제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. 두 다항식 $A=x^2+3xy+2y^2$, $B=2x^2-3xy-y^2$에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① x^2+3y^2 ② $3x^2-2y^2$ ③ $3x^2+y^2$
④ $x^2-2xy+3y^2$ ⑤ $3x^2-2xy+y^2$

2. 복소수 $z=1-2i$에 대하여 $z+\overline{z}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등식

$$x^2+ax+b=x(x+3)+4$$

가 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a\times b$의 값은? [2점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

x^2+3x+4

$a=3$

$b=4$

4. 좌표평면 위의 두 점 A$(1, 3)$, B$(2, a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$1^2+(a-3)^2=17$

$a-3=4, -4$

$a=7, -1$

5. 직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=k(x-1)-1$

$(3,1) \rightarrow 1=2k-1 \quad k=1$

6. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ 3)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+4}{3}\right)=(2,3)$

$a=4$
$b=5$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2-x+k=0$이 서로 다른 두 근 α, β를 갖는다. $\alpha^3+\beta^3=10$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha\beta=k \end{cases}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=1-3k=10$

$k=-3$

8. x에 대한 이차부등식 $x^2+ax-12 \le 0$의 해가 $-4 \le x \le b$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

$(x+4)(x-b)$

$= x^2+(4-b)x-4b$

$= x^2+ax-12$

$b=3$

$a=1$

9. 좌표평면에서 점 A$(5,\ 5)$와 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최솟값은? [3점]

① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$d-r = 5\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

10. 점 $(1,\ a)$를 지나고 직선 $2x+3y+1=0$에 수직인 직선의 y절편이 $\frac{5}{2}$일 때, 상수 a의 값은? [3점] 기울기 $-\frac{2}{3}$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

수직 → 기울기 $\frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}(x-1)+a$

$(0, \frac{5}{2}) \rightarrow \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}+a, \quad a=4$

11. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-x-12 \le 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

$(x+3)(x-4) \le 0$　　$-3 \le x \le 4$

$(x-1)(x-2) > 0$　　$x<1,\ x>2$

-3　1　2　4

$-3\ -2\ -1\ 0\quad 3\ 4$

$\Rightarrow 1$

12. 다항식 $(x^2+x)(x^2+x+2)-8$이 $(x-1)(x+a)(x^2+x+b)$로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

$x^2+x = A$

A^2+2A-8

$=(A-2)(A+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+4)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+4)$

$a=2$
$b=4$

13. 점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 k인 직선 l이 있다. 원점과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$y=k(x-1)+3$

$kx-y-k+3=0$ $(0,0)$

$\frac{|-k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$

$k^2-6k+9=5k^2+5$

$4k^2+6k-4=0$

$2k^2+3k-2=0$

$(2k-1)(k+2)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ $(\because k>0)$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2-4k+b=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$D/4=k^2-2ak+a^2-k^2+4k-b=0$

$(4-2a)k+a^2-b=0$

$\Downarrow$ 0 $\quad\Downarrow$ 0

$a=2$

$b=4$

15. x에 대한 삼차방정식 $x^3+5x^2+(a-6)x-a=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(x-1)\underbrace{(x^2+6x+a)}_{f(x)}=0$

① $D/4=9-a=0$, $a=9$ → $1, 1, -3$

② $f(x)=0$ 의 한 근이 1

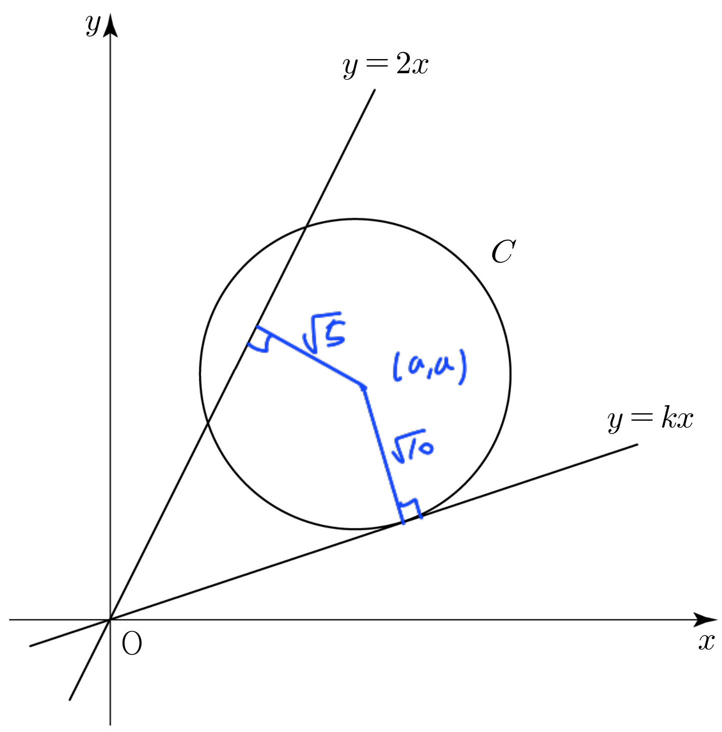
$x=1$ → $1+6+a=0$ $a=-7$

$(x+7)(x-1)$

$-7, 1$ ok

$\therefore a=9, -7$

16. 그림과 같이 좌표평면 위에 원 $C: (x-a)^2+(y-a)^2=10$이 있다. 원 C의 중심과 직선 $y=2x$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이고 직선 $y=kx$가 원 C에 접할 때, 상수 k의 값은? (단, $a>0$, $0<k<1$) [4점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{18}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

$(a,a) \sim 2x-y=0$ $\frac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $a=5$ $0<k<1$

$(a,a) \sim kx-y=0$ $\frac{|ak-a|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{5(1-k)}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{10}$

$25(k-1)^2=10(k^2+1)$

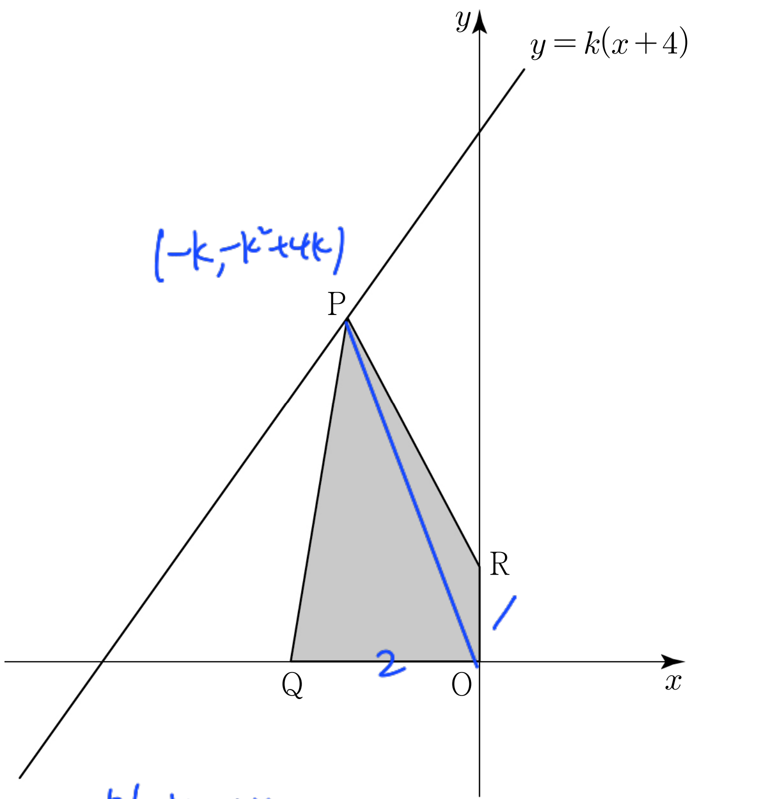
$5k^2-10k+5=2k^2+2$

$3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0$, $k=\frac{1}{3}$ ($\because 0<k<1$)

17. $1 \le k \le 3$ 인 실수 k 에 대하여 직선 $y = k(x+4)$ 위에 x 좌표가 $-k$ 인 점 P 가 있다. 두 점 Q$(-2,\ 0)$, R$(0,\ 1)$ 에 대하여 사각형 PQOR 의 넓이의 최댓값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$　② $\frac{75}{16}$　③ $\frac{39}{8}$　④ $\frac{81}{16}$　⑤ $\frac{21}{4}$

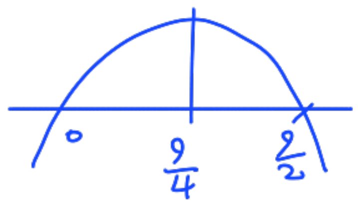


$P(-k, -k^2+4k)$

$\square PQOR = \triangle OPQ + \triangle OPR$

$= (-k^2+4k) + \left(\frac{k}{2}\right) = -k^2 + \frac{9}{2}k = S(k)$

$-k\left(k - \frac{9}{2}\right)$



$1 \le k \le 3$, 최대 → $S\left(\frac{9}{4}\right) = \left(-\frac{9}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{81}{16}$

18. 다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$ 를 x^3-1 로 나눈 몫과 나머지는 서로 같다.
> (나) $f(x)-x$ 는 x^2+x+1 로 나누어떨어진다.

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 72 일 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

① 4　② 7　③ 10　④ 13　⑤ 16

(나) $f(x) = (x^2+x+1)Q(x) + x$

(가) $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)(ax^2+bx+c) + (ax^2+bx+c)$

$a(x^2+x+1) + x$
$= ax^2 + (a+1)x + a$
$b = a+1,\ c = a$

$f(2) = 7(4a+2b+c) + (4a+2b+c)$
$= 8(4a+2a+2+a) = 72$
$7a+1 = 9$, $a=1$, $b=2$, $c=1$

$f(1) = a+b+c = 4$

19. 최고차항의 계수의 절댓값이 같은 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 직선 AB의 기울기는 -1이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)+g(-1)$의 값은? [4점]

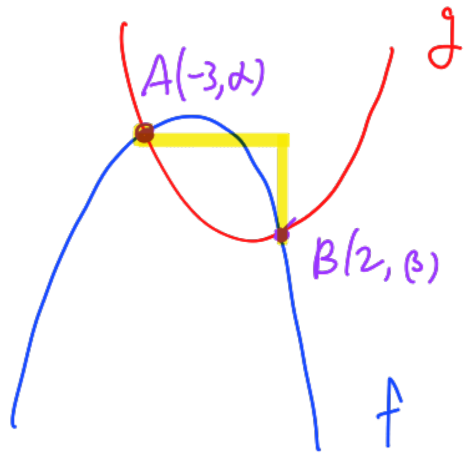
(가) $f(x)-g(x)=-4(x+3)(x-2)$ (나) $f(-3)+g(2)=5$

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f-g=-4(x+3)(x-2)$

$f=-2x^2\sim$

$g=2x^2\sim$



$\alpha-\beta=5$

$f(-3)+g(2)=\alpha+\beta=5$] $\alpha=5$, $\beta=0$) A(-3,5) B(2,0)

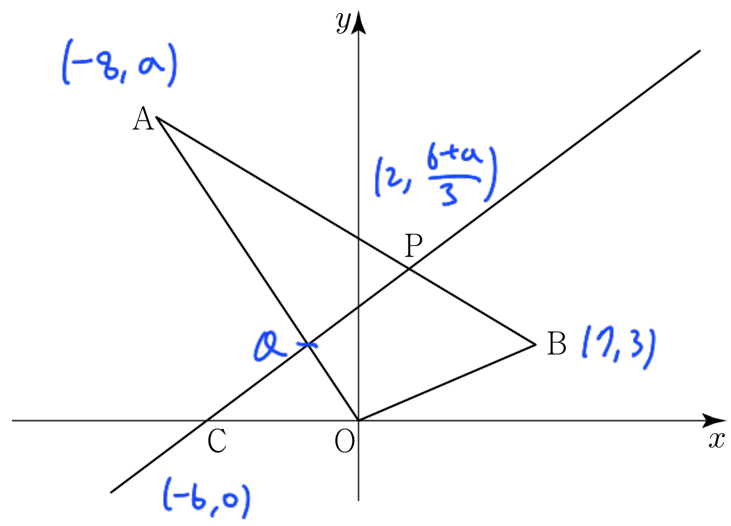
AB: $y=-x+2$

$f(x)=-2(x+3)(x-2)-x+2$

$g(x)=2(x+3)(x-2)-x+2$

$f(x)+g(x)=-2x+4$, $f(-1)+g(-1)=6$

20. 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 A$(-8, a)$, B$(7, 3)$, C$(-6, 0)$이 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 직선 PC가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분한다. 양수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$\overline{AQ}=k\times\overline{AO}$, $\frac{2}{3}\times k=\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{4}$

$\therefore$ AQ : QO $=3:1$

Q$\left(-2, \frac{a}{4}\right)$

CQ 기울기 = CP 기울기 $\frac{\frac{a}{4}}{4}=\frac{\frac{6+a}{3}}{8}$

$\frac{a}{2}=\frac{6+a}{3}$, $3a=12+2a$

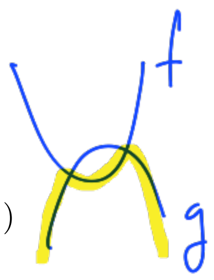
$a=12$

21. 세 양수 a, b, c에 대하여 두 이차함수

$$f(x)=(x-a)^2+b,\ g(x)=-\frac{1}{2}(x-c)^2+11$$

이 있다. x에 대한 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$를 갖는다.
함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (\alpha \le x \le \beta) \\ g(x) & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta) \end{cases}$$

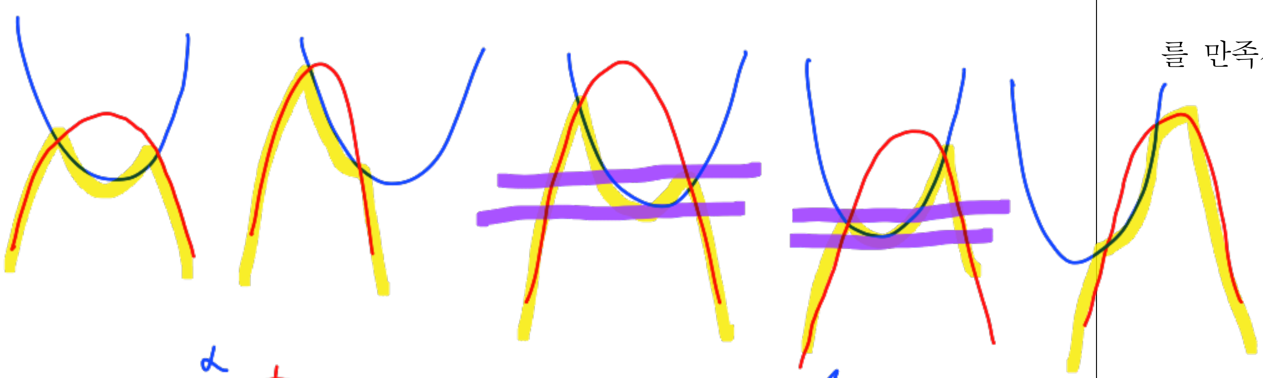


일 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

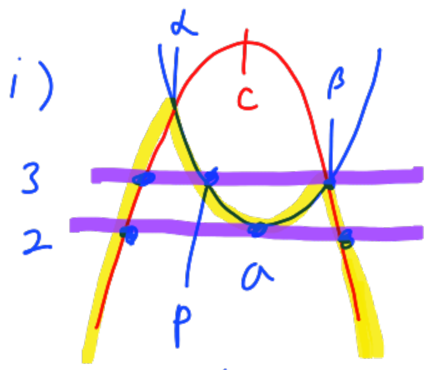
함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서만 만나도록 하는 실수 k의 값은 2와 3이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표의 합을 S라 하고, 직선 $y=3$과 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표의 합을 T라 하자.
$T-S=\dfrac{a}{2}$일 때, $h(\alpha+\beta)$의 값은? [4점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



i)



$p < a$

$T = p + 2c$

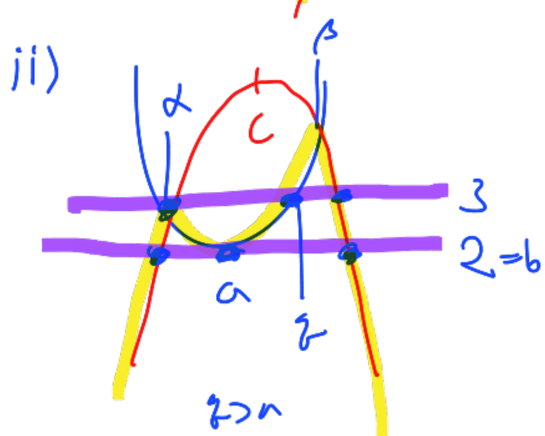
$-\ S = a + 2c$

$\frac{a}{2} = p - a$

$p = \frac{3}{2}a$

(×) (∵ $p < a$)

ii)



$q > a$

$T = 2c + q$

$-\ S = 2c + a$

$\frac{a}{2} = q - a$, $q = \frac{3}{2}a$ (○)

$(\frac{3}{2}a, 3)$ $y=(x-a)^2+2$

$3 = \frac{a^2}{4} + 2$, $a = 2$

단 답 형

22. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-9x+a를 $x-1$로 나눈 나머지가 7일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{13}$

$1+2-9+a=7$

$a=13$

23. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x \le x+11 \\ x+5 < 4x-2 \end{cases}$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수를 구하시오. [3점]

$\boxed{9}$

$\begin{cases} x \le 11 \\ x > \frac{7}{3} \end{cases}$

$\frac{7}{3} < x \le 11$

$3 \le x \le 11$

9개

$f(x) = (x-a)^2+2$

$f(x) = (x-2)^2+2 = 3$

$x = 1, 3$ $\alpha = 1$ $(1, 3)$

$g(x) = -\frac{1}{2}(x-c)^2+11$ (1,3) 지남

$-\frac{1}{2}(1-c)^2+11 = 3$, $c=5$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2+11$

$f(x)-g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x \sim$ $\alpha+\beta = 6$ $\therefore \beta = 5$

$h(\alpha+\beta) = h(6) = g(6) = \frac{21}{2}$

24. 직선 $y=2x$ 를 y축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선이 이차함수 $y=x^2-4x+12$ 의 그래프에 접할 때, 상수 m 의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$y=2x+m$

$x^2-6x+12-m=0$

$12-m=9$

$m=3$

25. 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=0 \\ x^2-6x-12y+36=0 \end{cases}$$

$(x-2y)^2=0$

$x=2y$

의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$ 일 때, $\alpha\times\beta$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{18}$

$4y^2-12y-12y+36=0$

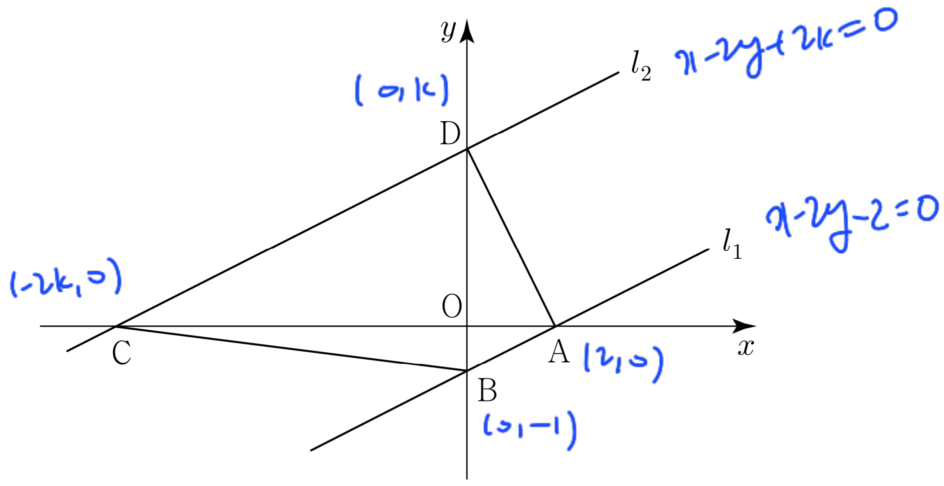
$y^2-6y+9=0$

$(y-3)^2=0$, $y=3$

$x=6$

26. 그림과 같이 좌표평면 위에 직선 $l_1 : x-2y-2=0$ 과 평행하고 y 절편이 양수인 직선 l_2 가 있다. 직선 l_1 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고 직선 l_2 가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ADCB 의 넓이가 25 이다. 두 직선 l_1 과 l_2 사이의 거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{20}$



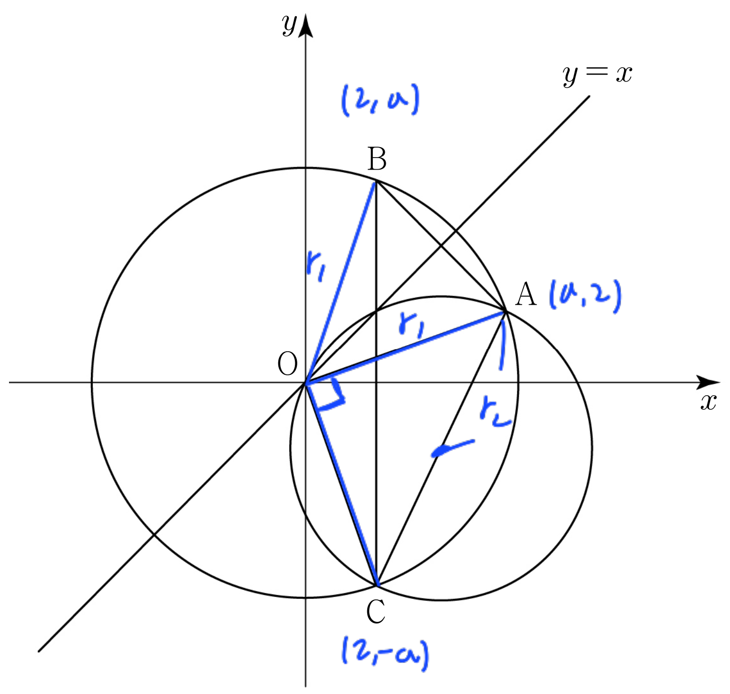
$\square ADCB = \frac{1}{2}(2+2k)(k+1)=25$ $(k>0)$

$(k+1)^2=25$, $k=4$

$d=\dfrac{|2k+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$, $d^2=\dfrac{100}{5}=20$

27. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 A$(a,\ 2)$ $(a>2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하자.
두 삼각형 ABC, AOC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 할 때, $r_1\times r_2=18\sqrt{2}$이다. 상수 a에 대하여 a^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{32}$



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ ∴ O: △ABC의 외심

$\frac{2}{a}\times\frac{-a}{2}=-1$ ∴ OA⊥OC

$\sqrt{2}r_1=2r_2$, $r_1\times r_2=18\sqrt{2}$

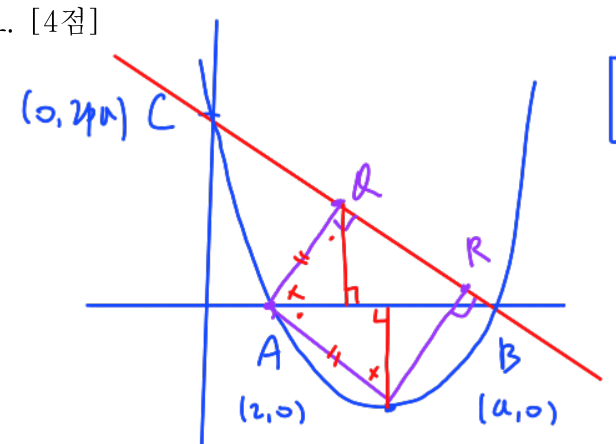
$r_1=\sqrt{2}r_2$ → $\sqrt{2}r_2^2=18\sqrt{2}$, $r_2=3\sqrt{2}$

$r_1=6$

$a^2+4=r_1^2=36$, $a^2=32$

28. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 A$(2,\ 0)$, B$(a,\ 0)$ $(a>2)$에서 만나고 y축과 점 C에서 만난다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 P, 두 점 A, P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하자. 사각형 APRQ가 정사각형일 때, $f(12)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{30}$



$P\left(\frac{a+2}{2}, -\frac{p}{4}(a-2)^2\right)$

$f(x)=p(x-2)(x-a)$

$=p\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{p}{4}(a-2)^2$

BC 기울기 $=-2p$ ∴ AP: $y=-2p(x-2)$ $\left(\frac{a+2}{2}, -\frac{p}{4}(a-2)^2\right)$

$-\frac{p}{4}(a-2)^2=-2p\left(\frac{a-2}{2}\right)=-p(a-2)$

$a-2=4$, $a=6$ $P(4, -4p)$

$Q(2+4p, 2)$

BC: $y=-2px+12p$

$2-12p=-4p-8p^2$

$4p^2-4p+1=0$ $(2p-1)^2=0$

$p=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}(x^2-8x+12)$, $f(12)=30$

29. 두 양수 p, q에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-p)^2+q$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{67}$

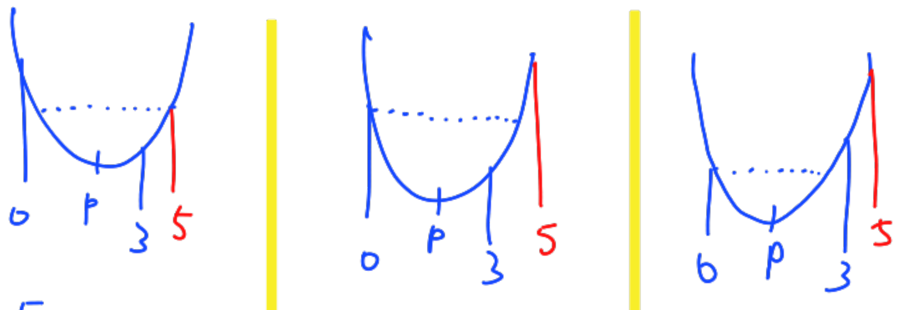
(가) $0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 m이고 최댓값은 $m+4$이다.
(나) $0 \le x \le 5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 m이고 최댓값은 $4m$이다.

회솟값 일정

(×)

$f(0)=p^2+q$ $\quad f(3)=(3-p)^2+q$

$f(p)=q$ $\quad f(5)=(5-p)^2+q$



$\frac{5}{2}<p\le 3$

$m=q$

$m+4=p^2+q$

$\therefore p^2=4$

$p=2,-2$

$(\times)$

$\frac{3}{2}<p\le\frac{5}{2}$

$m=q$

$m+4=p^2+q$

$\therefore p^2=4$

$p=2$

$(5-p)^2+q=4m$

$9+m=4m$

$m=3$

$(\circ)$

$f(x)=(x-2)^2+3$

$f(10)=64+3=67$

$0<p\le\frac{3}{2}$

$m=q$

$m+4=(3-p)^2+q$

$3-p=2,-2$

$p=1,5$

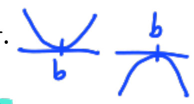
$p=1$

$(5-p)^2+q=4m$

$16+m=4m$

$m=\frac{16}{3}$ $(\times)$

30. 두 실수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2$이 있다. 중심이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있고 직선 $y=\frac{4}{3}x$와 x축에 동시에 접하는 서로 다른 원의 개수는 3이다. 이 세 원의 중심의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 세 실수 x_1, x_2, x_3이 다음 조건을 만족시킨다.



↳ 두 직선이 이루는 각을 이등분 하는 직선

$x_1<x_2<x_3$

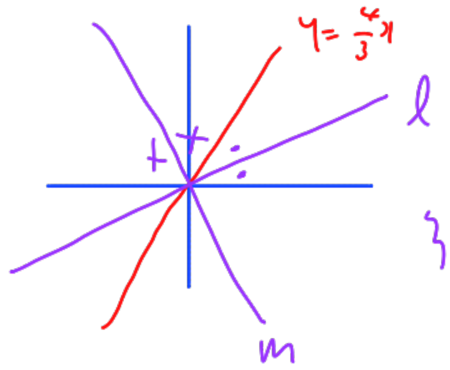
$-\ -\ +$

$+\ +\ +$

(가) $x_1\times x_2\times x_3>0$
(나) 세 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 y좌표는 $-\frac{7}{3}$이다.

$f(4)\times f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{144}$



$(x,y)\sim 4x-3y=0$

$\frac{|4x-3y|}{5}=|y|$, $|4x-3y|=5|y|$

$4x-8y=0$ $\quad y=\frac{1}{2}x$: l

$4x+2y=0$ $\quad y=-2x$: m

$y=f(x)$ & l

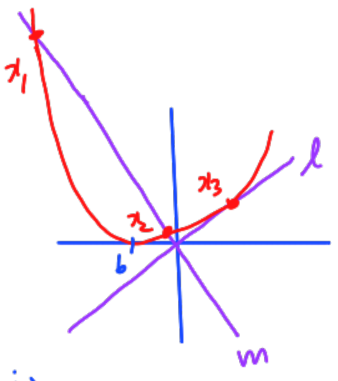
$y=f(x)$ & m

교점 x_1, x_2, x_3

⇒ 하나는 접해야함

$x_1<x_2<x_3$

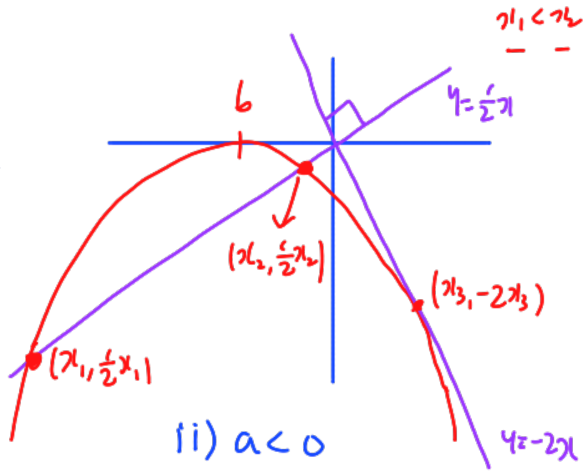
$-\ -\ +$



i) $a>0$

무게중심 음수 불가능

$(\times)$



ii) $a<0$

$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-2x_3=-7$, $x_1+x_2-4x_3=-14$

$a(x-b)^2=\frac{1}{2}x$ $\quad ax^2-(2ab+\frac{1}{2})x+ab^2=0$

$x_1+x_2=2b+\frac{1}{2a}$

$a(x-b)^2=-2x$ $\quad ax^2-2(ab-1)x+ab^2=0$

$D/4=a^2b^2-2ab+1-a^2b^2=0$, $ab=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a}=2b$

$x_3+x_3=\frac{2}{a}(ab-1)=-\frac{1}{a}$, $x_3=-\frac{1}{2a}$

$x_1+x_2-4x_3=2b+\frac{1}{2a}+\frac{2}{a}$

$=2b+b+4b=7b=-14$ $\quad b=-2, a=-\frac{1}{4}$

$f(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^2$

$f(4)\times f(6)=(-9)(-16)=144$

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.