제 2 교시

2025학년도 대학수학능력시험 이감 파이널 플러스 예비평가

정답 및 해설

※ 시험이 끝나기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

씨에스엠17

2025학년도 대학수학능력시험 이감 파이널 플러스 예비평가
정답 및 해설

파이널 플러스 예비평가

[공통]

1	⑤	**2**	③	**3**	①	**4**	①	**5**	②
6	④	**7**	③	**8**	①	**9**	②	**10**	⑤
11	③	**12**	④	**13**	④	**14**	⑤	**15**	②
16	6	**17**	20	**18**	110	**19**	10	**20**	5
21	93	**22**	71						

[해설]

1. 정답 ⑤

$\log_2 \frac{4}{3} + \log_4 18$
$= \log_2 4 - \log_2 3 + \log_4 2 + \log_4 9$
$= 2 - \log_2 3 + \frac{1}{2} + \log_2 3$
$= \frac{5}{2}$

2. 정답 ③

$f(x) = x^3 - ax^2$ 에서
$f'(x) = 3x^2 - 2ax$
$\therefore\ f'(1) = 3 - 2a$
따라서 $3 - 2a = -3$ 이므로 $a = 3$

3. 정답 ①

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} = 2$ 이므로
$\tan\theta = \frac{1}{2}$
$\sin\theta < 0$, $\tan\theta > 0$ 이므로 $\cos\theta < 0$ 이다.
$\therefore\ \cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 정답 ①

$\lim_{x\to -1-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = -1$ 이므로
$\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = -2 + (-1) = -3$

5. 정답 ②

점 P가 시각 $t = a$ 에서 운동방향을 바꾸므로
$v(a) = 0$ 이고
$v(a) = (a+1)(a-2) = 0 \qquad \therefore\ a = 2\ (\because\ a > 0)$
점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$ 에서의 위치를 $x(t)$ 라 하면
$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 5$
따라서 구하는 값은
$x(a) = x(2) = \frac{8}{3} - 2 - 4 + 5 = \frac{5}{3}$

6. 정답 ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하자.
$a_3(1 + r + r^2) = 2 \qquad \cdots$ ㉠
$a_3(1 - r^3) = 1 \qquad \cdots$ ㉡
㉠의 양변에 $1 - r$ 을 곱하면
$a_3(1 + r + r^2)(1 - r) = 2(1 - r)$
$a_3(1 - r^3) = 2 - 2r$
이므로 ㉡에 의하여
$1 = 2 - 2r \qquad \therefore\ r = \frac{1}{2}$
㉡에서
$a_1 \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = 1 \qquad \therefore\ a_1 = \frac{32}{7}$

7. 정답 ③

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ 이므로 $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$ 에서
$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \frac{5}{2}$
$2(\log_a b)^2 - 5\log_a b + 2 = 0$
$(2\log_a b - 1)(\log_a b - 2) = 0$
$\therefore\ \log_a b = 2\ (\because\ \log_a b > 1)$
따라서 $b = a^2 \qquad \cdots$ ㉠
$\log_2 a \times \log_2 b = 18$ 에서
$\log_2 a \times \log_2 a^2 = 18$
$2(\log_2 a)^2 = 18$
$(\log_2 a)^2 = 9$
$\log_2 a = 3\ (\because\ \log_2 a > 0)$
$\therefore\ a = 8,\ b = 64\ (\because$ ㉠$)$
따라서 구하는 값은
$a + b = 8 + 64 = 72$

8. 정답 ①

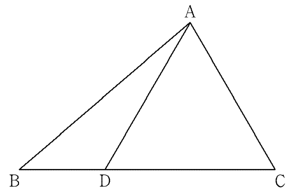
주어진 식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
$f(1) = 0 \qquad \cdots$ ㉠
주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
$f(x) + xf'(x) = x^3 + x^2 + f(x)$
$f'(x) = x^2 + x$
함수 $f'(x)$ 는 다항함수이므로
$\int f'(x)\,dx = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
(단, C 는 적분상수)
이때 ㉠에 의하여
$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = 0$
$\therefore\ C = -\frac{5}{6} = f(0)$

9. 정답 ②

함수 $f(x) = x^3 + x$ 에서
$f'(x) = 3x^2 + 1$
이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다.
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$
에서의 x 절편을 α 라 하면
$0 = f'(a)(\alpha - a) + f(a)$
$\therefore\ \alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)}\ (\because\ f'(a) > 0)$
곡선 $y = f(x) + 4$ 위의 점 $(a, f(a) + 4)$ 에서의 접선의 방정식
$y = f'(a)(x - a) + f(a) + 4$
에서의 x 절편을 β 라 하면
$0 = f'(a)(\beta - a) + f(a) + 4$
$\therefore\ \beta = a - \frac{f(a) + 4}{f'(a)}\ (\because\ f'(a) > 0)$
이때 주어진 조건에서 $|\alpha - \beta| = 3$ 이므로
$|\alpha - \beta| = \left|\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) - \left(a - \frac{f(a) + 4}{f'(a)}\right)\right|$
$= \left|\frac{4}{f'(a)}\right| = 3$
$\therefore\ f'(a) = \frac{4}{3}\ (\because\ f'(a) > 0)$
따라서
$f'(a) = 3a^2 + 1 = \frac{4}{3}$
$3a^2 = \frac{1}{3} \qquad \therefore\ a = \frac{1}{3}\ (\because\ a > 0)$

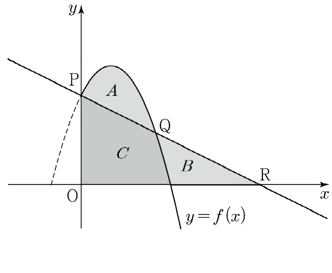
[다른 풀이]
함수 $f(x) = x^3 + x$ 에서
$f'(x) = 3x^2 + 1$
곡선 $y = f(x) + 4$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이고,
$\cdots$ ㉠
곡선 $y = f(x) + 4$ 위의 점 $(a, f(a) + 4)$ 에서의 접선을 l_1, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선을 l_2 라 하면
직선 l_1 의 기울기와 직선 l_2 의 기울기가 $f'(a)$ 로 같으므로 두 접선은 평행하고,
직선 l_1 은 직선 l_2 를 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이다. ($\because$ ㉠)
이때 두 직선 l_1, l_2 의 x 절편의 차가 3이므로
두 직선의 기울기는 모두 $\frac{4}{3}$ 이다.
따라서
$f'(a) = 3a^2 + 1 = \frac{4}{3} \qquad \therefore\ a = \frac{1}{3}\ (\because\ a > 0)$

10. 정답 ⑤



$\overline{AB} : \overline{BD} = \sqrt{7} : 1$ 이므로
$\overline{AB} = \sqrt{7}k$, $\overline{BD} = k$
라 하면 삼각형 ADB에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{BD} \times \cos\frac{2}{3}\pi$
$(\sqrt{7}k)^2 = 4^2 + k^2 - 2 \times 4 \times k \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
$6k^2 - 4k - 16 = 0$
$2(3k + 4)(k - 2) = 0 \qquad \therefore\ k = 2$
따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)} = 2R$
$\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \qquad \therefore\ R = \frac{2\sqrt{21}}{3}$
이므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{28}{3}\pi$

11. 정답 ③



곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ 및 x축, y축으로 둘러싸인 영역을 C라 하면

$(A+C$의 넓이$)=(B+C$의 넓이$)$ ⋯ ㉠

방정식 $-x^2+2x+3=0$에서

$-(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore\ x=3$ $(\because\ x\ge 0)$

이므로

$$(A+C\text{의 넓이})=\int_0^3(-x^2+2x+3)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3=9$$

$$(B+C\text{의 넓이})=(\text{삼각형 OPR의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\times3\times\overline{\mathrm{OR}}=9\ (\because\ ㉠)$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OR}}=6$

이때 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

직선 PR의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+3$

점 $\mathrm{Q}(a, b)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$이 만나는 점이므로

방정식 $-a^2+2a+3=-\frac{1}{2}a+3$에서

$a^2-\frac{5}{2}a=0$

$a\left(a-\frac{5}{2}\right)=0$ $\quad\therefore\ a=\frac{5}{2}$ $(\because\ a>0)$

12. 정답 ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	⋯	3	⋯	6	⋯	9	⋯	(12)
$f(x)$	(0)	+	10	+	0	−	−10	−	(0)
$g(x)$	(10)	+	0	−	−10	−	0	+	(10)

함수 $f(x)$의 치역이 집합 $\{y\mid -2c\le y\le c\}$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 닫힌구간 $[a, b]$에 존재한다.

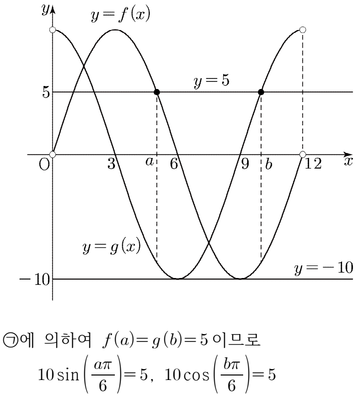
이때 $f(k)=0$, $0<k<12$를 만족시키는 k의 값이 6뿐이므로 함수 $f(x)$의 정의역에 $x=6$이 포함된다.

즉, $a\le 6\le b$이고 $g(6)=-10$이므로

함수 $g(x)$의 치역은 집합 $\{y\mid -10\le y\le c\}$이다.

$-2c=-10$ $\quad\therefore\ c=5$ ⋯ ㉠

닫힌구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



㉠에 의하여 $f(a)=g(b)=5$이므로

$10\sin\left(\frac{a\pi}{6}\right)=5$, $10\cos\left(\frac{b\pi}{6}\right)=5$

$\sin\left(\frac{a\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{b\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=5$ $(\because\ 3<a<6)$,

$b=10$ $(\because\ 9<b<12)$

따라서 구하는 값은

$a+b+c=5+10+5=20$

13. 정답 ④

a_1은 자연수이므로 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이다.

(i) $1\le a_6\le 3$일 때

a_6	a_5	a_4
1	(모순)	
2	1	(모순)
3	(모순)	

(ii) $a_6=4$일 때

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
4	5	6	7	8	3
					9
	2	1	(모순)		

(iii) $a_6=5$일 때

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
5	6	7	8	3	(모순)
				9	10

(iv) $a_6=6$일 때

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
6	7	8	3	(모순)	
			9	10	11

(i)~(iv)에 의하여 가능한 모든 a_1의 값은

3, 9, 10, 11

이고, 그 합은

$3+9+10+11=33$

14. 정답 ⑤

$x\ne 0$일 때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $k\ne 0$인 실수 k에 대하여 $f(k)=0$이면

$\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k-}f(t)=0$

이고, 방정식 $f(x)\times 0=0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $g(k)$는 정의되지 않는다.

<u>따라서 $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne 0$이다.</u> ⋯ ㉠

한편, $x<0$일 때

$x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$

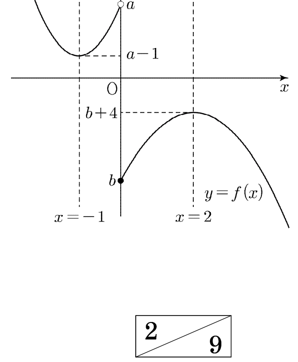
에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-1$을 가지므로 $a-1>0$이고,

$x>0$일 때

$-x^2+4x+b=-(x-2)^2+b+4$

에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $b+4$를 가지므로 $b+4<0$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

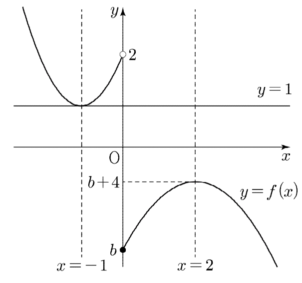


(i) $k\ne 0$일 때

$\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k+}f(t)\ne 0$

$f(x)\times\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k+}f(t)$, 즉 $f(x)=1$

$g(k)=1$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 한 점에서만 만나야 한다.



따라서 함수 $y=x^2+2x+a$의 그래프는 직선 $y=1$과 접해야 하므로 함수 $y=x^2+2x+a$의 최솟값은 1이다.

$a-1=1$ $\quad\therefore\ a=2$

(ii) $k=0$일 때

$\lim_{t\to 0-}f(t)=a=2$, $\lim_{t\to 0+}f(t)=b$

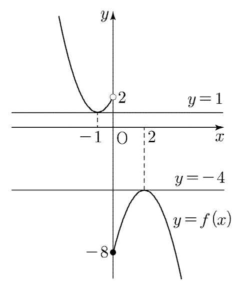
$f(x)\times\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k+}f(t)$, 즉 $f(x)=\frac{b}{2}$

$g(k)=1$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{b}{2}$와 한 점에서만 만나야 하고, $b<-4$이므로

함수 $y=-x^4+4x+b$의 그래프와 직선 $y=\frac{b}{2}$가 접해야 한다.

함수 $y=-x^4+4x+b$의 최댓값은 $b+4$이므로

$\frac{b}{2}=b+4$ $\quad\therefore\ b=-8$



(i), (ii)에 의하여 $a=2$, $b=-8$이므로

$a\times b=-16$

15. 정답 ②

$g(x)=\int_0^x f(s)\,ds$라 하면 주어진 조건은

$|x|\le t$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)-g(t)\le 0\le g(x)-g(-t)$

$g(-t)\le g(x)\le g(t)$

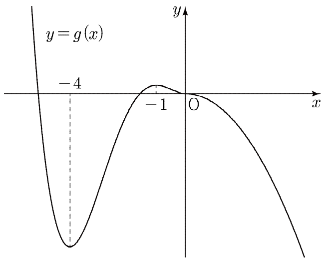
즉, 닫힌구간 $[-t, t]$에서 함수 $g(x)$는 최솟값 $g(-t)$와 최댓값 $g(t)$를 가진다. ⋯ ㉠

또한 $x<0$에서

$g'(x)=f(x)=x(x+1)(x+4)$

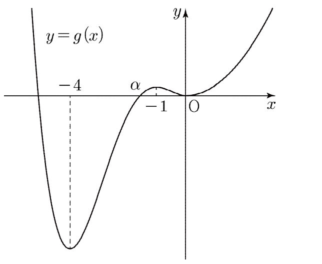
이므로 $x<0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	(0)
$g(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{32}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{12}$	$\searrow$	(0)



이때 $m \le 0$이면 $x \ge 0$에서 $g(x) \le 0$이므로
함수 $g(x)$가 ㉠을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ m > 0$



한편, ㉠을 만족시키려면
함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-t, t]$에서 최솟값이
$g(-t)$이어야 하므로
방정식 $g(x)=0$의 실근 중 -4보다 크고 -1보다
작은 것을 α라 하면

$-4 \le -t \le \alpha$,

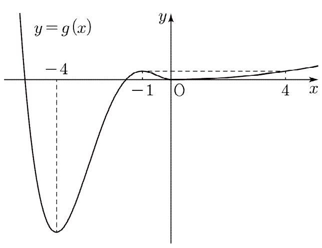
$-\alpha \le t \le 4$ $\cdots$ ㉡

$\alpha < -1$이므로 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-t, t]$에서
극댓값 $\dfrac{7}{12}$을 가진다.
이 구간에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(t)$이므로

$g(t) \ge \dfrac{7}{12}$

이때 ㉡의 t의 범위에서 함수 $g(t)$는 증가하고,
$g(t) \ge \dfrac{7}{12}$을 만족시키는 양수 t의 값이 닫힌구간
$[-\alpha, 4]$에서 유일하므로

$\therefore\ t=4,\ g(4)=\dfrac{7}{12}$



$x>0$에서 $g(x)=\displaystyle\int_0^x ms\,ds$이므로

$$g(4)=\int_0^4 ms\,ds=\left[\frac{m}{2}s^2\right]_0^4=8m=\frac{7}{12}$$

$\therefore\ m=\dfrac{7}{96}$

16. 정답 6

부등식 $(2^x-3)(2^x-7) \le 5$에서

$2^{2x}-10\times 2^x+21 \le 5$

$2^{2x}-10\times 2^x+16 \le 0$

$(2^x-2)(2^x-8) \le 0$

$2 \le 2^x \le 8$

$\therefore\ 1 \le x \le 3$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3=6$

17. 정답 20

$\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{a\sqrt{x}-2}{x-4}=b$에서 $x\to 4$일 때 (분모)$\to 0$이고
극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\displaystyle\lim_{x\to 4}(a\sqrt{x}-2)=2a-2=0$ $\therefore\ a=1$
따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{a\sqrt{x}-2}{x-4}&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\\&=\frac{1}{4}=b\end{aligned}$$

이므로 $16(a+b)=20$

18. 정답 110

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{5}(a_k-4k)^2$에서

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{5}\{(a_k)^2-8ka_k+16k^2\}$$

$$0=\sum_{k=1}^{5}(-8ka_k+16k^2)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}ka_k&=2\sum_{k=1}^{5}k^2\\&=2\times\frac{5\times 6\times 11}{6}=110\end{aligned}$$

19. 정답 10

$x>0$일 때

$2x^4+15x^3+24x^2=kx$

$2x^3+15x^2+24x=k$

$x<0$일 때

$2x^4+15x^3+24x^2=-kx$

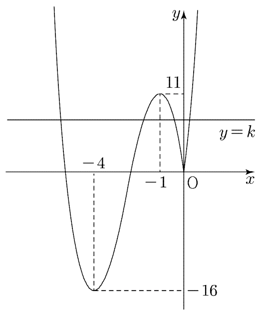
$-2x^3-15x^2-24x=k$

한편, 방정식 $2x^4+15x^3+24x^2=k|x|$가 $x=0$을
실근으로 가지므로
$x>0$일 때 곡선 $y=2x^3+15x^2+24x$과 직선
$y=k$의 교점의 개수와
$x<0$일 때 곡선 $y=-2x^3-15x^2-24x$과 직선
$y=k$의 교점의 개수의 합이 4일 때
방정식 $2x^4+15x^3+24x^2=k|x|$의 서로 다른 실근의
개수가 5이다.
이때 $f(x)=2x^3+15x^2+24x$라 하면
$f'(x)=6x^2+30x+24=6(x+1)(x+4)$이므로
두 함수

$y=2x^3+15x^2+24x\ (x>0)$,

$y=-2x^3-15x^2-24x\ (x \le 0)$

의 그래프와 직선 $y=k$는 다음 그림과 같다.



따라서 가능한 k의 값의 범위는 $0<k<11$이므로
정수 k의 최댓값은 10

20. 정답 5

x에 대한 방정식 $(x^n-16)(x^{2n}-64)=0$에서

$x^n=16$ 또는 $x^{2n}=64$

(ⅰ) n이 홀수일 때

$x^n=16$의 실근은 $x=2^{\frac{4}{n}}$,

$x^{2n}=64$의 실근은 $x=\pm 2^{\frac{3}{n}}$이므로

모든 실근의 곱은

$2^{\frac{4}{n}}\times\left(-2^{\frac{3}{n}}\right)\times 2^{\frac{3}{n}}=-2^{\frac{10}{n}}$

(ⅱ) n이 짝수일 때

$x^n=16$의 실근은 $x=\pm 2^{\frac{4}{n}}$,

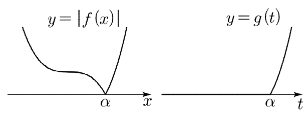
$x^{2n}=64$의 실근은 $x=\pm 2^{\frac{3}{n}}$이고

모든 실근의 곱은 양수이므로 조건을
만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 n은 10의 약수이면서
홀수이므로 $n=5\ (n \ge 2)$

21. 정답 93

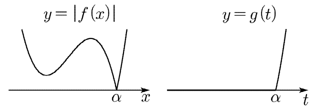
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않고 $f(\alpha)=0$이라 하면
두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(t)$의 그래프의 개형은
다음 그림과 같다.



이때 함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty, \alpha]$에서만 증가하지
않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만날 때의 경우는
다음과 같다.

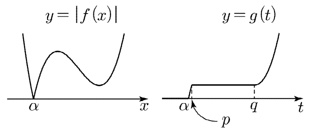
(ⅰ) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서
만날 때
$f(\alpha)=0$이라 하면

① 함수 $|f(x)|$가 $x \ge \alpha$에서 극솟값을 갖지
않을 때

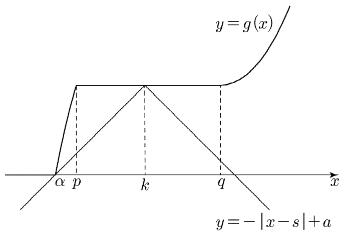


함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty, \alpha]$에서만 증가하지
않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

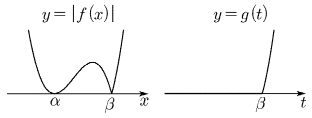
② 함수 $|f(x)|$가 $x>\alpha$에서 극솟값을 가질 때



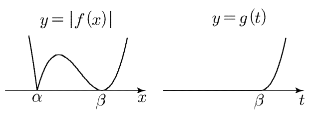
함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 점의 x좌표를 q, 방정식 $|f(x)|=f(q)$를 만족시키는 x의 값 중 $\alpha<x<q$인 x의 값을 p라 하면
함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty, \alpha]$와
닫힌구간 $[p, q]$에서만 증가하지 않는다.
$\alpha<x<q$에서 함수 $y=-|x-s|+h(s)$의 그래프에서 점 $(s, h(s))$가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있도록 하는 양수 s가 존재하지 않으면 함수 $h(s)$는 구간 $(-\infty, \alpha]$에서만 증가하지 않으므로 모순이다.
$\alpha<x<q$에서 함수 $y=-|x-s|+h(s)$의 그래프에서 점 $(s, h(s))$가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있을 때, 점의 x좌표를 k라 하면
함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty, \alpha]$,
닫힌구간 $[k, q]$에서만 증가하지 않는다.
$\therefore\ \alpha=0,\ k=1,\ q=2$



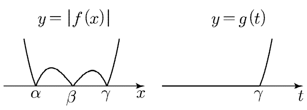
(ⅱ) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만날 때
$f(\alpha)=f(\beta)=0\ (\alpha<\beta)$라 하면
① 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가질 때



함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty, \beta]$에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
② 함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 극솟값을 가질 때

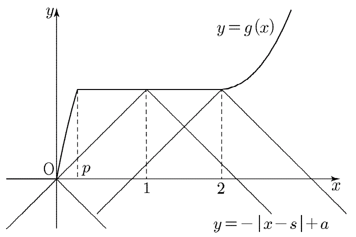


함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty, \beta]$에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅲ) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만날 때
$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0\ (\alpha<\beta<\gamma)$라 하면



함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty, \gamma]$에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편, 위 그림과 같이 함수 $h(s)$는
구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하지 않으므로
$g(0)=0$
이고 함수 $y=-|x-s|+h(s)$의 대칭축이
$x=1$이고 원점을 지나야 하므로
$0=-|(0-1)|+h(1) \qquad \therefore\ h(1)=1$
$f(x)=(x-p)(x-2)^2+1$에서 $f(0)=0$이므로
$f(0)=-4p+1=0 \qquad \therefore\ p=\dfrac{1}{4}$
즉,
$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(x-2)^2+1$
따라서 구하는 값은
$f(6)=\dfrac{23}{4}\times16+1=93$

22. 정답 71

$b_n=a_n+p$라 하면
$b_1=a_1+p,\ b_2=a_1-\dfrac{5}{2}+p,$
$b_3=a_1-5+p,\ b_4=a_1-\dfrac{15}{2}+p,\ \cdots$
이때 b_3의 값이 자연수이면
$b_1=b_3+5$
이므로 b_1의 값도 자연수이고 조건을 만족시키지 않는다.
마찬가지로 b_4의 값이 자연수이면 b_2의 값이 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $n\geq3$인 모든 자연수 n에 대하여
b_n의 값은 자연수가 아니어야 한다. $\cdots$ ㉠
(ⅰ) b_1의 값이 자연수일 때
b_1의 값이 자연수이면 모든 자연수 n에 대하여 b_{2n}의 값은 자연수가 아니다.
또한 b_1의 값이 6 이상의 자연수이면
b_3의 값도 자연수이고
㉠을 만족시키지 않으므로 $b_1\leq5$이어야 한다.
따라서 가능한 b_1의 값은
1, 2, 3, 4, 5
이므로 가능한 p의 값은
$1-a_1,\ 2-a_1,\ 3-a_1,\ 4-a_1,\ 5-a_1$
(ⅱ) b_2의 값이 자연수일 때
b_2의 값이 자연수이면 모든 자연수 n에 대하여 b_{2n-1}의 값은 자연수가 아니다.
또한 b_2의 값이 6 이상의 자연수이면
b_4의 값도 자연수이고
㉠을 만족시키지 않으므로 $b_2\leq5$이어야 한다.
따라서 가능한 b_2의 값은
1, 2, 3, 4, 5
이므로 가능한 p의 값은
$1-a_2,\ 2-a_2,\ 3-a_2,\ 4-a_2,\ 5-a_2$
이때 $a_2=a_1-\dfrac{5}{2}$이므로 가능한 p의 값은
$\dfrac{7}{2}-a_1,\ \dfrac{9}{2}-a_1,\ \dfrac{11}{2}-a_1,\ \dfrac{13}{2}-a_1,\ \dfrac{15}{2}-a_1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m=10$이고 p의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것은 다음 표와 같다.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
$1-a_1$	$2-a_1$	$3-a_1$	$\dfrac{7}{2}-a_1$	$4-a_1$

p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
$\dfrac{9}{2}-a_1$	$5-a_1$	$\dfrac{11}{2}-a_1$	$\dfrac{13}{2}-a_1$	$\dfrac{15}{2}-a_1$

따라서
$p_{10}=\dfrac{15}{2}-a_1=\dfrac{23}{2} \qquad \therefore\ a_1=-4$
이므로 구하는 값은
$\displaystyle\sum_{n=1}^{m-1}p_n$
$=(1+2+3+4+5)+\left(\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{11}{2}+\dfrac{13}{2}\right)-9a_1$
$=15+20-9\times(-4)=71$

[확률과 통계]

23	③	**24**	⑤	**25**	④	**26**	②	**27**	①
28	②	**29**	95	**30**	50				

[해설]

23. 정답 ③

다항식 $(x^2+2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^r2^{5-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
따라서 x^6의 계수는 $r=3$일 때이므로
${}_5\mathrm{C}_3\times2^2=40$

24. 정답 ⑤

두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
한편,
$\dfrac{\mathrm{P}(A)}{2}=\dfrac{\mathrm{P}(B)}{3}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)}{4}=k\left(0<k\leq\dfrac{1}{4}\right)$
이라 하면
$\mathrm{P}(A)=2k,\ \mathrm{P}(B)=3k,\ \mathrm{P}(A\cup B)=4k$
$\mathrm{P}(A\cup B)=4k$에서
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=5k-6k^2=4k$
$6k^2-k=0$
$k(6k-1)=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{6}\ (\because\ 0<k\leq\dfrac{1}{4})$
따라서 구하는 값은
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=5k=\dfrac{5}{6}$

25. 정답 ④

$a+b+c=9$를 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6=28$ $\cdots$ ㉠
조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 a, b, c가 모두 홀수인 경우와 같다.
이 경우 a, b, c가 각각
7, 1, 1 또는 5, 3, 1 또는 3, 3, 3
이면 되므로 이 경우 순서쌍의 개수는
$\dfrac{3!}{2!}+3!+1=10$ $\cdots$ ㉡
㉠-㉡에서 구하는 순서쌍의 개수는
$28-10=18$

26. 정답 ②

전체 확률의 합은 1이므로

$2a+b=1$

$\therefore\ b=1-2a$ $\cdots$ ㉠

또한

$\mathrm{E}(X)=a+2b+3a$

$=4a+2b$

$=4a+2-4a$ ($\because$ ㉠)

$=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=a+4b+9a$

$=10a+4b$

$=10a+4-8a$ ($\because$ ㉠)

$=2a+4$

이므로 $\mathrm{V}(X)=3b$에서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2a+4-4$

$=2a=3b$

㉠에 $2a=3b$를 대입하면

$b=\frac{1}{4},\ a=\frac{3}{8}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

27. 정답 ①

$x\times y$가 6의 배수인 경우는

6, 12, 18, 24, 30, 36

(ⅰ) $x\times y=6$인 경우

주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키는

x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 6)$, $(6, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$

이므로 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(ⅱ) $x\times y=12$인 경우

주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키는

x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(2, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

이므로 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(ⅲ) $x\times y=18$인 경우

주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키는

x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 6)$, $(6, 3)$

이므로 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ⅳ) $x\times y=24$, 30, 36인 경우

세 경우 모두 $x+y>9$이므로 주어진 조건

$x+y\le 9$를 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$

28. 정답 ②

조건 (가)에 의하여

$f(2)=f(4)$, $f(1)=f(5)$ $\cdots$ ㉠

이고, 세 점 $(m, f(m))$, $(6, f(6))$, $(7, f(7))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 S라 하자.

(ⅰ) $f(6)=f(7)$일 때

두 점 $(6, f(6))$, $(7, f(7))$을 이은 선분이 x축과 평행하므로 5 이하의 모든 자연수 m에 대하여

$f(m)\ne f(6)$

즉, 삼각형 S는 밑변의 길이가 1인 삼각형이므로 높이는 5 이하이어야 한다.

$|f(m)-f(6)|\le 5$

$|f(m)-f(6)|$의 최댓값은 $|5-1|=4$이므로 항상 주어진 조건을 만족시킨다.

$f(6)$, $f(7)$의 값을 결정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1=5$

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=64$

$f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 ㉠에 의하여 1

따라서 경우의 수는 $5\times 64=320$

(ⅱ) $f(6)\ne f(7)$일 때

두 점 $(6, f(6))$, $(7, f(7))$을 이은 선분이 x축과 평행하지 않으므로 5 이하의 모든 자연수 m에 대하여

$f(m)=f(6)$ 또는 $f(m)=f(7)$

① $|f(6)-f(7)|=1$일 때

삼각형 S는 높이가 1인 삼각형이므로 밑변의 길이는 5 이하이어야 한다.

이때 $f(1)=f(7)$이면 밑변의 길이가 6이므로 $f(1)=f(6)$이다.

$f(6)$, $f(7)$의 값을 결정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times 2!=8$

$f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 1

$f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=4$

$f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 ㉠에 의하여 1

따라서 경우의 수는 $8\times 4=32$

② $|f(6)-f(7)|\ge 2$일 때

$f(1)=f(6)$ 또는 $f(1)=f(7)$이어야 하므로 삼각형 S의 밑변의 길이는 5 또는 6이다.

즉, 삼각형 S의 넓이가 항상 $\frac{5}{2}$보다 크다.

①, ②에 의하여 경우의 수는 32

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$320+32=352$

29. 정답 95

$\mathrm{P}(-2\le X\le 2)=1$이므로

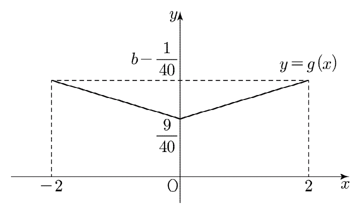
$\mathrm{P}(-2\le X\le 2)=\frac{a+b}{2}\times 4=1$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표는

$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{4}$ ($\because$ ㉠)

이고, 확률밀도함수 $g(x)=f(|x|)-\frac{1}{40}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\mathrm{P}(-2\le Y\le 2)=1$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$2\mathrm{P}(0\le Y\le 2)=2\times\frac{\frac{9}{40}+b-\frac{1}{40}}{2}\times 2$

$=2b+\frac{2}{5}=1$

$\therefore\ b=\frac{3}{10},\ a=\frac{1}{5}$ ($\because$ ㉠)

한편, $0\le x\le 2$에서

$g(x)=\frac{1}{40}x+\frac{9}{40}$

이고 $g(1)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(|Y|\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Y\le 1)$

$=2\times\frac{\frac{9}{40}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{19}{40}$

따라서 구하는 값은

$\frac{12}{ab}\times\mathrm{P}(|Y|\le 1)=12\times\frac{50}{3}\times\frac{19}{40}$

$=95$

30. 정답 50

2개의 동전을 동시에 던져

앞면이 나온 개수가 2인 사건을 X,

앞면이 나온 개수가 0인 사건을 Y,

앞면이 나온 개수가 1인 사건을 Z라 하자.

사건 X가 일어날 확률은 ${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$

사건 Y가 일어날 확률은 ${}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

사건 Z가 일어날 확률은 ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

또한 $a_5=b_5$이고 $a_5\times b_5\ne 0$인 사건을 E,

$1\le k\le 4$인 모든 자연수 k에 대하여 $a_k\ge b_k$인 사건을 F라 하자.

(ⅰ) $\mathrm{P}(E)$

사건 E가 일어나려면 5번의 시행에서 사건

X, Y, Z

가 일어나는 횟수가 각각

1, 1, 3 또는 2, 2, 1

이어야 한다.

① 1, 1, 3인 경우

사건 E가 일어날 확률은

$\frac{5!}{3!}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{32}$

② 2, 2, 1인 경우

사건 E가 일어날 확률은

$\frac{5!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{15}{256}$

①, ②에 의하여 사건 E가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(E)=\frac{5}{32}+\frac{15}{256}=\frac{55}{256}$

(ⅱ) $\mathrm{P}(E\cap F)$

사건 $E\cap F$가 일어나려면

(ⅰ)-①에서 두 사건 X, Y가 일어나는 순서가

X, Y

이어야 하므로 확률은

$\frac{5!}{2!3!}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{64}$

또한 (ⅰ)-②에서 두 사건 X, Y가 일어나는 순서가

X, X, Y, Y 또는 X, Y, X, Y

이어야 하므로 확률은

$2\times\frac{5!}{4!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{256}$

따라서 사건 $E\cap F$가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{5}{64}+\frac{5}{256}=\frac{25}{256}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{25}{256}}{\frac{55}{256}}=\frac{5}{11}$

따라서 $p=\frac{5}{11}$이므로 $110\times p=50$

[미적분]

23	③	**24**	④	**25**	①	**26**	⑤	**27**	②
28	③	**29**	11	**30**	16				

[해설]

23. 정답 ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi-3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\times\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}$$
$$=\frac{3\times 1}{1}=3$$

24. 정답 ④

$$\int_1^e\left(x-\frac{1}{4}\right)\ln x\,dx$$
$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{4}\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{e}{4}\right)=\frac{e^2}{4}$$

25. 정답 ①

주어진 입체도형을 $0\le t\le \ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 점 $(t, 0)$ 을 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\frac{e^t}{e^{2t}+1}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t)=\left(\frac{e^t}{e^{2t}+1}\right)^2=\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$$

$e^{2t}+1=x$ 라 하면 $t=0$ 일 때 $x=2$, $t=\ln 2$ 일 때 $x=5$ 이고 $\frac{dx}{dt}=2e^{2t}$ 이므로

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt=\int_2^5\frac{1}{2x^2}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2x}\right]_2^5$$
$$=-\frac{1}{10}+\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$$

26. 정답 ⑤

점 P_n 이 점 P_1 에서 출발하여 시계 반대 방향으로 움직인 거리를 S_n 이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{a\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}a\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}a\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}a$$

한편, 정삼각형 ABC 위의 점 X에 대하여
선분 AB 위의 점 중 $\overline{\mathrm{AX}}=\sqrt{3}$ 인 점을 X_1,
선분 BC 위의 점 중 $\overline{\mathrm{AX}}=\sqrt{3}$ 인 점을 X_2,
선분 AC 위의 점 중 $\overline{\mathrm{AX}}=\sqrt{3}$ 인 점을 X_3 이라 하면 점 X_2 는 선분 BC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{BX}_2}=1$ 이다.
$\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{AP}_n}=\sqrt{3}$ 에서 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$\frac{1}{2}a-6k=\overline{\mathrm{AX}_1}=\sqrt{3}$$

또는

$$\frac{1}{2}a-6k=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BX}_2}=2+1=3$$

또는

$$\frac{1}{2}a-6k=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CX}_3}$$
$$=2+2+(2-\sqrt{3})=6-\sqrt{3}$$

이어야 한다.

이때 $0<a<12$ 에서 $0<\frac{1}{2}a<6$ 이므로 조건을 만족시키는 $\frac{1}{2}a$ 의 값은

$\sqrt{3}$, 3, $6-\sqrt{3}$

이므로 가능한 모든 a 의 값은

$2\sqrt{3}$, 6, $12-2\sqrt{3}$

이므로 그 합은 18

27. 정답 ②

$$f(x)=\begin{cases} a-\ln\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right) & (x\le b)\\ \frac{2x}{16x^4+3} & (x>b)\end{cases}$$

에서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=b$ 에서도 연속이다.

$$a-\ln\left(b^2+b+\frac{5}{4}\right)=\frac{2b}{16b^4+3}\quad\cdots\ ㉠$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 에서 증가해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}} & (x<b)\\ \frac{-6(16x^4-1)}{(16x^4+3)^2} & (x>b)\end{cases}$$ 에서

$$-\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}}\ge 0$$
$$\therefore\ x\le-\frac{1}{2}\ \left(\because\ x^2+x+\frac{5}{4}>0\right)$$

이고

$$\frac{-6(16x^4-1)}{(16x^4+3)^2}\ge 0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\le 0$$
$$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$$

즉, 함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 에서 증가하려면

$$b=-\frac{1}{2}$$

이고 ㉠에 $b=-\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$a-\ln\left(b^2+b+\frac{5}{4}\right)=\frac{2b}{16b^4+3}$$
$$a-\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{-1}{1+3}\qquad\therefore\ a=-\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 값은

$$a+b=-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

28. 정답 ③

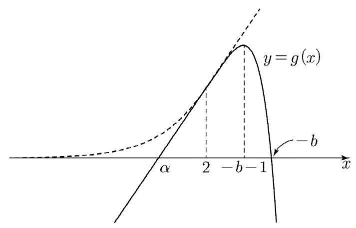
함수 $f(x)=a(x+b)e^x$ 에서

$$f'(x)=a(x+b+1)e^x$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-b-1$ 에서 최댓값이자 극댓값을 갖는다.
$x<2$ 일 때 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서 그은 접선이고,
$x\ge 2$ 일 때 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 이므로 b 의 값의 범위에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $b<-3$ 일 때

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표 중 $-b$ 가 아닌 값을 α 라 하면 부등식 $g(x)\ge 0$ 을 만족시키는 x 의 범위는

$$\alpha\le x\le -b$$

이고, 부등식 $g(g(x))\ge 0$ 을 만족시키는 x 의 범위는 부등식

$$\alpha\le g(x)\le -b$$

를 만족시키는 x 의 범위와 같으므로

$$\therefore\ \alpha=0,\ f(-b-1)\le -b\quad\cdots\ ㉠$$

한편, 점 $(\alpha, 0)$ 은 직선 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ 위의 점이므로

$$0=a(3+b)e^2(\alpha-2)+a(2+b)e^2$$
$$0=(3+b)\times(-2)+(2+b)\ (\because\ a<0)$$
$$\therefore\ b=-4$$

이때 ㉠에 의하여 $f(3)\le 4$ 이므로

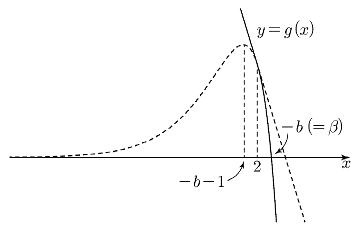
$$a(3+b)e^3\le 4$$
$$-ae^3\le 4\qquad\therefore\ -\frac{4}{e^3}\le a<0$$

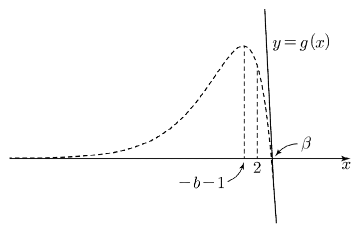
따라서 $f(-1)=a(-1+b)e^{-1}=a\times\left(-\frac{5}{e}\right)$ 이므로

$$0<a\times\left(-\frac{5}{e}\right)\le-\frac{4}{e^3}\times\left(-\frac{5}{e}\right)$$
$$\therefore\ 0<f(-1)\le\frac{20}{e^4}$$

(ii) $b\ge-3$ 일 때

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.





이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 β 라 하면 부등식 $g(x)\ge 0$ 을 만족시키는 x 의 범위는

$$x\le\beta$$

이고, 부등식 $g(g(x)) \ge 0$을 만족시키는 x의 범위는 부등식

$$g(x) \le \beta \quad \cdots ㉡$$

를 만족시키는 x의 범위와 같으므로
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$가 만나는 점의 x좌표를 γ라 하면 ㉡을 만족시키는 x의 범위는

$$x \ge \gamma$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(-1)$의 값의 최댓값은 $\dfrac{20}{e^4}$

29. 정답 11

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$가 수렴하므로 $-1<r<1$이다.

$b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$에서

$$b_n = \frac{a_1 r^n}{1-r} + \frac{a_1 r(1-r^{2n})}{1-r^2} \quad \cdots ㉠$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - 1)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-1)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

위 식에 ㉠을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_1 r^n}{1-r} + \frac{a_1 r(1-r^{2n})}{1-r^2}\right\}$$
$$= 0 + \frac{a_1 r}{1-r^2} = 1$$
$$\therefore \frac{a_1 r}{1-r^2} = 1 \quad \cdots ㉡$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$b_n = \frac{a_1 r^n}{1-r} + 1 - r^{2n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1) = \dfrac{15}{8}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_1 r^n}{1-r} + 1 - r^{2n} - 1\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(1+r)r^{n-1} - r^{2n}\right\} \ (\because ㉡)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1+r)r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$$
$$= \frac{1+r}{1-r} - \frac{r^2}{1-r^2} = \frac{15}{8}$$

$8(1+r)^2 - 8r^2 = 15(1-r^2)$
$15r^2 + 16r - 7 = 0$
$(3r-1)(5r+7) = 0$
$\therefore r = \dfrac{1}{3} \ (\because -1<r<1)$

㉡에 $r=\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$$\frac{a_1 \times \frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = 1 \qquad \therefore a_1 = \frac{8}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=11$

30. 정답 16

조건 (가)에 의하여 $1 \le x \le 9$에서
$f'(x) = -\sin\pi\sqrt{x}$ 또는 $f'(x) = \sin\pi\sqrt{x}$,
$g'(x) = -\sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$ 또는 $g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$
두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이때 조건 (나)에 의하여
$1<x<9$에서 $f(x)>g(x)$이고,
$x=1$, $x=9$일 때 $f(x) \le g(x)$이므로

$$f(1)=g(1),\ f(9)=g(9) \quad \cdots ㉠$$

한편, 방정식 $-\sin\pi\sqrt{x} = \sin\pi\sqrt{x}$에서
$x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=9$
$\int_1^4 \sin\pi\sqrt{x}\,dx$에서 $\sqrt{x}=t$라 하면
$x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=2$이고
$x=t^2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2t$이므로

$$\int_1^4 \sin\pi\sqrt{x}\,dx = \int_1^2 2t\sin\pi t\,dt$$
$$= \left[-\frac{2}{\pi}t\cos\pi t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{\pi}\cos\pi t\,dt$$
$$= -\frac{6}{\pi} + \left[\frac{2}{\pi^2}\sin\pi t\right]_1^2 = -\frac{6}{\pi}$$

즉, $1 \le x \le 4$에서
$f'(x) = -\sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 f'(x)\,dx = \dfrac{6}{\pi}$,
$f'(x) = \sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 f'(x)\,dx = -\dfrac{6}{\pi}$
마찬가지로 $1 \le x \le 4$에서
$g'(x) = -\sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 g'(x)\,dx = \dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$,
$g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 g'(x)\,dx = -\dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$
이때 ㉠에서 $f(1)=g(1)$이고
조건 (나)에 의하여 $f(4)>g(4)$이므로

$$f(4)-f(1) > g(4)-g(1)$$
$$\int_1^4 f'(x)\,dx > \int_1^4 g'(x)\,dx$$

$k>1$이므로

$$-\frac{6\sqrt{k}}{\pi} < -\frac{6}{\pi} < \frac{6}{\pi} < \frac{6\sqrt{k}}{\pi}$$

즉, $\int_1^4 g'(x)\,dx = -\dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$이어야 하므로

$$g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x} \ (1 \le x \le 4)$$

같은 방법으로

$$\int_4^9 \sin\pi\sqrt{x}\,dx = \frac{10}{\pi}$$

이므로

$$\int_4^9 f'(x)\,dx = -\frac{10}{\pi} \text{ 또는 } \int_4^9 f'(x)\,dx = \frac{10}{\pi}$$

조건 (나)와 ㉠에서 $f(4)>g(4)$, $f(9)=g(9)$이므로

$$f(9)-f(4) < g(9)-g(4)$$
$$\int_4^9 f'(x)\,dx < \int_4^9 g'(x)\,dx$$

즉, $\int_4^9 g'(x)\,dx = \dfrac{10\sqrt{k}}{\pi}$이어야 하므로

$$g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x} \ (4 \le x \le 9)$$

㉠에서 $f(9)-f(1) = g(9)-g(1)$이므로

$$\int_1^9 f'(x)\,dx = \int_1^9 g'(x)\,dx$$
$$= -\frac{6\sqrt{k}}{\pi} + \frac{10\sqrt{k}}{\pi} = \frac{4\sqrt{k}}{\pi}$$

$\int_1^9 f'(x)\,dx = \dfrac{4\sqrt{k}}{\pi} > 0$이므로

$$\int_1^9 f'(x)\,dx = -\frac{6}{\pi} + \frac{10}{\pi} = \frac{4}{\pi} \text{ 또는}$$
$$\int_1^9 f'(x)\,dx = \frac{6}{\pi} + \frac{10}{\pi} = \frac{16}{\pi}$$

이때 $k>1$이므로

$$\frac{4\sqrt{k}}{\pi} = \frac{16}{\pi} \qquad \therefore k=16$$

[기하]

23	④	**24**	②	**25**	⑤	**26**	③	**27**	①
28	③	**29**	10	**30**	48				

[해설]

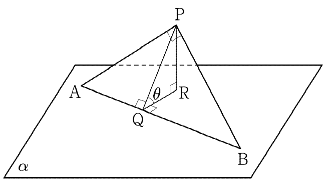
23. 정답 ④

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로
$\vec{a} = t\vec{b}$ (t는 실수)
$(2, k) = t(4, 6)$
$2 = 4t$, $k = 6t$
$\therefore t = \dfrac{1}{2}$, $k=3$
따라서 구하는 값은
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2, 3)\cdot(4, 6) = 26$

24. 정답 ②

세 양수 a, b, c에 대하여
쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이라 하고,
두 초점의 좌표를 $(-c, 0)$, $(c, 0)$이라 하면
주축의 길이가 6이므로
$2a = 6 \qquad \therefore a=3$
점근선의 방정식이 $y = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$이므로
$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore b = 2\sqrt{2}$
$c^2 = a^2 + b^2$이므로
$c^2 = 9+8 = 17 \qquad \therefore c = \sqrt{17}$
따라서 두 초점 사이의 거리는
$2c = 2\sqrt{17}$

25. 정답 ⑤



점 P에서 선분 AB와 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{QR}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\theta = \angle\mathrm{PQR}$
$\overline{\mathrm{AB}} = 5$, $\overline{\mathrm{AP}} = 3$이고 $\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$이므로
$\overline{\mathrm{BP}} = 4$
두 삼각형 APB, AQP는 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PQ}}$
$5 : 4 = 3 : \overline{\mathrm{PQ}}$
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{12}{5}$이고 $\overline{\mathrm{PR}} = 2$이므로
$\sin\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \dfrac{5}{6}$

26. 정답 ③

타원 C_1의 초점의 좌표는 각각
$\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-3, 0)$
이고 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0, 3\sqrt{3})$이다.
즉, $\angle\mathrm{F'AO} = \dfrac{\pi}{6}$이므로

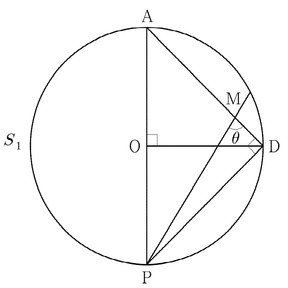
$$\angle F'AB = \angle F'AO + \angle OAB$$
$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi \qquad \cdots ㉠$$
한편, $\overline{BC}=k$라 하면
점 C는 타원 C_2 위의 점이므로
타원의 정의에 의하여
$$\overline{AC}+\overline{BC}=12$$
이므로
$$\overline{AC}=12-k$$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$$k^2=(12-k)^2+6^2+(12-k)\times 6 \ (\because ㉠)$$
$$30k=252 \qquad \therefore\ k=\frac{42}{5}$$
따라서 선분 BC의 길이는 $\frac{42}{5}$

27. 정답 ①

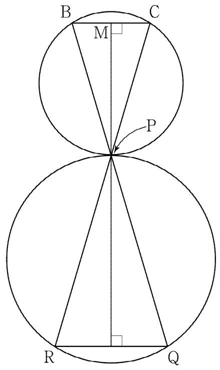
선분 DE의 중점을 M이라 할 때
$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD})$$
$$=(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MD})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD})$$
$$=|\overrightarrow{BM}|^2-|\overrightarrow{MD}|^2$$
$$=|\overrightarrow{BM}|^2-1=10$$
$$\therefore\ |\overrightarrow{BM}|=\sqrt{11}$$
$\angle ACE=\theta$라 할 때
$$\angle BCM=\angle BCA+\angle ECM+\theta$$
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}+\theta$$
이므로
삼각형 BCM에서 코사인법칙에 의하여
$$11=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times2\times\sqrt{3}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
따라서 구하는 값은
$$\sin(\angle ACE)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

28. 정답 ③

선분 BC의 중점을 M이라 하고 직선 AM이 구 S_1과 만나는 점을 D라 하면
선분 AD는 원 C의 지름이고 평면 ABC가 평면 α와 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로
$\overline{AD}=4$이고
$\overline{AM}=3,\ \overline{MD}=1$ (∵ [참고])

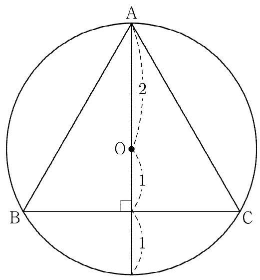


이때 평면 PQR과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\angle PMD=\theta$이고
$$\overline{PM}^2=\sqrt{\overline{PD}^2+\overline{MD}^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$
이므로
$$\cos\theta=\frac{\overline{MD}}{\overline{PM}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$$
한편, 평면 PBC와 구 S_1과 만나서 생기는 원과 평면 PQR과 구 S_2가 만나서 생기는 원은 점 P에서 외접하고 있으므로 삼각형 PBC와 삼각형 PQR은 서로 닮음이다.



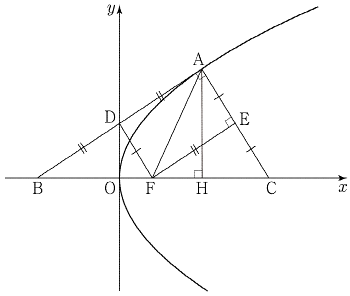
삼각형 ABC는 정삼각형이고 $\overline{AM}=3$이므로
$$\overline{BC}=2\sqrt{3}$$
삼각형 PBC의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PM}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{17}=\sqrt{51}$$
두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이의 비는
$$1:\sqrt{3}$$
이고 두 삼각형 PBC, PQR은 한 평면 위에 있다.
두 삼각형 PBC, PQR의 닮음비는 $1:\sqrt{3}$이므로
넓이의 비는 $1:3$이다.
따라서 삼각형 PQR의 넓이는
$$\sqrt{51}\times3=3\sqrt{51}$$
이므로 삼각형 PQR의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는
$$3\sqrt{51}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=3\sqrt{3}$$

[참고]

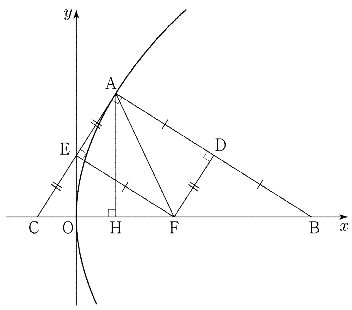


29. 정답 10

(ⅰ) 점 C의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 클 때



점 F는 삼각형 ABC의 외심이고
외심이 선분 BC 위에 있으므로
삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
점 F에서 두 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면
$$\overline{FD}=\overline{AE}=\overline{EC}=\sqrt{14},$$
$$\overline{FE}=\overline{AD}=\overline{DB}=\sqrt{35}$$
이므로
$$\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{35})^2+(2\sqrt{14})^2}=14,$$
$$\overline{AF}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=7$$
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$$
이므로
$$\overline{AH}=\frac{2\sqrt{35}\times2\sqrt{14}}{14}=2\sqrt{10}\text{이고}$$
점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H'이라 할 때, $\overline{AF}=\overline{AH'}$이므로 $\overline{FH}$는
$$\overline{AH'}=7=2p+\overline{FH}$$
$$\overline{FH}=\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}=3=7-2p$$
$$\therefore\ p=2$$
(ⅱ) 점 B의 x좌표가 점 C의 x좌표보다 클 때



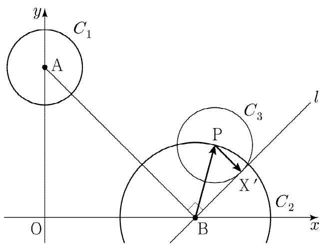
(ⅰ)과 같은 방법으로
$$\overline{FD}=\overline{AE}=\overline{EC}=\sqrt{14},$$
$$\overline{FE}=\overline{AD}=\overline{DB}=\sqrt{35}$$
이므로
$$\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{35})^2+(2\sqrt{14})^2}=14,$$
$$\overline{AF}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=7$$
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$$
이므로
$$\overline{AH}=\frac{2\sqrt{35}\times2\sqrt{14}}{14}=2\sqrt{10},$$
점 A에서 포물선의 준선의 내린 수선의 발을 H'이라 할 때, $\overline{AF}=\overline{AH'}$이므로 $\overline{FH}$는
$$\overline{AH'}=7=2p-\overline{FH}$$
$$\overline{FH}=\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}=3=2p-7$$
$$\therefore\ p=5$$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 p의 값의 곱은
$$2\times5=10$$

30. 정답 48

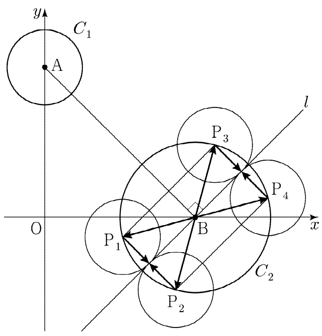
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA}$에서
$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BX})=0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX})=0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AX})=0$$
즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AX}$는 서로 수직이다.
점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 l이라 하고 중심이 원 C_2 위에 있도록 원 C_1을 평행이동한 원을 C_3이라 하자.

조건을 만족시키는 점 X의 개수가 1이 되려면
원 C_3은 직선 l에 접해야 한다.
이때 접점을 X′이라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{PX'}}$$



직선 l에 접하고 중심이 C_2 위에 있는 원의 개수는 4이므로 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 다음 그림과 같다.



사각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3$는 직사각형이고

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=2\times 1=2,$$

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3}=2\times\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$$

이므로 사각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3$의 넓이는

$$S=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

따라서 구하는 값은

$$S^2=(4\sqrt{3})^2=48$$