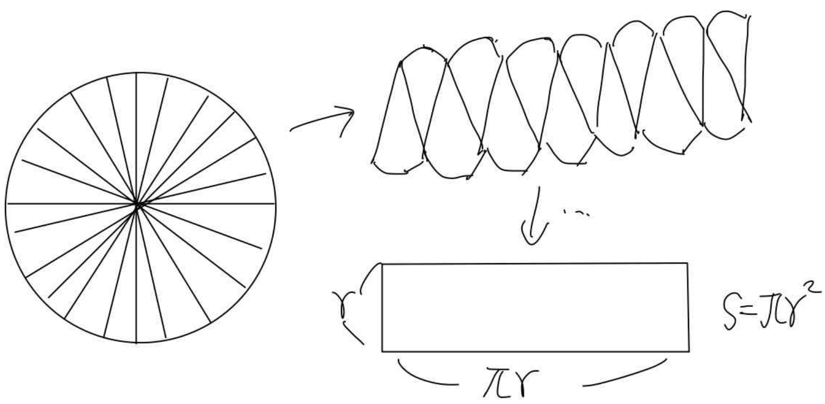
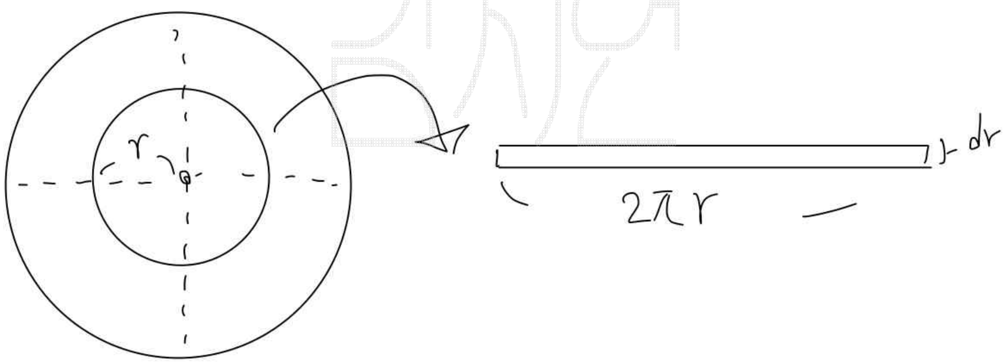


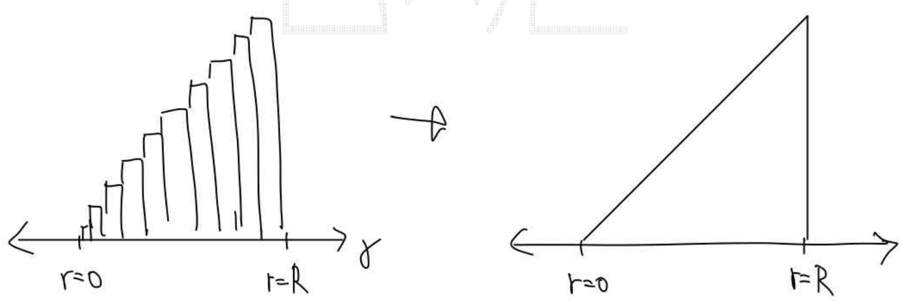
반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 왜 πr^2일까? (이 질문을 보고 반지름의 길이가 r인 원의 둘레는 왜 $2\pi r$인지 의문을 갖지 말자. 원주율 π는 원주(원의 둘레)로부터 정의됐다! 정의의 중요성을 떠올릴 수 있는 대목이다. 원의 넓이가 πr^2임의 증명이 아래의 그림과 같이 교과서에서 다뤄졌음을 기억하자. 본 대목은 원의 넓이를 증명하는 것이 아닌 미적분에 대한 감각을 잡는 것을 위함이다.)



상수 R과 변수 r $(0 < r \le R)$에 대하여 반지름이 R인 원 A의 넓이를 구하기 위해 원 A의 내부에 존재하는 반지름의 길이가 r인 동심원 B을 떠올려보자. 이때, 원 A의 넓이는 r의 범위에 대하여 반지름의 길이가 r인 모든 원의 둘레의 합과 동일할 것이라 추측할 수 있다. 본디 원의 정의가 한 점으로부터 일정한 거리만큼 떨어진 점들의 집합임을 떠올렸을 때, 원 B는 두께가 존재하지 않아야하지만 '두께가 존재하며, 그 두께가 점점 작아진다고' 가정함을 바탕으로 진행하자.

원 B을 잘라 수직선과 평행하게 놓았을 때 사다리꼴의 모양이 될 것이다. 간단하게 계산하기 위해 이를 직사각형의 형태라 가정하자. 원주의 길이가 $2\pi r$이므로 직사각형의 밑변의 길이는 $2\pi r$일 것

이며, 높이는 아주 작은 값일 것이므로 이 높이를 하나의 원에서 다음 원까지의 아주 작은 반지름 차이, 즉 직사각형의 두께를 나타내는 dr이라 하자. (이때 dr을 증분이라 하며, d는 derivative (미분)의 첫 글자임을 기억하자.) 따라서 잘라진 원은 넓이가 $2\pi r \times dr$인 직선에 가까운 직사각형과 근사하다고 할 수 있다. 비록 이것이 정확하지 않지만, (사다리꼴의 모양이라고 하는 것도 논리적 비약이 존재하지만, 그렇다고 직사각형으로 간주하는 것은 더욱 엄밀하지 못하다!) dr이 점점 더 작아진다고 생각하면 이것은 실제로 그 넓이에 대해 점점 더 가까워질 것이다. 따라서 이 근사치가 약간의 오차가 존재함을 무시하고 진행하도록 하자. dr이 점점 작아지면 오차가 점점 줄어들어 특정한 수치에 수렴한다. 지금까지를 요약하자면 r의 값이 변함에 따라 원 B이 존재하고, 원들을 하나하나 '잘려진 원'의 형태로 변환했을 때 원 B의 원주가 곧 잘려진 원의 넓이($2\pi r \times dr$)가 된다. ($0 < r < R$이며 원들 사이의 간격은 dr로 부르기로 했음을 기억하자.) 모든 잘려진 원 B을 r축 위에 밑변이 dr, 높이가 $2\pi r$이 되도록 크기순으로 배열한다면 다음과 같은 그림으로 표현할 수 있다.



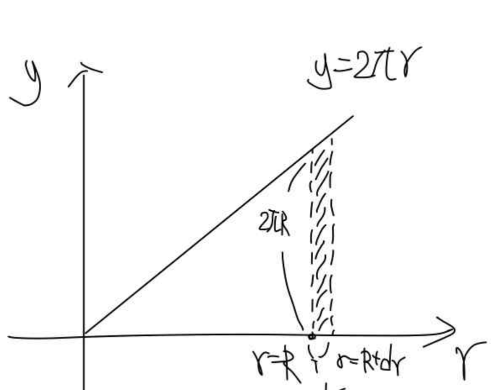
r의 값에 따라 $2\pi r$이 하나로 정해지므로 r축에 수직이고 $r=0$을 지나는 y축을 생각해볼 때, 함수 $y=2\pi r$의 그래프를 왼쪽의 그림에서 표현할 수 있다. 왼쪽의 모든 직사각형은 직선 $y=2\pi r$과 접하면서 항상 그 아래에 있음을 관찰하자. 즉, dr이 점점 작아지면서 모든 직사각형의 넓이의 합은 직선 $y=2\pi r$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $r=R$로 둘러싸인 부분의 넓이에 한없이 가까워진다. 다시 말해 왼쪽의 그림에서 오른쪽의 그림과 같이 근사할 수 있다. 오른쪽 그림에서 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times R \times 2\pi R = \pi R^2$이며, 이것이 바로 반지름의 길이가 R인 원의 넓이가 된다. 이때 r의 값

이 변하더라도 dr의 값은 일정했음과 dr의 값이 점점 작아지면서 관찰할 수 있는 두 개의 변화를 주목하자. 이는 초항과 등차가 모두 dr인 등차수열의 항들은 구간 $(0,\ R]$에 속하는 모든 r을 표현할 수 있었음, 그리고 원의 넓이를 구하기 위해 점점 더 좋은 근사치를 얻을 수 있었음이다. (결국 직각삼각형의 넓이를 통해 원의 넓이에 대한 근사치를 구했다!)

별개의 이야기지만, 원의 넓이를 구하는 공식을 찾는 과정에서 우리가 이미 알고 있던 직사각형의 넓이를 구하는 공식이나 직각삼각형의 넓이를 구하는 공식을 사용했듯, 수많은 학생들을 변별하는 킬러문제 역시 기본적인 개념들을 토대로 출제했음을 잊지 말자. 겁을 먹지 말라는 이야기다.

본론으로 돌아와, 원 A의 넓이가 πR^2임을 알 수 있었다. R의 값에 따라 πR^2이 하나로 결정되는 형태이므로 R의 값에 따른 원 A의 넓이는 함수이며 이를 $S(R)$이라 하자. $S(R)$은 r축과 y축으로 이루어진 ry좌표평면에서 $y=2\pi r$의 그래프에 대하여 0부터 R까지의 $y=2\pi r$의 그래프 아래의 넓이를 의미한다. 따라서 $S(R)$을 $y=2\pi r$의 0부터 R까지의 적분 혹은 기호 $\int$를 이용하여

$S(R)=\int_0^r 2\pi r dr$와 같이 나타낸다. 또한, r의 값을 $r=R$에서 dr만큼 증가시켰을 때 넓이가 사다리꼴만큼 변화하는 것을 부분적으로 관찰할 수 있다. 이러한 넓이의 차이를 dR이라 하자.



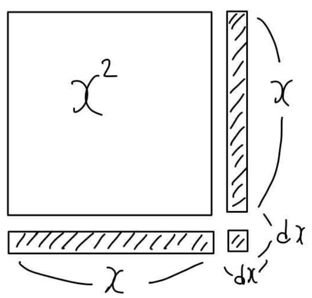
dr의 크기가 작아질수록 이 부분은 점점 더 직사각형에 가까워진다. 따라서 $dR \approx dr \times 2\pi R$이 성립하므로 이를 $\frac{dR}{dr} \approx 2\pi R$와 같이 나타낼 수 있다. 이때 dR의 값은 $S(R+dr)$에서 $S(R)$을 뺀 값과

같으므로 $\dfrac{S(R+dr)-S(R)}{dr} \approx 2\pi R$이다. r의 값이 변하더라도 dr의 값은 일정했으므로 r의 값에

따른 $\displaystyle\lim_{dr\to0}\frac{dR}{dr}=\lim_{dr\to0}\frac{S(R+dr)-S(R)}{dr}=2\pi r$은 함수이며, 이를 $S(R)$의 도함수라고 한다.

식 $\dfrac{S(R+dr)-S(R)}{dr}$이 가지는 의미를 생각해보자. 이는 두 점 $(R,\ S(R))$, $(R+dr,\ S(R+dr))$을 지나는 직선의 기울기와 동일함을 알 수 있다. 이를 r의 값이 R에서 $R+dr$까지 변할 때의, 혹은 $r=R$에서의 r의 증분이 dr일 때의 함수 $y=S(R)$의 평균변화율이라고 한다. 이때 dr의 크기가 작아질수록 두 점이 서로 가까워지면서 그 선의 기울기가 점 $(R,\ S(R))$에서의 접선의 기울기에 근사한다. 즉, $r=R$에서의 도함수 $\dfrac{dR}{dr}$의 값은 $y=S(R)$에 대한 점 $(R,\ S(R))$에서의 접선의 기울기와 동일하다. 따라서 평균변화율의 극한값인 도함수 $\dfrac{dR}{dr}$의 값을 순간변화율이라고 한다.

여러분이 공부하는 수학은 '수능 수학'이라는 점에서 앞으로 도함수의 함숫값을 원함수의 기울기로 해석할 일이 많겠지만, 본디 미분은 '변화량' (증분)으로 해석했음을 잊지 말자. 이를 통해 다양한 함수의 도함수를 직관적으로 받아들일 수 있다. 가령 $y=x^2$의 도함수는 다음과 같이 보일 수 있다.

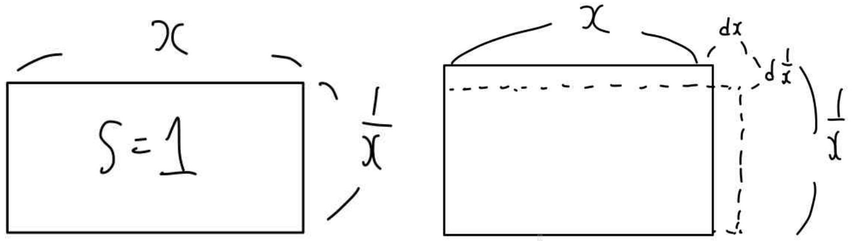


한 변의 길이가 x인 정사각형의 넓이는 x^2이므로, 변의 길이가 dx만큼 증가했을 때 dx^2은 색칠한 부분의 넓이, 즉 이웃한 두 변의 길이가 각각 x와 dx인 두 직사각형과 한 변의 길이가 dx인 정사각형의 넓이의 합이 된다. 즉, $dx^2=2xdx+(dx)^2$에서 $\dfrac{dx^2}{dx}=2x+dx$이다.

이때 dx는 0은 아니지만 한없이 작아지는 수라고 간주했음을 통해, $\dfrac{dx^2}{dx}=2x$가 된다.

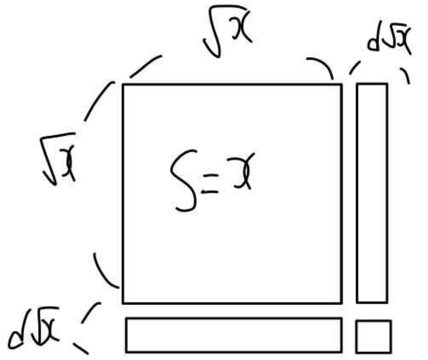
이렇듯 다항함수 $y=x^n$에서 x가 dx만큼 증가할 때 $(x+dx)^n=x^n+nx^{n-1}dx+$(차수가 2 이상인 dx항)에서 $\displaystyle\lim_{dx\to 0}\frac{(x+dx)^n-x^n}{(x+dx)-x}=\lim_{dx\to 0}nx^{n-1}+dx$(어떠한 다항식)$=nx^{n-1}$이 됨을 기억하자.

또 다른 예시로 $y=\dfrac{1}{x}$의 도함수를 구하기 위해 이웃한 두 변의 길이가 각각 x, $\dfrac{1}{x}$이고 넓이가 1인 직사각형을 떠올릴 수 있다. 이때 x가 dx만큼 늘어날 때, $\dfrac{1}{x}$는 $d\dfrac{1}{x}$만큼 줄어들게 된다.



이때 넓이의 증분 $d(1)=0$이므로 $d(1)=x\times d\left(\dfrac{1}{x}\right)=dx\times\dfrac{1}{x}$에서 $\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$이 성립한다.

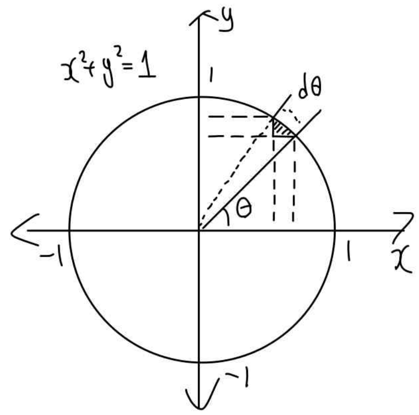
이번엔 $y=\sqrt{x}$의 도함수를 구하기 위해 한 변의 길이가 $\sqrt{x}$인 정사각형을 가져오자.



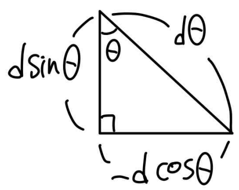
정사각형의 넓이의 증분은 $dx=2\times d\sqrt{x}\times\sqrt{x}+(d\sqrt{x})^2$에서 $1=2\times\dfrac{d\sqrt{x}}{dx}\times\sqrt{x}+\dfrac{(d\sqrt{x})^2}{dx}$이므로

$\dfrac{d\sqrt{x}}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{d\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$이고 $\displaystyle\lim_{dx\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{d\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이다. 즉, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이다.

이번에는 $y=\sin\theta$의 도함수를 구해보자. 이때 중심이 원점인 단위원 $x^2+y^2=1$을 떠올릴 수 있다.



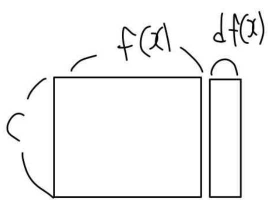
이때 색칠한 부분(부채꼴에서 오목사각형을 뺀 도형)을 다음과 같은 직각삼각형으로 근사하자.



우선, $\cos\theta$가 원 위의 점에 대하여 x좌표를 의미함에 따라 $d\theta>0$일 때 $d\cos\theta<0$이므로 변의 길이는 $-d\cos\theta$임을 확인하자. 각의 크기가 $d\theta$이므로 부채꼴의 호의 길이, 즉 그림에서 빗변의 길이는 $d\theta$이다. 이 직각삼각형은 원점과 두 점 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(\cos\theta,\ 0)$을 꼭짓점으로 갖는 삼각형과 닮음이다. (반지름과 원주에 접하는 직선은 수직임을 통해 $d\theta$와 $d\sin\theta$의 끼인각이 θ임을 찾자.)

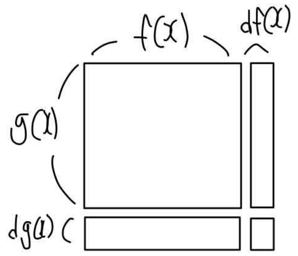
따라서 $\dfrac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta$이고 $\dfrac{-d\cos\theta}{d\theta}=\sin\theta$에서 $\dfrac{d\cos\theta}{d\theta}=-\sin\theta$이다.

일반화하여, 함수에 상수가 곱해진 형태의 경우 그 도함수를 다음과 같이 확인할 수 있다.



위 그림을 식으로 나타냈을 때 $\dfrac{d\{cf(x)\}}{dx}=c\times\dfrac{df(x)}{dx}$임을 알 수 있다.

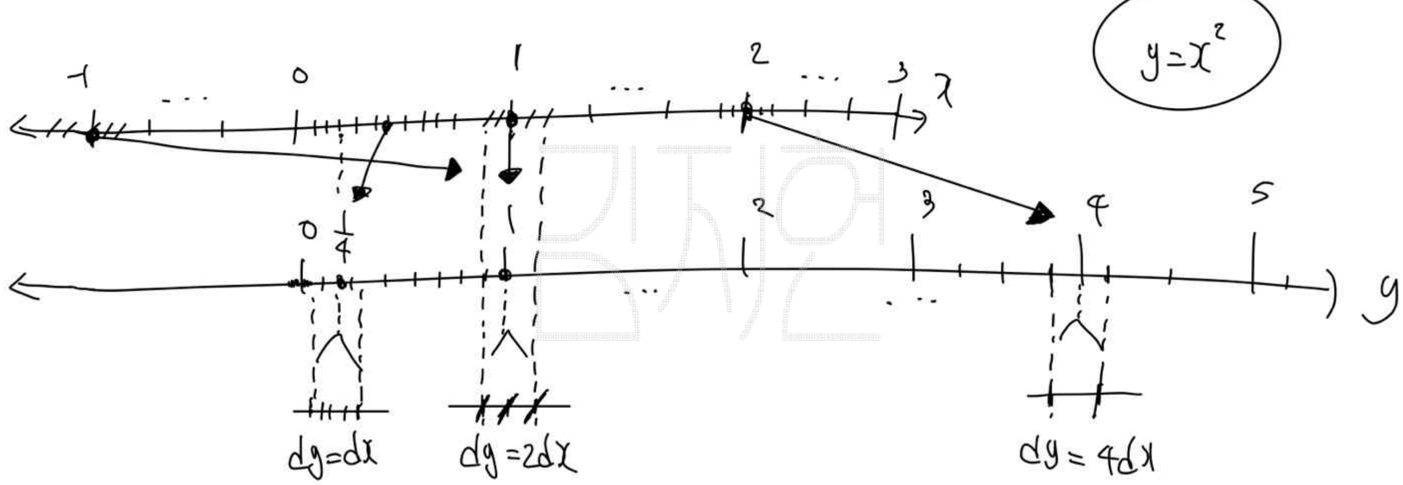
또한 두 함수가 곱해진 형태의 도함수와 같은 경우 다음과 같이 확인할 수 있다.



위 그림을 식으로 나타냈을 때 두 함수가 곱해진 형태의 도함수를 구하는 방법을 알 수 있다.

즉, $\dfrac{d\{f(x)\times g(x)\}}{dx}=f(x)\times\dfrac{dg(x)}{dx}+g(x)\times\dfrac{df(x)}{dx}+\dfrac{df(x)\times dg(x)}{dx}=f(x)\times\dfrac{dg(x)}{dx}+g(x)\times\dfrac{df(x)}{dx}$이다.

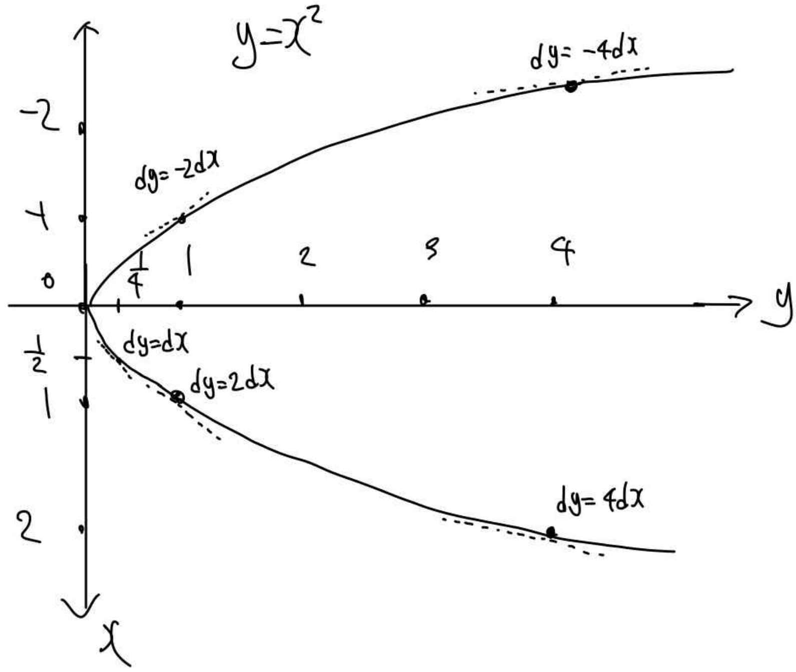
다시 한 번 강조하자면, 도함수라는 것을 기울기로 해석하는 것이 수능 수학에서 문제를 풀 때 중요하지만, 다음과 같이 dx에 대한 dy의 대응관계를 해석할 수 도 있다.



$y=x^2$이라 할 때 $x=\dfrac{1}{2}$에서 $y=\dfrac{1}{4}$이고 이때 $dy=dx$임을, $x=1$에서 $y=1$이고 $dy=2dx$임을, $x=2$에서 $y=4$이고 $dy=4dx$임을, 마지막으로 $x=-1$에서 $y=1$이고 $dy=-2dx$임을 확인하자.

특히 $y=1$에서 dy의 방향성을 확인할 때, $x=1$에서는 /는 그대로 내려와 /가 됨을, $x=-1$에서 /는 180도 회전하여 /가 됨 역시 확인하자. 특히, x에 따른 y의 값을 xy 좌표평면에서 주로 다루지만 다음과 같이 평행한 두 직선위에 올려두고 관찰하는 방법 역시 잊지 말자.

x의 값이 달라지더라도 dx가 일정하였음은 앞에서 강조했지만, dx에 따라 dy가 달라지는 것을 보다 보면 y의 값이 달라질 때 dy가 일정한 것은 맞는지 의문이 들 수 있다. 다음 그림을 보자.



x에 대한 함수 $y=x^2$를 두 범위에 따라 $x \ge 0$와 $x<0$로 나누어 볼 때 $x=\begin{cases}\sqrt{y} & (x \ge 0) \\ -\sqrt{y} & (x<0)\end{cases}$이다.

앞서 $\dfrac{d\sqrt{x}}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$임을 밝혀낸 것을 토대로 $x>0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\sqrt{y}}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$이고 $x<0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d(-\sqrt{y})}{dy}=\dfrac{1}{2(-\sqrt{y})}$임을 알 수 있다. 이 경우 y에 따라 dy의 값은 일정하지만 dy에 따라 dx가 달라지는 것을 관찰 할 수 있다. dx와 dy, 즉 증분은 상수 취급을 하며 계산하지만, $\dfrac{dy}{dx}$는 $\dfrac{d}{dx}$라는 미분 연산을(사칙연산할 때 그 연산이 맞다!) y라는 함수에 적용한 것이라는 의미이므로 dx와 dy는 '일정한 관계를 가진 두 상수'로 간주하자. 다시 말해 문제를 풀 때 계산과정에서 증분을 사용할 때는 상수취급을 하면서 풀더라도 큰 문제가 없다. 여담으로, $x>0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\sqrt{y}}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2x}$이고 $x<0$에서 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d(-\sqrt{y})}{dy}=\dfrac{1}{2(-\sqrt{y})}=\dfrac{1}{2x}$이므로 $x \ne 0$에서 $\dfrac{dy}{dx}=2x$임을 다시 한 번 보일 수 있다. $x=\begin{cases}\sqrt{y} & (x \ge 0) \\ -\sqrt{y} & (x<0)\end{cases}$의 경우 함수는 아니지만, (함수의 정의를 떠올리자!) 서로 다른 두 식으로 쓰인 각각의 대응관계는 동일함 역시 생각해볼 수 있다.

이러한 증분에 대한 기하적 이해가 문제에서 어떻게 사용될 수 있을까?

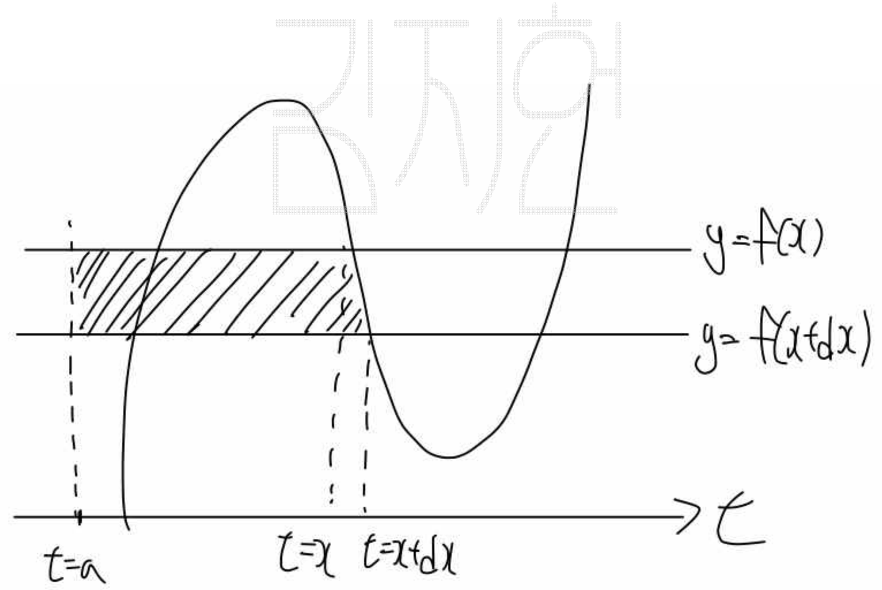
가령 적당한 삼차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $g(x)=\int_a^x f(x)-f(t)dt$와 같은 예시를 들어보자.

우선 함수 $g(x)$가 t에 대한 정적분의 형태이며 x에 대하여 $g(x)$의 값이 결정되는 형태이다.

따라서 우리는 x에서 dx만큼 더해질 때 $g(x+dx)$가 어떻게 변화하는지 관찰하면 된다!

우선 t에 대한 좌표평면이므로 ty좌표평면에서 그래프 $y=f(t)$를 그린 이후 $t=x$와 만나는 점의 좌표는 $(x,\ f(x))$일 것이므로 (x가 t와 관련이 없으므로 잠시 x를 상수라 간주하자!) 이에 따라 직선 $y=f(x)$를 그을 수 있다. 동일하게 $t=x+dx$와 곡선 $y=f(t)$가 만나는 점의 좌표는 $(x+dx,\ f(x+dx))$일 것이므로 이에 따라 직선 $y=f(x+dx)$를 그을 수 있다.

이때 정적분 $\int_a^x f(x)-f(t)dt$는 x가 $x+dx$로 변화할 때 다음과 같은 변화가 일어난다.



색칠한 부분의 넓이는 $g(x)-g(x+dx)$이다. ($g(x)$는 저 상황에서 감소하고 있음을 인지하자.) 이를 앞에서 근사했듯이 직사각형이라 간주할 때, 밑변의 길이는 $x-a$이며 그 높이는 $f(x)-f(x+dx)$이다. 즉, $g(x)-g(x+dx)=(x-a)\{f(x)-f(x+dx)\}$이므로 양변에 $-dx$를 나눌 때

$\dfrac{g(x+dx)-g(x)}{dx}=(x-a)\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$에서 $g'(x)=(x-a)f'(x)$이다.