수학1+수학2

양지용선생님의 필요충분 커리큘럼에서의 유사성과 손풀이, 주요 코멘트, 필요개념, 다양한 풀이법 등을 담아놓은 복습자료입니다.
반드시 ETOOS 홈페이지 및 Youtube에 올라온 해설강의와 함께 활용하기 바랍니다.
양지용 선생님의 해설강의는 단순한 풀이를 나열하는 것이 아닌,
일관되고 확장성있는 구조화를 통해 효율적인 문제풀이를 통해 다음 시험을 잘 보게 합니다.

1번~4번 틀린 사람은 조용히 Q&A 게시판에 글을 남겨주세요.

1

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

$\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

함수 $f(x)=x^3+3x^2-5$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

3

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_3=2,\ a_4=4$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

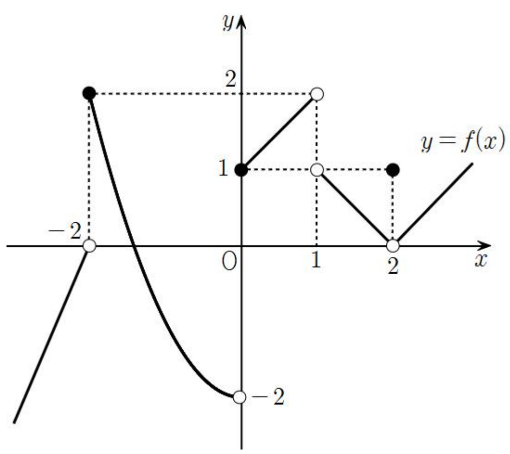
① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

4

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5 2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

필요 개념

<곱의 미분법>

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

지용쌤 Tip

곱미분 후 x^2-1에 $x=1$을 대입하면 0이 되어 날라가는 거 알지?

6 2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

↳ 맨 마지막에 부호를 결정할 때만 사용한다. 2사분면의 각이므로 sin의 결과는 무조건 양수이다.

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6번까지 6월과 똑같이 출제되었다.

필요 개념

① 모든 실수 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

지용쌤 Tip

제발! 각변환 공식을 진행할 때에는 θ의 범위를 신경쓰지 말자.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$라는 θ의 범위는 맨 마지막에 “부호를 결정할 때에만” 적용하자!

풀이 흐름

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$에서 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7 2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\geq 4)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [3점]

↳ $x=4$근처에서만 따지면 된다.

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

필요 개념

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$

풀이 흐름

$(4-a)^2=4$, $a^2-8a+12=0$
$(a-2)(a-6)=0$, $a=2$ 또는 $a=6$

8 2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

$a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③. 13
④ 14 ⑤ 15

필요 개념

$\log_a b\times log_b c=\log_a c$이다.

지용쌤 Tip

두 수의 곱은 $\log_2 a\times log_a\times 8=3$이므로
합이 4이고, 곱이 3인 두 수는 1과 3이라고 볼 수 있다.
$a>2$이므로 $\log_2 a>1$이 되어 $\log_2 a=3$이 되어 $a=8$임을 쉽게 알 수 있다.
불안하면 이차방정식을 풀어보면 되지만 합, 곱이 결정된 숫자는 그 숫자를 떠올리는 것이 더 빠르다.

9 2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★★☆

함수 $f(x)=x^2+x$ 에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 (5x+f(x))\,dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

지용쌤 Tip

단순 정적분이다. 따로 적분하기보다는, 주어진 적분식의 범위가 같으므로 아래와 과정으로 정답을 내자.

$$\begin{aligned}5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 (5x+f(x))\,dx &= \int_0^1 \{5f(x)-(5x+f(x))\}\,dx \\ &= \int_0^1 (4f(x)-5x)\,dx \\ &= \int_0^1 (4x^2-x)\,dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

10 2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★☆☆

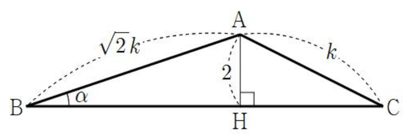
$\angle \mathrm{A} > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1,\ \overline{\mathrm{AH}} = 2$$

이고, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 일 때, 선분 BH 의 길이는? [4점]

① 6　② $\frac{25}{4}$　③ $\frac{13}{2}$　④ $\frac{27}{4}$　⑤ 7

풀이 흐름



[풀이1]

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면　$R = 5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{AC}} = k\ (k>0)$으로 놓고 $\angle \mathrm{ABC} = \alpha$라 하면 삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin\alpha} = 2R = 10\sqrt{2},\quad \sin\alpha = \frac{k}{10\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 ABH 에서　$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}k}$　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{k}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}k},\quad k^2 = 20$$

직각삼각형 ABH 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2} = \sqrt{2k^2 - 4} = 6$$

[풀이2]

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면　$R = 5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{AC}} = k\ (k>0)$으로 놓고, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A} = 2R = 10\sqrt{2}$ 에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 10\sqrt{2}\sin A$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin A$ 이므로

$\frac{1}{2}\times 10\sqrt{2}\sin A\times 2 = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}k\times k\times \sin A$에서 $k^2 = 20$ 으로 구할 수도 있다.

지용쌤 Tip

직각삼각형이 등장한다면 "삼각비"를 함께 이용하자. 이용할 조건이 하나 추가된다고 보면 된다.
굳이 코사인버칙을 통해서 해결하지 않아도 좋다.
또한, 6월에 이어서 같은 10번에 "그림이 없는 사인법칙 + 삼각비 이용" 이 출제되었으니 신경쓰자.

11 2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★★☆

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6,\ x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q 의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q 의 가속도를 각각 p, q 라 할 때, $p - q$ 의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

필요 개념

수직선 위를 움직이는 점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하면 속도 $v(t) = x'(t)$ 이고, 가속도 $a(t) = v'(t)$ 이다.

지용쌤 Tip

원래 속도를 먼저 제시하면서 적분을 묻는 문제가 더 어려운데,
이번에는 위치를 주면서 (미지수 없이) 속도, 가속도를 묻고 있으므로
두 점 P, Q 의 속도 v_1, v_2 를 구한 뒤 가속도 a_1, a_2 를 구하기만 하면 되는 쉬운 문제이다.

12 2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ★★☆

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여
↳ $a_{n+1}-a_n=d$를 이용하자.

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k \quad \rightarrow b_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n \text{ 라는 뜻}$$

를 만족시킨다. $b_2=-2$, $b_3+b_7=0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

지용쌤 Tip

일반항을 찾아도 되지만,
b_1, b_2, b_3, b_4, $\cdots$를 표현하면서 공차인 d의 값을 찾고,
b_n이 나열될수록 뒷 부분이 추가되기 때문에 a_1을 찾아주면 된다.
이때, 수열 $\{b_{2n-1}\}$과 $\{b_{2n}\}$이 등차수열을 이룸을 확인하고, 따로따로 더해서 정답을 내면 된다.
필살기에 거의 같은 문항이 수록되어 있으니 참고하자.

유사 & 적중 [필살기] 수학 I 172쪽 4번 : b_n의 정의와 합을 묻는 과정 그대로 출제됨

필!살! Point 유형분류와 핵심	등차수열에서 마이너스를 찾아주고 묶어주기 : 이산적 관찰

첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^{20}b_k$의 값을 구하시오. [4점]

13 2024. 09

난이도 ★★★
빈출도 ★★☆

함수

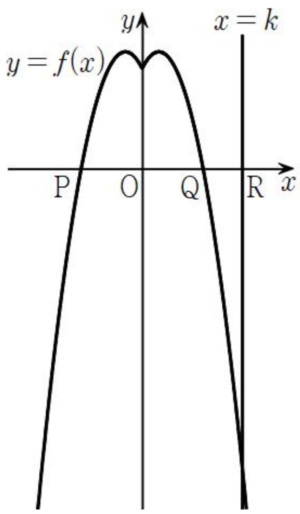
$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 k $(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

지용쌤 Tip

그림이 없는 상태에서의 넓이와 관련된 표현이다.
우선 그림을 제대로 표현하지 못하거나, A와 B를 잘못 지정하는 등 시간을 허비하지 않는 게 먼저이다.



또한, 우함수의 성질을 통해 $\frac{A}{2}=B$를 이용하여

$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$임을 계산하면 너무(X10) 쉽게 $k=6$임이 유도된다.

단, 이때 중간 교점인 점 Q의 x좌표를 구하는 친구들이 있던데, 그럴 필요는 없다.

14 2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ☆☆☆

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 A_nB_n의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$ → 두 점 A_n, B_n의 x좌표 차이가 n이라는 뜻

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중
↳자체적으로 $y=x$대칭인 도형 ↳역함수 관계를 떠올리자.
큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

지용쌤 Tip

워낙 많이 나오는 조건이다. 지수함수+직선의 위치관계를 통해
1. 기울기를 삼각비로 해석하여 x좌표, y좌표의 차이 구하기
2. 역함수 관계 파악하여 로그함수 위에서 x좌표 문자 추가하기

의 과정만 진행하면 쉽게 정답이 나온다. 양지용T 커리큘럼에 유사한 상황이 많으니 확인해보자.
심지어 중심이 $y=x$ 위에 있는 원이 등장했을 때의 역함수 관계도 많이 설명하였다.

유사 & 적중 <필살기 수학 I 72p 필살 Point>

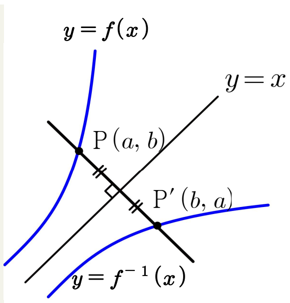
필!살! Point 유형분류와 핵심

기울기가 -1인 직선과 역함수 그래프가 함께 등장할 때

기울기가 -1인 직선은 자체적으로 $y=x$에 대하여 대칭이다.

➜ 기울기 -1인 직선과 $y=f(x)$와의 교점을 P라 하고,
기울기 -1인 직선과 $y=f^{-1}(x)$와의 교점을 P′ 라 할 때
두 점 P와 P′ 은 서로 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때, 기울기가 -1인 직선 이외에도
자체적으로 $y=x$에 대하여 대칭인 곡선이 사용되는 경우도 많다.
(중심이 $y=x$ 위에 있는 원,
점근선의 교점이 $y=x$ 위에 있는 유리함수 등)



유사 & 적중 <필살기 수학 I 13번>

곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.) [4점]

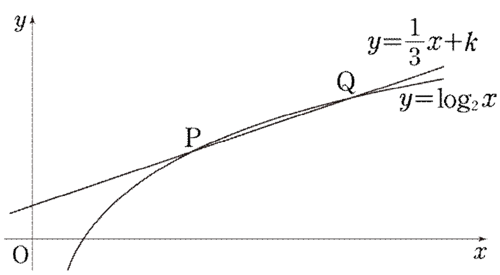
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

유사 & 적중 <수능코어 31번>

두 곡선 $y=4^{x}$, $y=2^{2x-t}-t\ (t>0)$이 직선 $y=-2x+k\ (k>1)$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원점 O와 점 $\mathrm{A}(0,\ k)$에 대하여 두 삼각형 OPA, OQA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. 양수 t에 대하여 $S_2=\dfrac{3}{2}S_1$이 되도록 하는 실수 k의 값을 $f(t)$라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구하시오.

유사 & 적중 <백점백승 수학 I +수학 II 9번>

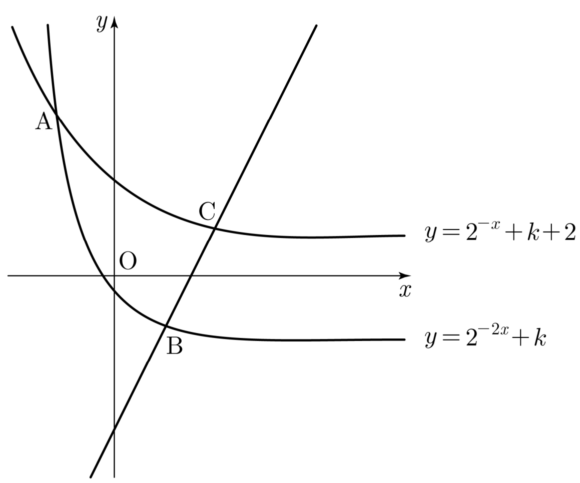
함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만날 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{10}$이다. 2^{k}의 값은?



① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

유사 & 적중 <백점백승 수학 I +수학 II 9번>

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-2x}+k$와 $y=2^{-x}+k+2$의 교점을 A라 하고, 기울기가 2인 직선이 두 곡선 $y=2^{-2x}+k$, $y=2^{-x}+k+2$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{5}$이고 선분 BC의 중점이 x축 위에 있을 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $16S$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)



15

2024. 09

난이도 ★★★
빈출도 ★★★

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x tf(t)\,dt + \int_{-1}^x tg(t)\,dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80
④ 84 ⑤ 88

필요 개념

곱의 미분법 : $\{xg(x)\}' = g(x) + xg'(x)$

지용쌤 Tip

조건 (가)의 양변을 미분하면 $xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$

$f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$

$xg'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$

위의 식의 양변을 부정적분하면

$xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x$ (좌변의 x라는 인수 때문에 적분상수$=0$이 됨)

$g(x) = 4x^2 + 12x - 6$ 임을 쉽게 구할 수 있다.

유사 & 적중 <필살기 수학 II 171p 예제>

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 8x + 3$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) + g(x) = 8x + 2$이다.

$\int_0^1 g(x)dx$의 값을 구하시오.

유사 & 적중 <필살기 수학 II 206p 13번>

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점][21]

16

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

방정식

$$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)=3$$

을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

17

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x+1$ 이고 $f(0)=1$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

24) 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k=36,\ \sum_{k=1}^{9} ka_{k+1}=7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

지용쌤 Tip

나열해도 좋지만

$$\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1}=\sum_{k=0}^{9} ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{10}(k-1)a_k=\sum_{k=1}^{10} ka_k-\sum_{k=1}^{10} a_k$$

를 이용하여 쉽게 계산하는 방법도 있으니 참고하자.

19

2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★★★

함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ 는 $x=1$ 에서 극소이다. 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 28 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

20 2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★☆☆

닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

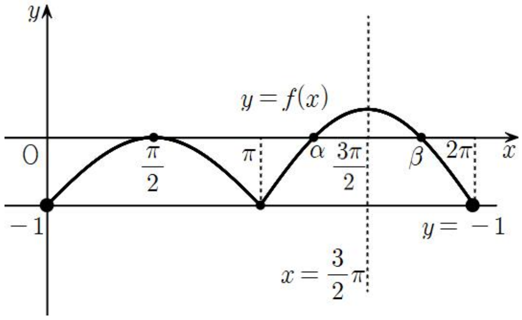
가 있다. $0 \le t \le 2\pi$ 인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이

↳ t 는 x좌표 역할을 한다.

되도록 하는 모든 t 의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

지용쌤 Tip

따라서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f(t)$ 의 교점의 x 좌표이므로
아래 그림에서의 합을 구해주면 쉽게 정답을 낼 수 있다.



21

2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ★★★

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 정수 k에 대하여

↳모든 실수에서 성립하는 것은 아니니 주의하자.

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

필요 개념

모든 실수 x에 대하여 성립하는 부등식 $f(x) \le g(x) \le h(x)$라면 $g(x)$를 결정할 수도 있겠지만,
모든 정수 k에 대하여 성립하는 부등식 $f(k) \le g(k) \le h(k)$에서 이차함수를 특정짓기는 어렵다.

지용쌤 Tip

가운데의 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2} = \dfrac{f(k+2)-f(k)}{(k+2)-k}$ 라는 식이
곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(k,\ f(k))$와 $(k+2,\ f(k+2))$를 지나는 직선의 기울기 (=평균변화율)
의 의미를 가지고 있다.
하지만 $y=2x-8$과 $y=4x^2+14x$라는 두 함수의 관계가 서로 다른 두 점 $(-1,\ -10)$, $(-2,\ -12)$에서 만나고 대소관계가 바뀌기 때문에 그 사이에 있는 $f'(x)$를 특정짓는다는 게 해석이 힘들다.
따라서

$k=-1$일 때 $-10 \le \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$이므로 $f(1)-f(-1)=-20$ ……㉠

$k=-2$일 때 $-12 \le \dfrac{f(0)-f(-2)}{2} \le -12$이므로 $f(0)-f(-2)=-24$ ……㉡

가 되어

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 두고 ㉠, ㉡을 통해 $f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$를 구해도 좋고,

㉠에서 $f(1)-f(-1)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(x)dx = \int_{-1}^{1}(3x^2+2ax+b)=-20$

㉡에서 $f(0)-f(-2)=\displaystyle\int_{-2}^{0} f'(x)dx = \int_{-2}^{0}(3x^2+2ax+b)=-24$에서

$a,\ b$를 구하여 $f'(x)=3x^2+5x-11$를 찾아도 좋다.

결국, 정보가 없는 가운데 식 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}$ 보다,

왼쪽과 오른쪽의 $2k-8$과 $4k^2+14k$의 대소관계나 같아지는 순간을 관찰하려는 마음가짐이 중요하다.

22

2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ★★★

양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

지용쌤 Tip

$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1} = -ka_n$이므로

"점화식을 분석하려는 행위"가 추가된다면 Case분류가 줄어든다.

$a_4 > 0$일 때 $a_5 = a_4 - \frac{2}{3}k$이어야만 $a_5 = 0$일 수 있고,

$a_4 = 0$이면 $a_5 = -ka_4$이어야만 $a_5 = 0$일 수 있다.

또한, $a_4 < 0$이면 $a_5 \neq 0$이므로

a_4의 부호를 따져본다면 손쉽게 정답을 낼 수 있다.

풀이 흐름

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td rowspan="7">k</td><td rowspan="3">$-k^2$ (−)</td><td rowspan="3">k^3 (+)</td><td>$-k^4$ (−)</td><td>불가능</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$k^3 - \frac{2}{3}k$ (?)</td><td>$-k^4 + \frac{2}{3}k^2 = 0$</td></tr>
<tr><td>$k^3 - \frac{4}{3}k = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\frac{k}{3}$ (+)</td><td rowspan="2">$-\frac{k^2}{3}$ (−)</td><td>$\frac{k^3}{3}$ (+)</td><td>$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0$</td></tr>
<tr><td>$-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$ (−)</td><td>불가능</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$-\frac{k}{3}$ (−)</td><td>$\frac{k^2}{3}$ (+)</td><td>$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0$</td></tr>
<tr><td>$-k$ (−)</td><td>불가능</td></tr>
</table>

위의 색칠한 부분에서 가능한 k^2의 값은 $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2, 4이다.

확률과 통계

23

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

다섯 개의 숫자 $1, 2, 2, 3, 3$ 을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

24

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

두 사건 A, B 는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

필요 개념

두 사건 A, B 가 서로 독립사건이면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$이다.

25

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

1 부터 11 까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2 개의 수를 선택한다. 선택한 2 개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수일 확률은? [3점]

↳적어도 하나가 $7,\ 9,\ 11$중 하나 → 전체에서 $7,\ 9,\ 11$을 제외한 것을 빼자!

① $\frac{23}{55}$ ② $\frac{24}{55}$ ③ $\frac{5}{11}$
④ $\frac{26}{55}$ ⑤ $\frac{27}{55}$

지용쌤 Tip

전체에서부정을 빼는 것으로 접근하자.

26

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$ 라 하자.

$$\mathrm{P}(\overline{X} \le 12) + \mathrm{P}(\overline{Y} \ge 8) = 1$$

이 되도록 하는 m 의 값은? [3점]

① 5　② $\frac{13}{2}$　③ 8　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 11

27

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

이산확률변수 X 가 가지는 값이 0 부터 4 까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(X=k+2)\ \ (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2) = \frac{35}{6}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=0)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{1}{8}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{5}{24}$

지용쌤 Tip

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1 이므로

$$3a+2b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\mathrm{E}(X^2) = \frac{35}{6}$ 에서

$$1^2 \times b + 2^2 \times a + 3^2 \times b + 4^2 \times a = \frac{35}{6}$$

$$24a + 12b = 7 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $a = \frac{1}{6},\ b = \frac{1}{4}$

$$\therefore \mathrm{P}(X=0) = \frac{1}{6}$$

28

2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ★★☆

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 $f:X \to X$ 인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 가 짝수일 확률은? [4점]

> $a \in X, b \in X$ 에 대하여
> a 가 b 의 약수이면 $f(a)$ 는 $f(b)$ 의 약수이다.

① $\dfrac{9}{19}$ ② $\dfrac{8}{15}$ ③ $\dfrac{3}{5}$
④ $\dfrac{27}{40}$ ⑤ $\dfrac{19}{25}$

지용쌤 Tip

조건부확률의 유형 중 하나인 $\dfrac{a'+b'}{a+b}$ 꼴의 문제이다.

$f(4)$ 를 기준으로 세워도 좋고, $f(1)$ 을 기준으로 세워도 좋다.

$f(4)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	함수의 개수
1	1	1	1, 2, 3, 4	4
3	1	1, 3	1, 2, 3, 4	$2\times4=8$
	3	3	3	1
2	1	1, 2	1, 2, 3, 4	$2\times4=8$
	2	2	2, 4	2
4	1	1, 2, 4	1, 2, 3, 4	12
	2	2, 4	2, 4	4
	4	4	4	1

29 2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★☆☆

수직선의 원점에 점 A 가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A 를 양의 방향으로 1 만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A 를 음의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

이 시행을 16200 번 반복하여 이동된 점 A 의 위치가 5700 이하일 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여

↳ 구간에서의 확률을 묻고 있으므로 정규분포로 근사시키자

구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

필요 개념

이항분포$\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여
n이 충분히 크면 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.
이항분포의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=k)={}_{n}\mathrm{C}_{k}\times p^{k}\times(1-p)^{n-k}$이므로
“순간적인 확률”을 계산할 수는 있지만, “구간에서의 확률”을 계산하기는 어렵다.
그래서 지금처럼 “5700 이하일 확률”을 묻는 경우에는
우선 이항분포를 설정 후 정규분포로 근사시켜서 확률을 구하도록 하자.

풀이 흐름

한 개의 주사위를 던지는 시행을 16200번 반복할 때 4이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면 4이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이므로 확률변수X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \frac{2}{3}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=16200\times\frac{2}{3}=10800$$

$$\mathrm{V}(X)=16200\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=60^{2}$$

이때 $n=16200$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10800,\ 60^{2})$을 따르고,
$Z=\frac{X-10800}{60}$ 으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 점 A 의 위치가 5700이하가 되려면 4이하의 눈이 나오는 횟수 X는

$$X-(16200-X)\le 5700,\quad X\le 10950$$

따라서 점 A 의 위치가 5700이하일 확률은

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 10950)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{10950-10800}{60}\right)$$

$=\mathrm{P}(Z\le 2.5)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5+0.494=0.994$
$k=0.994$ 이므로

$$1000\times k=1000\times 0.994=994$$

30 2024. 09

난이도 ★★★
빈출도 ★★★

흰 공 4 개와 검은 공 4 개를 세 명의 학생 A, B, C 에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A 가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
(나) 학생 B 가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

지용쌤 Tip

조건 (가)는 정면돌파 하고, 조건 (나)는 부정을 빼도록 하자.

풀이 흐름

조건 (가)에서 학생 A 가 받는 공의 개수가 0 이상 2 이하이고 조건 (나)에서 학생 B 가 받는 공의 개수가 2 이상이므로 학생 A 가 받는 공의 개수를 기준으로 나누면

i) 학생 A 가 받는 공의 개수가 0 일 때
두 학생 B, C 에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 25$$

이때, 학생 B 가 받는 공의 개수가 0 인 경우의 1 가지와 1 인 경우의 2 가지를 제외하면
학생 A 가 받는 공의 개수가 0 인 경우의 수는 $25-3=22$

ii) 학생 A 가 받는 공의 개수가 1 일 때
학생 A 가 공을 받는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공의 2 가지
두 학생 B, C 에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공이 1 개 빠졌으므로

$${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_4 = {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 20$$

이때, 학생 B 가 받는 공의 개수가 0 인 경우의 1 가지와 1 인 경우의 2 가지를 제외하면 $20-3=17$
따라서 학생 A 가 받는 공의 개수가 1 인 경우의 수는 $2\times17=34$

iii) 학생 A 가 받는 공의 개수가 2 일 때
(a) 학생 A 가 같은 색의 공을 받은 경우
학생 A 가 같은 색의 공을 받은 경우의 수는 2 가지
두 학생 B, C 에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공이 2 개 빠졌으므로

$${}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_4 = {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 15$$

이때, 학생 B 가 받는 공의 개수가 0 인 경우의 1 가지와 1 인 경우의 2 가지를 제외하면 $15-3=12$
따라서 학생 A 가 같은 색의 공 2 개를 받는 경우의 수는 $2\times12=24$
(b) 학생 A 가 다른 색의 공을 받은 경우
두 학생 B, C 에게 흰 공 3 개와 검은 공 3 개를 나누어주는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 16$$

이때, 학생 B 가 받는 공의 개수가 0 인 경우의 1 가지와 1 인 경우의 2 가지를 제외하면
학생 A 가 다른 색의 공 2 개를 받은 경우의 수는 $16-3=13$
(a), (b)에서 학생 A 가 받는 공의 개수가 2 인 경우의 수는 $24+13=37$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는 $22+34+37=93$

미적분

23

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

24

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$ 이다. $f(1)=2e^2+1$ 일 때, $f(e)$ 의 값은? [3점]

① $2e^{2e}-1$　② $2e^{2e}$　③ $2e^{2e}+1$　④ $2e^{2e}+2$　⑤ $2e^{2e}+3$

25

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★★

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n \times a_n - 1}{3 \times 2^{n+1}} = 1$$

일 때, $a_1 + a_2$ 의 값은? [3점]

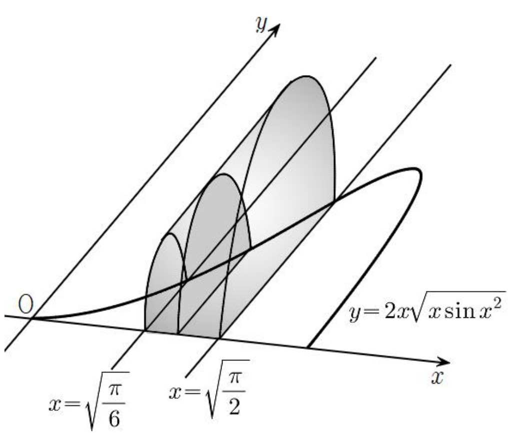
① $\frac{3}{2}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{9}{2}$　⑤ $\frac{11}{2}$

26

2024. 09

난이도 ☆☆☆
빈출도 ★★☆

그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}$ $(0 \le x \le \sqrt{\pi})$ 와 x 축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\pi^2+6\pi}{48}$　② $\frac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$　③ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$　④ $\frac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

27 2024. 09

난이도 ★☆☆
빈출도 ★★☆

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$ 의 값은?]3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

지용쌤 Tip

항등식 대응법 중 하나인 양변 미분&대입하기를 진행해주면 아주 쉽게 답이 나온다.

28 2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ★★★

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 는 역함수 $g^{-1}(x)$ 를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$ → 그림에서 곧바로 $\int_0^1 g(x)dx$를 찾자.

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

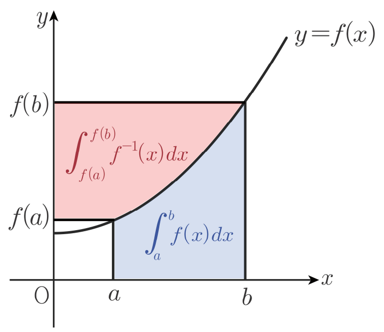
필요 개념 <역함수의 정적분> [미적분] 필살기, [미적분] 백점백승

백점백승 Theme 역함수의 정적분과 그 표현법

① 역함수를 그리지 않고 원함수의 그래프에서 역함수 넓이 찾기

역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx=b\times f(b)-a\times f(a)$$



② 부분적분과의 연계성

$$\int_a^b xf'(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)dx$$
$$=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx=\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx$$

지용쌤 Tip

필살기와 백점백승에서 강조했떤 바가 그대로 출제되었다.
그림으로 역함수관계를 해석하여
[식으로 보여주기]

$g(0)=0$, $g(1)=1$ 이므로 $g^{-1}(0)=0$, $g^{-1}(1)=1$ 이고 $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$ 이므로

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=\Big[x\times g^{-1}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 x\times(g^{-1})'(x)\,dx$$
$$=1-\int_0^1 \frac{x}{g'(g^{-1}(x))}\,dx$$

$x=g(t)$ 라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{x}{g'(g^{-1}(x))}\,dx=\int_0^1 \frac{g(t)}{g'(g^{-1}(g(t)))}\times g'(t)\,dt$$
$$=\int_0^1 g(t)\,dt$$

[그림으로 확인]
풀이영상 참고

유사 & 적중 <백점백승 미적분 88번>

실수 전체의 집합에서 증가하고 $f(0)=-1$, $f(4)=3$인 연속함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_0^3 xg'(x)dx=\frac{25}{3}$

(나) $\displaystyle\int_0^4 |f(x)|dx=2\int_{-1}^3 g(x)dx$

$\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

29 2024. 09

난이도 ★★☆
빈출도 ★★☆

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m 항까지의 합을 S_m이라 하자.
모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

지용쌤 Tip

부분분수 급수계산과 $a_n \sim S_n$ 관계를 물어보는 문제이다.
좋은 문항이나, 난이도는 매우 낮은편이니 아래 풀이를 참고하자.

풀이 흐름

$a_1 + a_{10} = S_1 + (S_{10} - S_9)$이므로

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{10} - S_9 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{11}{n(n+11)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+10)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+11}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+10} - \frac{1}{n+11}\right)$$

$$= \frac{1}{11}$$

30 2024. 09

난이도 ★★★
빈출도 ☆☆☆

양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.
> ↳ $F(x)-f(x)\geq 0$이어야 한다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

지용쌤 Tip

구간별 함수의 부정적분과 New 함수 설정을 통해 함수 $F(x)-f(x)$의 최솟값이 0 이상인지 확인해주어야 한다.
이때, 함수의 극솟값과 점근선의 대소를 비교하는 것이 핵심인데,
$k=\frac{1}{4}$일 때는 극솟값이 최솟값이고, $k=\frac{3}{2}$일 때는 극솟값보다 점근선이 더 작기 때문에 그때마다 그래프를 그려보면 쉽게 정답이 나온다.

풀이 흐름

$f(x)=\begin{cases}(k+x)e^{-x} & (x<0)\\(k-x)e^{-x} & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고 $F(x)=\int f(x)\,dx$ 이므로

$$F(x)=\begin{cases}-(x+k+1)e^{-x}+C_1 & (x<0)\\(x-k+1)e^{-x}+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)$$
$$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0-}\{-(x+k+1)e^{-x}+C_1\}=-k-1+C_1$$
$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0+}\{(x-k+1)e^{-x}+C_2\}=-k+1+C_2$$

이때, 함수 $F(x)$가 연속이므로 $-k-1+C_1=-k+1+C_2$ 이므로 $C_2=C_1-2$