

HESTAT 40

PROBABILITY AND
STATISTICS

저자 Headmaster

2021

#1~#20

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하십시오.

(가) $a + b + c + d = 8$

(나) a 는 홀수이다.

(다) $c \leq d$

2

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e, f 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수를 구하시오.

(가) $ab(c+d+e+f) = 24$

(나) a, b, c, d, e, f 중에서 적어도 3개는 짝수이다.

MEMO

3

3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허락하여 10개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

- (가) x 와 y 는 한 번만 서로 이웃한다.
- (나) y 와 z 는 한 번만 서로 이웃한다.
- (다) z 와 x 는 한 번만 서로 이웃한다.

4

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 를 정의역과 공역으로 하고 다음 조건을 만족시키는 함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

$$f(1) + f(2) + f(3) = 7$$

5

A, B, C, D의 4개의 문자와 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자가 있다. 이 8개의 문자와 숫자를 한 번씩 모두 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

- (가) 문자 A의 양쪽 옆에 숫자를 나열한다.
- (나) 숫자 1의 양쪽 옆에 문자를 나열한다.

6

서로 다른 세 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 공이 각각 들어 있다. 갑이 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸 후, 을도 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸다. 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 a_1, a_2, a_3 ($a_1 \leq a_2 \leq a_3$)이라 하고 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 b_1, b_2, b_3 ($b_1 \leq b_2 \leq b_3$)이라 할 때, $a_i \neq b_i$ 인 i ($i=1, 2, 3$)이 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

7

6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 모두 일렬로 나열하여 만든 여섯 자리의 자연수 전체의 집합에서 임의로 택한 한 자연수를 N 이라 하자. 자연수 N 의 백의 자리의 수가 3일 때, 천의 자리의 수와 십의 자리의 수 중 적어도 하나는 2일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

8

세 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나온 모든 눈의 수의 합을 4로 나눈 나머지가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

9

20개의 자연수 $1, 2, 3, \dots, 20$ 중에서 임의로 1개를 택하는 시행에서 소수가 나오는 사건을 A 라고 하고, 20보다 작은 자연수 n 에 대하여 n 이하의 수가 나오는 사건을 B_n 이라 하자. 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이 되도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오.

MEMO

주머니에 크기와 모양이 같은 n 개의 상자가 들어 있다. 그 중에서 m 개는 흰색 상자이고 나머지는 검은색 상자이며 3개의 흰색 상자와 5개의 검은색 상자에는 당첨 제비가 각각 하나씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 한 개의 상자를 꺼낼 때 당첨 제비가 들어 있는 상자가 나오는 사건을 A , 흰색 상자가 나오는 사건을 B 라 하자. 두 사건 A , B 가 서로 독립이 되도록 하는 두 자연수 m , n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오. (단, $10 \leq m \leq 100$ 이고, $n - m \geq 5$)

11

1부터 98까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 1장씩 98장이 있다. 이 98장의 카드 중에서 동시에 3장의 카드를 택할 때, 카드에 적혀 있는 세 수의 합이 98이 되는 경우의 수는?

MEMO

12

좌표평면을 게임판으로 하여 다음 규칙에 따라 게임이 진행된다.

규칙 1. 원점을 출발점으로 한다.

규칙 2. 동전을 던져 앞면이 나오면 x 축의 양의 방향으로 1만큼 이동하고 뒷면이 나오면 y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

규칙 3. 직선 $y = x + 3$ 위의 점에 도달하면 더 이상 동전을 던지지 않고 게임을 끝내고 그렇지 않으면 동전을 계속 던져서 게임을 계속 진행한다.

동전을 9번 던져서 게임이 끝날 확률은 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

13

주머니에 빨간 *모양의 스티커 한 개가 붙어 있는 카드 1장과 파란 *모양의 스티커 한 개가 붙어 있는 카드 1장과 스티커가 붙어 있지 않은 카드 1장이 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음의 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 빨간 *모양의 스티커가 붙은 카드가 나오면 빨간 *모양의 스티커 한 개를 그 카드에 더 붙이고 주머니에 다시 넣고, 파란 *모양의 스티커가 붙은 카드가 나오면 파란 *모양의 스티커 두 개를 그 카드에 더 붙이고 주머니에 다시 넣고, 스티커가 붙어 있지 않은 카드는 그대로 주머니에 다시 넣는다.

위의 시행을 2번 반복한 뒤 주머니 속에 *모양의 스티커가 세 개 붙어 있는 카드가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

14

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하시오.

(가) $y \geq x + 2, z \geq y + 3$

(나) $z \leq 10$

MEMO

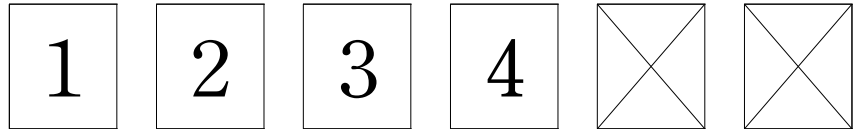
15

주머니 A에는 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼내고, 나머지 주머니에서 1개의 공을 꺼낸다. 처음 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수와 같을 때, 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

16

1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 한 면에만 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 숫자가 적혀 있는 면을 앞면, 적혀 있지 않은 면을 뒷면이라 할 때, 그림과 같이 1, 2, 3, 4의 숫자가 적혀 있는 카드는 앞면, 5, 6의 숫자가 적혀 있는 카드는 뒷면이 보이게 놓여 있다. 이 6장의 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 택하여 한 번 뒤집는 시행을 반복한다. 6장의 카드가 모두 앞면이거나 모두 뒷면인 사건을 A 라 하자. 이 시행을 4번 반복할 때, 네 번째 시행에서 처음으로 사건 A 가 일어날 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



MEMO

17

같은 종류의 사탕 6개를 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 접시에 남김없이 나누어 담으려고 한다. 사탕이 담겨진 접시에 적힌 수의 합이 7 이상 17 이하가 되도록 사탕을 접시에 나누어 담는 경우의 수를 구하시오.

MEMO

18

주머니 A에는 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있다. 같은 주머니 A에서, 혹은 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 비교하는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 다르고, 두 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않으며 p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

19

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오.

(가) $f(x) = 5$ 인 집합 X 의 원소 x 가 존재한다.

(나) $\sum_{k=1}^5 f(k) = 14$

20

각 면에 숫자 1, 2, 2, 4, 4, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자를 4번 던져서 밑면에 적힌 수를 모두 곱한 값을 T 라 하자. $T=k^2$ 인 자연수 k 가 존재할 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

2020

#21~#40

바나나 우유 8개, 딸기 우유 2개, 초코 우유 1개, 흰 우유 1개를 4개의 서로 다른 주머니 A, B, C, D에 2개씩 넣으려고 한다. 같은 종류의 우유끼리는 서로 구분이 되지 않는다고 할 때, 바나나 우유가 3개 들어가는 주머니와 1개가 들어가는 주머니가 각각 1개씩인 경우의 수를 구하시오.

22

A, B, C, D, E, F, G의 7명의 학생이 다음 조건을 만족시키면서 일정한 간격을 두고 원 모양의 의자에 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.

- (가) A가 앉은 자리를 1번으로 하고 시계 방향으로 2번부터 7번까지 차례로 자리에 번호를 붙인다.
- (나) B는 5번 자리에 앉는다.
- (다) A 바로 옆자리 중 적어도 한 자리에는 D, E, F 중에서 앉고, C 바로 옆자리 중 적어도 한 자리에도 D, E, F 중에서 앉는다.

23

두 기차역 A와 B를 연결하는 철로 사이에 15개의 역이 있다. A역에서 출발한 기차가 B역에 도착할 때까지 다음 조건에 따라 운행한다고 한다.

- (가) A역과 B역 사이의 15개의 역 중에서 3개의 역에 정차한다.
- (나) 출발 후 첫 번째 정차한 역과 두 번째 정차한 역 사이에 적어도 한 개의 역이 있다.
- (다) 출발 후 두 번째 정차한 역과 세 번째 정차한 역 사이에 적어도 두 개의 역이 있다.

A역에서 B역까지 열차가 운행하는 경우의 수를 구하시오.

24

1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 5개를 같은 종류의 상자 3개에 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 넣는 경우의 수를 구하시오.

- (가) 각 상자에는 적어도 하나의 공이 들어 있다.
- (나) 각 상자에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 모두 다르다.

25

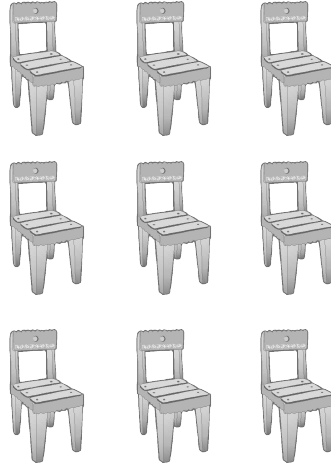
다음 조건을 만족시키는 네 자리의 자연수의 개수를 구하시오.

- (가) 각 자리의 수의 합이 9의 배수이다.
(나) 각 자리의 수는 모두 5 이하의 자연수이다.

MEMO

26

그림과 같이 9개의 의자가 3개씩 3열로 놓여 있다. 세 명의 학생이 임의로 각각 한 개의 의자에 앉을 때, 어느 두 학생도 앞뒤 또는 옆으로 서로 이웃하지 않을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 앞뒤 또는 옆으로 서로 이웃하는 의자들은 같은 간격으로 놓여 있으며 p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



MEMO

27

1부터 15까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 15개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수에 따라 A와 B가 다음과 같은 규칙으로 점수를 얻는 게임을 한다.

(가) 3의 배수가 적힌 공이 나오면 A는 2점, B는 0점을 얻는다.

(나) 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공이 나오면 A는 0점, B는 1점을 얻는다.

한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않고 주머니에서 공을 임의로 하나씩 꺼낼 때, 10점을 먼저 얻는 사람이 이기는 게임을 한다. A가 이 게임에서 이길 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

28

흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 A, B, C 세 사람이 차례로 임의로 한 개씩 공을 꺼낸다. A, B, C 중 적어도 한 명이 검은 공을 꺼내지 못했을 때, A, B, C 세 사람이 검은 공을 2개 꺼낼 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

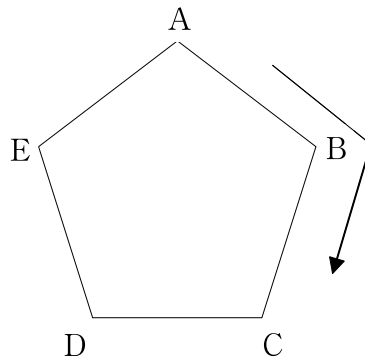
MEMO

29

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE의 꼭짓점 위의 점 P를 다음 규칙에 따라 이동시킨다.

- (가) 꼭짓점 A에서 출발한다.
- (나) 주사위 1개를 던져서 짝수의 눈이 나오면 정오각형의 변을 따라 시계 방향으로 2만큼 이동시킨다.
- (다) 주사위 1개를 던져서 홀수의 눈이 나오면 정오각형의 변을 따라 시계 방향으로 1만큼 이동시킨다.

1개의 주사위를 10번 던져서 꼭짓점 A를 출발한 점 P가 다시 꼭짓점 A로 도착할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

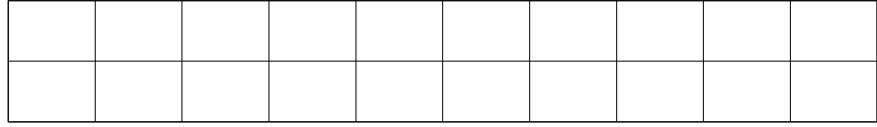


다음 조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오.

- (가) 각 자리의 수의 합은 5의 배수이다.
- (나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.
- (다) 일의 자리의 수와 백의 자리의 수는 서로 같지 않다.

31

그림과 같이 20개의 정사각형이 인접하여 놓여 있다. 그림의 33개의 점 중에서 세 점이 한 직선 위에 있도록 서로 다른 세 점을 택하는 경우의 수를 구하시오.



MEMO

32

한 개의 주사위를 한 번 던져서 홀수의 눈이 나오면 나온 눈의 수를 점수로 하고, 짝수의 눈이 나오면 나온 눈의 수를 2로 나누었을 때의 몫을 점수로 한다. 첫 번째 시행에서 5 또는 6의 눈이 나왔을 때 총 4번의 시행에서 나온 모든 점수의 합이 9가 될 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

33

그림과 같이 가로와 세로의 길이가 5이고 세로의 길이가 3인 직사각형을 한 변의 길이가 1인 정사각형 15개로 나누고, 이 중에서 3개의 정사각형을 골라 내부에 검은 색으로 색칠하려고 한다. 3개의 색칠한 정사각형 중 어느 2개의 정사각형도 이웃하지 않도록 색칠하는 방법의 수를 구하시오. (단, 2개의 정사각형이 한 변을 공유할 때 이웃한다고 하고, 직사각형은 회전하지 않는다.)



MEMO

34

동전 9개가 8개는 앞면, 1개는 뒷면이 보이도록 책상 위에 놓여 있다. 이 중에서 임의로 3개의 동전을 골라 각각 한 번 뒤집었을 때, 앞면이 보이는 동전의 개수가 8의 약수일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

35

4 이상의 자연수 n 에 대하여 집합 A 를 $A = \{(x, y) \mid x + y \leq n, x \text{와 } y \text{는 자연수}\}$ 라 하자. 집합 A 에서 임의로 선택된 한 개의 원소 (a, b) 에 대하여 i^a, i^b 이 모두 실수일 때, $i^a = i^b$ 일 확률이 $\frac{8}{15}$ 이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

MEMO

36

다음 조건을 만족시키는 네 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하십시오.

(가) $x + y + |z| + |w| = 9$

(나) $x \geq 0, y \geq 1$

MEMO

37

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{-\frac{1}{2}, -1, 0, 1, 2\}$ 로의 함수 f 중에서 임의로 선택한 한 함수가 다음 조건을 만족시키는 함수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

(가) $f(3)f(4) \neq 1$

(나) $|f(1)| \neq |f(4)|$

38

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오.

(가) $a + b + c = 12$

(나) $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$

MEMO

39

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오.

(가) $(2^a)^b$ 의 값은 3보다 크다.

(나) $a + b + c + d + e = 7$

40

주머니에 1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 20개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자 중에서 최댓값과 최솟값의 합이 20 이하일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

MEMO

정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	445	504	5	43	397	17	269	25	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
752	135	5	56	4	341	390	17	230	122
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
84	84	220	20	62	53	5	7	639	20
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
556	469	215	67	65	489	201	72	105	111

