제 2 교시

2025학년도 METIS 모의고사 2회 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

> 지혜의 여신이 우리와 함께한단 말이야

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호,
문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ····· 1~8쪽

○ 선택과목

확률과 통계 ····· 9~12쪽

미적분 ····· 13~16쪽

기하 ····· 17~20쪽

Team METIS

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $(\frac{5^{\sqrt{2}}}{5})^{\sqrt{2}+1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 5 ③ $5^{\sqrt{2}}$ ④ $5^{\sqrt{2}+1}$ ⑤ 25

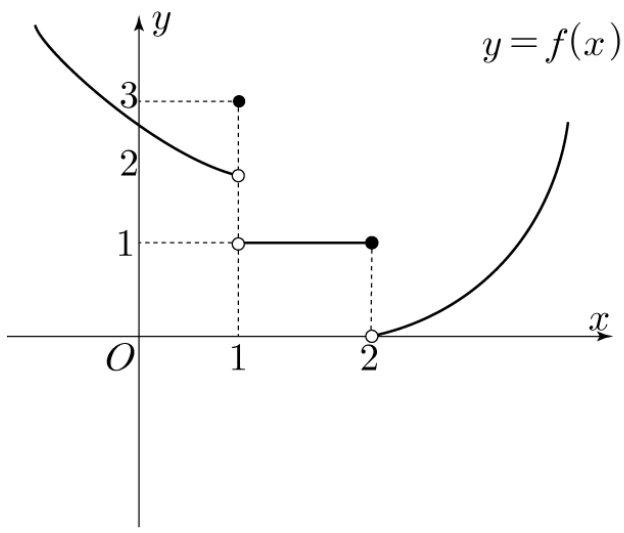
2. $f(x)=6(x-1)(x-2)$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

3. $\pi<\theta<2\pi$이고, $\cos(\pi-\theta)=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 20

4. 함수 $y=f(x)$가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1+} f(f(x))+\lim_{x\to\infty} f(\frac{2x+1}{x})$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

5. 함수 $f'(x)=5x^2-20x+15$일 때, $f(3)-f(0)$의 값은? [3점]

① 0 ② 3 ③ 7 ④ 10 ⑤ 14

6. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대해

$$\frac{a_6}{a_4}=3, \quad a_8=4$$

일 때, 모든 a_9의 값의 곱은? [3점]

① -48 ② -24 ③ -12 ④ 12 ⑤ 24

7. 시각 $t=0$에 점 $A(2)$를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=4t^3+2t-3$일 때, $t=3$에서의 점 P의 위치는? [3점]

① 75 ② 77 ③ 79 ④ 81 ⑤ 83

8. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{10} S_n = 300,\ \sum_{n=1}^{9} S_n = 250$$

이다. 이때 a_{10}의 값은? [3점]

① 4 ② 14 ③ 20 ④ 40 ⑤ 50

9. 삼차함수 $f(x)=x(x-a)(x-2)$ (단, a는 정수)와 함수 $g(x)$에 대하여,

$f(x)g(x)=(x-1)(x-2)$

일 때, 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 불연속인 모든 실수 α의 합이 5일 때, 가능한 모든 $g(6)$값의 합은? [4점]

① 1 ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{11}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{13}{9}$

10. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여, $\overline{AB}=4, \overline{BC}=5$이고, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{3}$이다. 삼각형 ACD의 넓이가 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$일 때, $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$의 값은? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

11. 최고차항 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대해 함수 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 실수 t에 대하여 방정식 $F(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $g(t)$는 $t=\alpha$에서만 불연속이다.

(나) 함수 $F(x)$의 최솟값은 $F(0)$이다.

$f(0)=f(3)$일 때, $F(\alpha+6)$의 값은? (단, α는 상수이다.) [4점]

① 145 ② 162 ③ 189 ④ 216 ⑤ 243

12. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$2|a_1|=|a_2|+|a_3|,\ \sum_{n=1}^{5} S_n=35$$

이고, $a_2>0$일 때, a_5의 값을 구하시오. [4점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

13. 함수 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+7x+3$과 함수 $g(x)=7x+k$에 대해, 방정식 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 실근이 존재하고, 함수 $|f(x)-g(x)|$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다. 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 넓이가 S일 때, $S\times k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{19}{5}$ ⑤ 4

14. 1보다 큰 상수 k에 대하여 직선 $y=k$이 두 곡선 $y=3^x$, $y=(\frac{1}{9})^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C, 실수 d에 대해 직선 $x=d$가 x축과 만나는 점을 D라 할 때, 임의의 실수 d에 대해 삼각형 ACD의 넓이와 삼각형 BCE의 넓이비가 $1:13$이 되도록 하는 곡선 $y=3^x$위의 점이 E에 대해 점 A와 E의 x좌표의 차는? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

15. 최고차항 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, 방정식 $F(x)-f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근만을 갖는다.

(나) 두 곡선 $y=F(x)$와 $y=f'(x)$의 서로 다른 두 교점을 각각 A, B라고 할 때, 직선 $y=6x+7$ 위를 움직이는 점 C에 대해 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{93}{2}$로 일정하다.

$f(3)=6, f(1)>7$일 때, 가능한 모든 $F(7)$의 값의 합은? [4점]

① 40 ② 48 ③ 56 ④ 64 ⑤ 72

단답형

16. 부등식

$$2\log_2(x-7) \le \log_2(x-5)$$

을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점]

17. 다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$$f(x)g(x)=x^3-6x^2+9x+16$$

일 때, $f'(8)g(8)+f(8)g'(8)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 집합 $S=\{(x,y)|-\frac{\pi}{a}\le x\le\frac{3\pi}{a}, y$는 모든 실수$\}$의 부분집합인 집합 A, B에 대해

$A=\{(x,y)|\,x,y$는 방정식 $4ax+3\pi y-4\pi=0$의 실근$\}$,

$B=\{(x,y)|\,x,y$는 방정식 $\tan ax-y=0$의 실근$\}$이다.

집합 $A\cap B$의 원소인 순서쌍을 (α,β)라 할 때, 모든 α의 값의 합을 S라 하자. $\frac{a}{\pi}\times S$의 값을 구하시오. (단, a는 0보다 큰 실수이다.) [3점]

19. 연속함수 $f(x), g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$는 점 $(2,4)$에 대해 대칭인 함수이다.
(나) 함수 $g(x)$는 직선 $x=2$에 대해 대칭인 함수이다.

$\int_0^4 f(x)g(x)dx+\int_0^4 f(4-x)g(4-x)dx=14$일 때,

$8\int_0^2 g(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

20. 두 집합 $A=\{x|\log_2 x$는 자연수$\}$, $B=\{x|\log_p x$는 자연수$\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 1이 아닌 양수 p의 값을 구하시오.

(가) $A\cap B=B$
(나) $a\in A, b\in B$인 상수 a, b에 대하여 $2\le a\le 10, 1\le b\le 1000$이고, $\log_a b$가 자연수가 되도록 하는 a,b의 모든 순서쌍 (a,b)의 개수는 7이다.

[4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=f(1)$

(나) 어떤 양수 a에 대하여 열린구간 $(0,a)$에 속하는 모든 실수 x가 부등식 $6x\le 4f(x)\le x^3+x^2+15x$를 만족시킨다.

$f'(\frac{3}{2})+\frac{25}{4}$의 값이 홀수인 자연수일 때, $f(3)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

22. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n-2n-1 & (a_n>0)\\ -2a_n & (a_n\le 0)\end{cases}$$을 만족시킨다.

$a_1+a_4=25$이고, $a_1=2k$ (k는 정수)일 때, 가능한 k의 모든 값의 곱을 α라고 하자. α^2의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 여섯 개의 문자 a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 54 ② 56 ③ 58 ④ 60 ⑤ 62

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{5}{8}$$

일 때, $P(A\cap B)$의 값은?[3점]

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

25. 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어있는 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 적어도 1개 이상 포함될 확률은? (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① $\frac{11}{14}$ ② $\frac{23}{28}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ $\frac{25}{28}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

26. 정규분포 $N(m,8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $N(8,4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $P(\overline{X}\le 10)=P(\overline{Y}\ge 12)$를 만족시키는 m의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

27. $0 < a < b$인 두 상수 a,b에 대하여 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	a	b	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	a	b	$\frac{1}{3}$	1

$E(X)=\frac{19}{16}$일 때, ab의 값은? [3점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{5}{32}$

28. 서로 같은 종류의 꽃 5송이와 흰 공 6개를 4명의 학생 A, B, C, D에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 꽃과 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A와 학생 C가 받는 꽃의 수는 서로 같다.

(나) 꽃과 공 모두를 받지 않는 학생은 없다.

① 568 ② 572 ③ 576 ④ 580 ⑤ 584

29. 정규분포 $N(m,6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 225인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모형균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{3}{2}a$이다. $\overline{x}$의 값이 k일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 2.58 = 0.99)$로 계산한다.) [4점]

30. 숫자 2,2,3,3,4,4가 하나씩 적힌 6개의 공이 들어있는 상자와 비어있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 상자에 있는 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 상자에 있는 공 1개를 주머니에 넣는다.

이 시행을 두 번 반복하였을 때, 주머니에 들어있는 공에 적힌 수의 합이 10일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 상자로 집어넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+1}+7}{8^n-4^n+1}$의 값은? [2점]

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

24. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left\{\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos(-\frac{\pi}{4})\sin x\right\}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

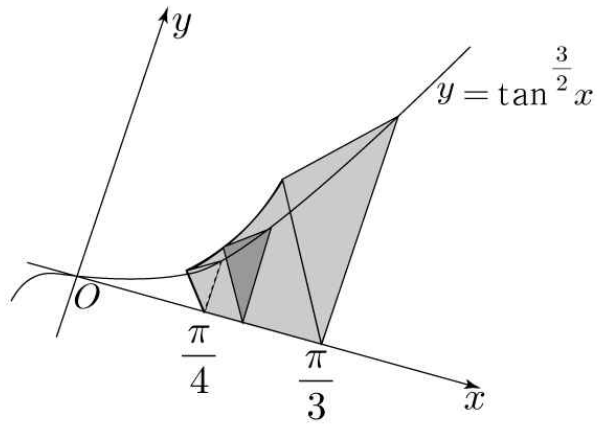
25. 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)=ae^{x^2}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left\{f(\frac{k}{n})+\frac{k}{n}f'(\frac{k}{n})\right\}=e^4$$

를 만족시킬 때, 0이 아닌 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

26. 그림과 같이 곡선 $y=\tan^{\frac{3}{2}}x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$와 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}ln2$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}ln2$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}ln2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}ln2$

27. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)=3e^{x}(x^{2}+x-1)$과 미분가능한 함수 $g(x)$에 대해, $g(0)=15$이고, 함수 $G(x)$는 함수 $g(x)$의 부정적분 중 하나이다. 모든 실수 x에 대하여 방정식 $G(x)=f(x)+g(x)$이 성립할 때, $G(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

① $\frac{2}{e^{2}}$ ② $\frac{4}{e^{2}}$ ③ $\frac{6}{e^{2}}$ ④ $\frac{8}{e^{2}}$ ⑤ $\frac{10}{e^{2}}$

28. 최고차항 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$일 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $s(t)$라 하자. 이 때, 함수 $s(t)$와 최고차항 계수가 양수인 사차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 t에 대해서 정의된 함수 $s(t)$는 $t=0, \frac{1}{8}$에서만 불연속이다.

(나) 모든 실수 c에 대해 $\lim_{x\to c} g(x)h(x)$의 값이 존재하고, $\lim_{x\to 0}\frac{h(6\cos x)}{x^{6}}=k\,(k\neq 0)$이다.

(다) 함수 $\left|h(-e^{-x+2}(x-1)+4)\right|$의 서로 다른 모든 극값의 합은 $\frac{243}{64}$이다.

이때 $h(9)$의 값은? (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$이다.) [4점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

단답형

29. 공비가 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고, $b_1 = 3$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| + |b_n| = \frac{17}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{3n-2}| = \frac{81}{26}$$

이 성립한다. 이때 $a_4 - b_4$의 최댓값을 $\frac{q}{p}$(단, p, q는 서로소인 자연수)라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

30. 열린구간 $(0, \pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin x$에 대하여, 곡선 $y = f(x)$가 직선 $y = t\ (0 < t < 2)$과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB의 길이를 $g(t)$라 하자. $g'(t) = -2$가 되도록 하는 실수 t의 값을 k라 할 때, 직선 $y = k$와 곡선 $y = f(x)$가 만나는 서로 다른 두 점에서 각각 곡선 $y = f(x)$에 그은 두 접선과 두 직선 $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$, 곡선 $y = \cos^3 x + 3\cos x - 7 + \sqrt{3}$으로 둘러싸인 넓이가 $p\pi^2 + q\pi$이다. 이때 $\frac{q}{p}$의 값을 구하시오. (단, p, q은 0이 아닌 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.