4점] ◆◆◆ [최고난도]

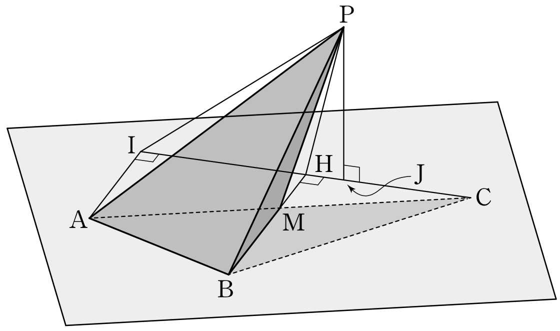
〔해제의 급소 ①〕 종이접기

> 종이접기를 하는 경우, 움직이는 꼭짓점의 정사영은 접는 선에 수직이고 원래 점을 지나는 직선이다.

〔해제의 급소 ②〕 이면각의 크기

> 두 면이 이루는 각을 구하는 방법을 정확히 알고 있어야 한다. 한 평면의 점에서 다른 평면으로 수선의 발을 내린 뒤, 그 수선의 발에서 교선으로 수선의 발을 내리는 것이 일반적이다.

그림과 같이 점 C에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H, 점 A를 지나고 직선 BM에 평행한 직선이 직선 CH와 만나는 점을 I라 하자. 이때 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 J라 하면, 점 J는 선분 CI 위에 있다.



삼각형 BCM에 코사인 법칙을 적용하면

$$\cos(\angle\mathrm{BMC})=\frac{6^2+7^2-11^2}{2\times6\times7}=-\frac{3}{7} \ \cdots \ (ㄱ)$$

을 얻는다. 따라서 $\cos(\angle\mathrm{CMH})=\dfrac{3}{7}$이고, $\overline{\mathrm{MH}}=3$, $\overline{\mathrm{AI}}=6$이다. 이때 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CH}}=2\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{CI}}=4\sqrt{10}$임을 알 수 있다.

이제 삼각형 HIP에 코사인 법칙을 적용하면,

$$\overline{\mathrm{IP}}^2=(2\sqrt{10})^2+(2\sqrt{10})^2-2\times2\sqrt{10}\times2\sqrt{10}\times\cos\theta$$
$$=80-80\cos\theta$$

로 구할 수 있다. 이때 삼수선 정리에 의하여 두 선분 AI와 IP는 수직이므로, 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{IP}}^2=116-80\cos\theta \ \cdots \ (ㄴ)$$

가 된다.

한편, (ㄱ)에 의하여 $\cos(\angle\mathrm{AMB})=\dfrac{3}{7}$이므로, 삼각형 ABM에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=7^2+6^2-2\times7\times6\times\frac{3}{7}=49$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=7$이다. 삼각형 ABP에서 코사인 법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=7^2+11^2-2\times7\times11\times\cos(\pi-\theta)$$
$$=170+154\cos\theta$$

인데, (ㄴ)에 의하여

$$170+154\cos\theta=116-80\cos\theta$$
$$\Rightarrow \ 234\cos\theta=-54$$

에서 $\cos\theta=-\dfrac{3}{13}$을 얻는다. 따라서 구하는 값은

$$\left|\frac{72}{\cos\theta}\right|=72\times\frac{13}{3}=312$$

가 된다.

빠른 정답

빠른 정답이 뒤편에 있는 것은
혹시 모를 스포일러를 방지하기 위함입니다.

1	①	2	②	3	①	4	④	5	④
6	④	7	②	8	②	9	⑤	10	③
11	③	12	③	13	⑤	14	①	15	②
16	650	17	6	18	11	19	128	20	67
21	31	22	203	〔 공 통 〕					

〔 확률과 통계 〕				23	④	24	④	25	③
26	②	27	⑤	28	⑤	29	87	30	394

〔 미 적 분 〕				23	④	24	②	25	⑤
26	⑤	27	①	28	②	29	14	30	405

〔 기 하 〕				23	③	24	②	25	④
26	④	27	②	28	③	29	96	30	312

[뒷면]

스포일러 방지를 목적으로 하여
의도적으로 비워놓은 페이지입니다.