이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 하나로 결정되기 위해 우리는 a, b, c에 대한 서로 다른 세 개의 조건이 주어져야함을 알고 있다. 이는 항등식에서 미정계수법이나 수치대입법과 같은 형태로 주어져 우리는 연립방정식의 형태로써 조건을 해석하여 이차함수를 결정하는 방법에 대해 학습했다.

이와 동일하게, 삼각형 ABC에서는 변의 길이와 각의 크기가 그러한 형태의 조건이 될 수 있다.

삼각비를 일반화시켜 삼각함수를 얻어냈듯, 우리는 삼각함수에서 주기성과 대칭성을 관찰할 수 있을 뿐만 아니라 삼각함수의 함숫값이 삼각형에서 어떠한 결과를 얻어낼 수 있는지를 확인할 필요가 있다. 일반적으로 삼각형은 다음과 같은 결정조건을 가지고 있음이 알려져 있다.

17. 삼각형의 결정 조건

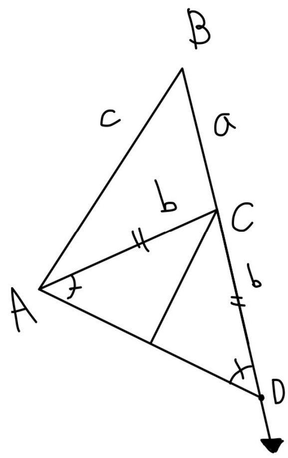
$\triangle ABC$는 다음과 같은 경우에 하나로 특정되어진다.

$i)$ 세 변의 길이가 주어질 때,

$ii)$ 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어질 때,

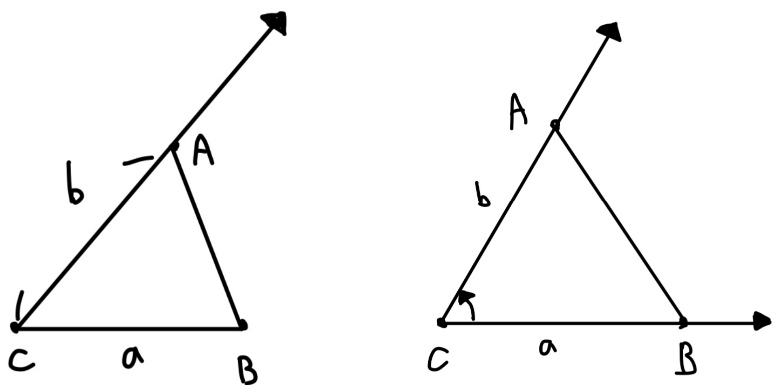
$iii)$ 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어질 때,

우선 세 변의 길이가 주어질 때에 대해 고려해보자. 각 변의 길이를 대각이 A, B, C일 때 각각 a, b, c라 하면 일반성을 잃지 않고 $a \le b \le c$인 경우를 고려해볼 수 있다. $\triangle ABC$에 대하여 $\overline{AC}=\overline{CD}$가 되도록 하는 반직선 $\overrightarrow{BC}$ 위의 점 D는 오직 하나만 존재한다. 이때 $\angle BAD > \angle CAD$이며 $\triangle ACD$는 이등변삼각형이므로 $\angle CAD = \angle CDA$이므로 $\angle BAD > \angle CDA$이다. 점 A를 지나고 변 AD와 이루는 각이 $\angle BAD$인 직선과 점 D를 지나고 변 AD와 이루는 각이 $\angle CDA$인 직선의 교점이 점 B이므로 $\triangle ABD$에서 $\overline{BD} > \overline{BA}$임은 자명하다. 동시에 $\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{CA}=a+b$이고 $\overline{BA}=c$이므로 $c<a+b$를 만족해야한다. 즉, $a \le b \le c$이면 $c<a+b$이다.



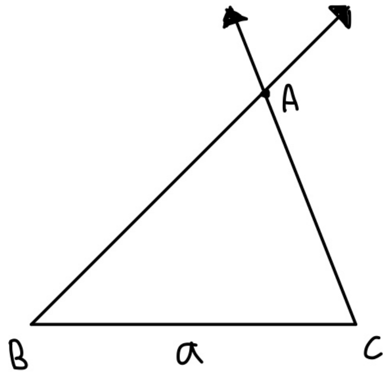
이제 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어질 때에 대해 고려해보자.

일반성을 잃지 않고 두 변의 길이가 각각 a, b로 주어지고 그 끼인 각의 크기가 C로 주어진 경우를 고려해볼 수 있다. 점 C를 지나고 변 BC와 이루는 각의 크기가 C인 반직선을 떠올려 볼 때, 반직선 위의 모든 점에 대하여 $\overline{CA}=b$가 되도록 하는 점 A는 오직 하나 존재한다. 혹은 다음과 같이 삼각형을 결정할 수 있다. 혹은 원점이 C에 대해 시초선 위의 점 B와 각의 크기가 C가 되도록 하는 동경 위의 점 A를 고려해보면 $\triangle ABC$가 자연스럽게 결정될 수 있음을 알 수 있다.



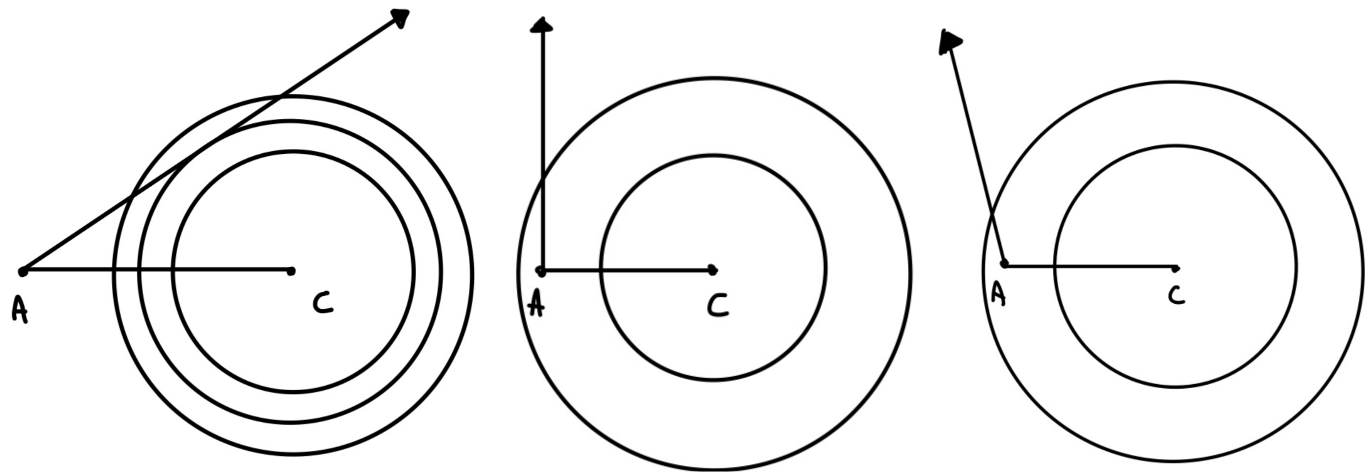
마지막으로 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어질 때에 대해 고려해보자.

일반성을 잃지 않고 한 변의 길이가 a로 주어지고 그 양 끝 각의 크기가 B, C로 주어진 경우를 고려해볼 수 있다. 점 B를 지나고 변 BC와 이루는 각의 크기가 B인 반직선을 떠올려본 이후, 점 C를 지나고 변 BC와 이루는 각이 C인 반직선을 떠올려보면 두 직선의 교점의 개수는 1이며 이를 점 A라 할 때, 우리는 자연스럽게 $\triangle ABC$가 결정될 수 있음을 떠올려볼 수 있다.



임의의 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$로 주어졌을 때 $a \le b \le c$이면 $c < a+b$이면 $\triangle ABC$가 결정된다. 한 변의 길이에 대한 조건 대신에 한 각의 크기에 대한 조건이 주어지는 경우에도 $\triangle ABC$가 결정될까? 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어질 때 $\triangle ABC$가 결정됨은 앞서 확인했지만, 이때 끼인 각이 아닌 다른 각의 크기가 주어지더라도 $\triangle ABC$가 결정될 수 있을까? 일반성을 잃지 않고 두 변의 길이가 각각 $a,\ b$로 주어진 경우에 대해 각 A가 주어지는 경우에 대해 고려해보자.

점 A를 지나고 변 CA와 이루는 각의 크기가 A인 반직선 l에 대하여 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 a인 원과 반직선 l의 교점을 B라 하면 a의 값에 따라 가능한 모든 점 B의 개수는 각 A의 크기가 90° 미만의 특정한 값으로 주어졌을 때 $0,\ 1,\ 2$이며 각 A의 크기가 90° 이상의 특정한 값으로 주어졌을 때 $0,\ 1$이다.



이때 한 변의 길이에 대한 조건 대신에 한 각의 크기에 대한 조건이 주어지는 경우, 즉 한 변의 길이와 두 각의 크기가 주어진 경우 나머지 한 각의 크기 또한 알 수 있으므로 $\triangle ABC$가 결정된다.

단, 세 각의 크기에 대한 조건만 주어진 경우 $\triangle ABC$가 결정되지 않는데, 이는 세 각의 크기가 동일한 닮음인 $\triangle ABC$가 셀 수 없이 많이 존재하기 때문이다. 이를 정리한 것은 아래와 같다.

삼각형의 형성 조건

아래의 조건을 만족하는 $\triangle ABC$가 적어도 하나 존재할 때, 가능한 $\triangle ABC$의 개수는 다음과 같다.

$i)$ 세 변의 길이가 주어질 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다.

$ii)$ 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어질 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다. 한편 두 변의 길이와 끼인 각이 아닌 한 각의 크기가 예각으로 주어질 때 아래와 같이 경우를 나눌 수 있다.

① 끼인 각이 아닌 다른 각의 크기가 예각일 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다.

② 끼인 각이 아닌 다른 각의 크기가 직각일 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다.

③ 끼인 각이 아닌 다른 각의 크기가 둔각일 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다.

끼인 각이 아닌 한 각의 크기가 직각 또는 둔각으로 주어질 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다.

$iii)$ 한 변의 길이와 두 각의 크기가 주어질 때 $\triangle ABC$는 오직 하나로 정해진다.

$iv)$ 세 각의 크기가 주어질 때 가능한 $\triangle ABC$는 셀 수 없이 많이 존재한다.

한편 각에 대한 정보가 삼각함수에 대한 함숫값으로 주어진다면 어떨까?

함수 $y=\sin x$는 $x=\frac{\pi}{2}$에 대해 선대칭이므로 $\sin A$의 값을 알려주는 것은 $\sin A\neq 1$일 때 가능한 각 A의 크기를 두 개로 알려주는 것과 동일하며 $\sin A=1$일 때 각 A의 크기가 $A=\frac{\pi}{2}$임을 알려주는 것과 동일하다. 한편 함수 $y=\cos x$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 일대일대응이므로 $\cos A$의 값을 알려주는 것은 각 A의 크기를 알려주는 것과 동일하다.

따라서 $\triangle ABC$의 한 변의 길이와 두 각의 크기를 알 때 **사인법칙**을 이용하여 남은 두 변의 길이를 알 수 있음을 이용하면 한 변의 길이와 두 각의 사인함수에 대한 함숫값을 알 때 합이 π인 세 상수 α, β, γ에 대하여 가능한 두 각의 순서쌍을 $(\alpha,\ \beta)$, $(\pi-\alpha,\ \beta)$, $(\alpha,\ \pi-\beta)$, $(\pi-\alpha,\ \pi-\beta)$라 하면 남은 한 각의 가능한 경우의 수는 각각 γ, $\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$, $-\gamma$이며 이중 양수인 값은 2개이므로 가능한 두 변의 길이의 순서쌍의 개수가 2임을 알 수 있다.

사인법칙

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, 즉

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$, $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이다.

삼각형의 꼭짓점에서 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 이용하면 $c\sin B=b\sin C$이므로

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$이며, 한 호에 대한 원주각의 크기는 동일하므로 그 값이 $2R$임을 알 수 있다.

한 변의 길이와 두 각의 크기를 알 때, 두 변의 길이와 한 대각의 크기를 알 때, 또는

외접원의 반지름과 한 변 혹은 한 각의 크기를 알 때 사인법칙을 쓸 수 있다.

또한 $\triangle ABC$의 두 변의 길이와 끼인 각의 크기를 알 때 **코사인법칙**을 이용하여 남은 한 변의 길이를 알 수 있음을 이용하면 두 변의 길이와 끼인 각의 코사인함수에 대한 함숫값을 알 때 남은 한 변의 길이를 알 수 있다. 한편 두 변의 길이와 끼인 각이 아닌 각의 코사인함수에 대한 함숫값을 알 때 또한 남은 한 변의 길이를 알 수 있다.

코사인법칙

$\triangle ABC$에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

즉, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$이다.

삼각형의 꼭짓점에서 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 이용하면 피타고라스 정리에 의하여 $c^2 = (a - b\cos C)^2 + (b\sin C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$임을 쉽게 유도할 수 있다.

두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때, 또는 세 변의 길이를 알 때, 코사인법칙을 쓸 수 있다.