<수학 (하) 기말 정답 및 채점 기준>

[객관식 정답]

1. ④	5. ①	9. ②	13. ②
2. ②	6. ④	10. ②	14. ④
3. ④	7. ④	11. ④	15. ②
4. ②	8. ③	12. ⑤	

[주관식 채점 기준]

1. $-1 \le x \le 1$인

x에 대하여, $y = 4x - \sqrt{1-x^2}$ 의 치역을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [7점]

$\sqrt{1-x^2} = 4x - y$로 놓고 y 움직이며 범위 구함

최대는 (1,0) 지날 때 4 [3점, 상황만 맞으면 1점]

최소는 접할 때, -5 [3점, 상황만 맞으면 1점]

치역 작성 [1점, 집합 기호로 안 쓰면 –0.5점]

2. 함수 $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+1}$에 대해, 실수 x는 항상 $(f \circ f \circ f)(x) = x$를 만족한다. 이때, 실수 a, b에 대해 b의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오. [6점]

$a(ab+b) + b(b+1) = 0,\ ab + 2b + 1 = a(a^2+b) + b(a+1),\ a^2 + b = -(a+1)$ [2점, 모두 맞아야 점수 인정]

$b = 0$인 경우 모순 [2점, 설명 없이 적으면 0.5점]

$b \ne 0$인 경우 $b = -a^2 - a - 1$, 답 $-\dfrac{3}{4}$[2점, 각 1점, $b \ne 0$ 미작성 0.5점 감점]

3. ${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$임을 이용하여,

$1 \le k \le n$인 모든 자연수 n, k에 대해

${}_{3n+3}C_{3k} = {}_{3n}C_{3k-3} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k}$를 보이시오. [5점]

식을 적절히 분해하여 맞게 대입해 증명

n 대신 $3n$을 대입하는 과정과 k 대신 $3k-3$을 대입하는 과정 등을 보이고 정리하는 과정을 보이면 5점 부여

그 아래 생략의 정도에 따라 2점~4.5점 부여

대입하는 과정이 없으면 0점

4. A와 B 두 사람이 카드 게임을 해 12점을 먼저 내면 이기는 게임을 진행 중이다. 이기면 2점, 지면 1점을 얻고, 3의 배수번째의 판에서는 이기면 5점을 얻고, 지면 그동안 쌓은 모든 점수를 잃게 된다. A가 첫 번째 판을 이겼을 때, 물음에 답하시오. [9점]

(1) 6판 안에 승부가 나는 경우의 수를 구하시오. [5점]
A가 5판만에 이기는 경우: AAAAA, AxAxx(x는 3개 중 2개가 A)->1+3=4 [1점, 각 0.5점]
A가 6판만에 이기는 경우: AxAxxA(x는 3개 중 2개 또는 3개가 B)->1+3=4 [1점, 각 0.5점]
B가 5판만에 이기는 경우: ABBBB [0.5점]
B가 6판만에 이기는 경우: AxBxxB(x는 3개 중 2개 이하가 B)->8-1=7[1.5점, 0/1/2 각 0.5점]
4+4+1+7=16 [1점]

(2) A가 이기는 경우의 수를 구하는 것이 가능하다면 구하고, 구하는 것이 불가능하다면 왜 그런지 설명하시오.

(단, $|r|<1$이고 $S=a+ar+ar^2+ar^3+\dots$일 때, $S=\dfrac{a}{1-r}$이다) (비기는 경우는 없다.) [4점]

값을 구할 수 없다. [1점]
AAB/BBA/AAB/BBA....꼴이 계속 반복될 수 있기 때문이다. [3점]
주어진 의미를 포괄적으로 표현하게 서술한 경우 2점(ex)3의 배수마다 이기는 사람이 바뀐다), 단 BBA/AAB/... 같이 명시적으로 틀리게 표현한 경우 0점
그 외의 경우 모두 0점

5. 길에 1번부터 2020번까지의 램프가 있다. 램프의 버튼을 누르면 꺼진 램프는 켜지고, 켜진 램프는 꺼진다. 번호가 k인 학생은 길을 지나가며 k의 배수번째의 램프의 버튼을 모두 누른다. 처음에 모든 램프가 꺼져있을 때, 물음에 답하시오. [12점]

(1) 번호가 1번부터 2020번까지의 학생들이 모두 길을 지나갈 때, 켜진 램프의 개수를 구하는 과정을 서술하시오. [3점]
약수의 개수가 홀수이므로 A에 해당하는 것은 제곱수[1점], A에 속하는 원소의 개수는 44개 따라서, 44개 켜짐 [2점]

(2) 번호가 4번부터 2018번까지의 학생이 모두 지나가면 켜져 있는 램프는 총 몇 개인지 구하는 과정을 서술하시오. [9점]
램프의 번호가 1번부터 2018번까지를 먼저 생각
1, 2, 3번 학생이 지나가지 않았으므로, 최대 3회 적게 눌려짐
1번 덜 눌려진 경우: n이 2의 배수와 3의 배수 둘 다 아님
2번 덜 눌려진 경우: n이 2의 배수 또는 3의 배수이지만 6의 배수는 아님
3번 덜 눌려진 경우: n이 6의 배수인 경우

2018 이하의 자연수 중 2의 배수는 1009개, 3의 배수는 672개, 6의 배수는 336개
1번부터 2018번까지의 학생이 모두 지나갔을 때 켜져 있는 램프의 집합을 A, 꺼져 있는 램프의 집합을 B라 하자.
약수의 개수가 홀수이므로 A에 해당하는 것은 제곱수, A에 속하는 원소의 개수는 44개
이 중 2의 배수는 22개, 3의 배수는 14개, 6의 배수는 7개가 있음
(1) 1번 덜 눌려진 경우: B는 켜지고 A는 꺼짐
켜진 램프의 개수: 2018-1009-672+336=673에서 44-22-14+7=15를 뺀 658
(2) 2번 덜 눌려진 경우: A는 켜지고 B는 꺼짐
켜진 램프의 개수: 22+14-7=29에서 7을 뺀 22
(3) 3번 덜 눌려진 경우: A는 꺼지고 B는 켜짐
켜진 램프의 개수: 336-7=329
[(1), (2), (3) 각 2점, 답만 맞거나 계산 실수만 한 경우 1점, 상황이 어느 하나라도 틀리면 0점]
n=2019일 때, 2019=3*673이고 1, 3, 2019 제외하면 약수 1개->켜짐
n=2020일 때, 2020=(2^2)*5*101이고 1, 2, 2020 제외하면 약수 9개->켜짐
[2가지 모두 맞아야 1점, 설명 없이 맞거나 1개만 맞으면 0.5점]
따라서, 켜진 램프의 개수는 658+22+329+2=1011[2점]