2025학년도 모의논술

논술시험(수리 논술)

모집단위		전형유형	
수험번호		성명	

답안작성 유의사항

가. 시험 시간은 100분이며, 문제별 답안은 반드시 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 작성해야 합니다. (문제번호와 답안번호는 반드시 일치해야 합니다.)

나. 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 다른 문제의 답안을 작성한 경우 평가하지 않습니다.

다. 답안은 지정된 작성영역 내에 작성해야 하며, 지정된 작성영역을 초과하여 작성한 부분에 대해서는 평가하지 않습니다.

라. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

마. 답안작성은 흑색 필기구를 사용해야 합니다. (연필·샤프 사용가능, 답안작성 중 필기구 종류 또는 색상 변경 불가)

바. 답안 수정 시에는 취소선을 긋거나 지우개로 지워야 하며 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY(SKKU)

문제 1 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제1- i] ~ [문제1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문 1>

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = a + (n-1)d \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이고, 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

<제시문 2>

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 다음과 같다.

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

<제시문 3>

양의 정수 n에 대하여, n개의 서로 다른 양의 정수로 이루어진 집합 $S=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$를 생각하자. (단, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$이라고 가정하자.) 집합 S에서 서로 다른 두 개의 원소를 뽑아 더한 ${}_n\mathrm{C}_2$개의 수가 모두 다르고, 이 수들을 크기가 작은 것부터 나열했을 때 등차수열을 이룬다고 가정하자. 예를 들어, $n=3$일 때 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3\}$이라고 하면, 등차수열 $3,\ 4,\ 5$를 얻을 수 있다.

[문제 1 - i] <제시문 3>에서 $n=3$일 때, 집합 S로부터 얻은 등차수열의 합이 600이 되는 가능한 모든 집합 S의 개수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 1 - ii] <제시문 3>에서 $n=4$일 때, 집합 S로부터 얻은 등차수열의 합이 2025가 되는 가능한 모든 집합 S의 개수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 1 - iii] $n \ge 5$일 때, <제시문 3>의 조건을 만족하는 집합 S가 존재하지 않음을 보이고, 그 이유를 논하시오. (10점)

문제 2

다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제2- i] ~ [문제2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

<제시문 1>

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 하면, (a, b, c는 실수)

(i) $D>0$: 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $D=0$: 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(iii) $D<0$: 서로 다른 두 허근을 갖는다.

<제시문 2>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

<제시문 3>

실수 $k(\neq\pm1)$에 대하여 이차함수 $y=\left(\frac{1-k^2}{2}\right)x^2$과 직선 $y=kx+1$의 교점의 개수가 2일 때, 두 교점을 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$과 $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$로 나타낸다 (단, $x_1<x_2$). 만약, 교점의 개수가 1이라면, $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2$라고 하자 (즉, $x_1=x_2$).

[문제 2 - i] <제시문 3>에서 교점의 개수가 2라고 가정하자. 두 점 P_1, P_2의 중점과 점 $\mathrm{Q}(2, 0)$을 잇는 직선이 y축과 만나지 않는다고 할 때, 가능한 k의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2 - ii] <제시문 3>에서 교점의 개수가 2이고 $0<x_1<x_2$라 가정하자. 두 점 P_1, P_2의 중점과 점 $\mathrm{Q}(2, 0)$을 잇는 직선이 y축과 만날 때, 그 교점을 $\mathrm{R}(0, c)$라고 하자. y축 위의 점 중에서 교점 $\mathrm{R}(0, c)$이 될 수 없는 점들의 집합이 이루는 선분의 길이를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2 - iii] <제시문 3>에서 교점의 개수가 1이고 $x_1=x_2<0$일 때, 직선 $y=kx+1$에 수직이고 점 P_1을 지나는 직선이 이차곡선 $y=\left(\frac{1-k^2}{2}\right)x^2$과 만나는 또 다른 한 점을 T라고 하자. 그리고, 점 T에서 이차곡선 $y=\left(\frac{1-k^2}{2}\right)x^2$에 그은 접선이 직선 $y=kx+1$과 만나는 교점을 B라 하자. 이차곡선 $y=\left(\frac{1-k^2}{2}\right)x^2$에 의해 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{TB}$는 두 영역으로 나뉘게 되는데, 두 영역의 넓이의 비를 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

문제 3 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 [문제3- i] ~ [문제3-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

<제시문 1>

좌표 평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(1,\sqrt{3})$을 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC가 있다. 1이상의 실수 a에 대하여 중심이 $\left(a, \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$이고 반지름이 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$인 원 C_a와 정삼각형 ABC의 교점을 생각하자.

<제시문 2>

<제시문 1>의 원 C_a와 세 점 A, B, C, 1이상의 실수 a에 대하여 함수 $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a)$를 각각 다음과 같이 정의하자.

(i) 원 C_a와 선분 AB의 교점의 개수를 $f_1(a)$라고 하자.
(ii) 원 C_a와 선분 AC의 교점의 개수를 $f_2(a)$라고 하자.
(iii) 원 C_a와 선분 BC의 교점의 개수를 $f_3(a)$라고 하자.

[문제 3 - i] <제시문 2>에 주어진 함수 $f_1(a)$에 대하여, $f_1(a) \geq 1$이기 위한 a의 범위에 대하여 논하시오. (10점)

[문제 3 - ii] <제시문 2>에 주어진 함수 $f_1(a)$에 대하여, $f_1(a)=2$인 1보다 큰 a의 값들 중에서 가장 작은 값을 m이라고 두자. m을 근으로 하고 최고차항의 계수가 1이며 정수 계수를 갖는 삼차다항식을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 3 - iii] <제시문 2>에 주어진 함수 $f_2(a)$에 대하여, $f_2(a) \geq 1$이기 위한 a의 범위에 대하여 논하시오. (10점)

[문제 3 - iv] <제시문 2>에 주어진 함수 $f_3(a)$에 대하여, $f_3(a) \geq 1$이기 위한 a의 범위를 [문제 3 - ii]에서 제시된 m을 이용하여 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

2025학년도 모의논술

해설(수리 논술)

문제 1

개요 및 주요 평가항목

서로 다른 n개의 숫자에서 2개를 선택하여 만들어 낼 수 있는 ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$개의 숫자들이 언제 등차수열의 항을 이루는지를 확인하는 문제로, 등차수열의 기본적인 개념과 간단한 경우에서의 조합의 의미를 이해하고 있는지 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중 경우의 수(조합)와 등차수열 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

문제 1 - i	등차수열의 뜻을 알고, 그 성질을 활용할 수 있는지 평가한다.
문제 1 - ii	등차수열의 뜻을 알고, 그 성질을 활용할 수 있는지 평가한다.
문제 1 - iii	등차수열의 뜻을 알고, 그 성질을 활용할 수 있는지 평가한다.

예시답안 및 채점기준

문제 1 - i

<예시답안>

집합 $S=\{a=a_1, a_2, a_3\}$로부터 얻은 등차수열은

$$a_1+a_2<a_1+a_3<a_2+a_3$$

이고, 공차를 d라고 하면, $d=a_2-a_1=a_3-a_2$가 된다. 따라서, 등차수열은

$$2a+d,\ 2a+2d,\ 2a+3d$$

가 되고, 이 세수의 합은 $6(a+d)=600$이 되어 $a+d=100$을 얻게 된다. $a, d \geq 1$이므로 만족하는 순서쌍 $(a,d)=(1,99), (2,98), \cdots, (99,1)$이고 가능한 모든 집합 S의 개수는 99이다.

채점기준

5점 집합 S의 원소들이 만족해야되는 조건을 수식화 할 수 있다.

5점 가능한 집합 S의 개수를 올바르게 구할 수 있다.

문제 1 - ii

<예시답안>

집합 $S=\{a=a_1, a_2, a_3, a_4\}$로부터 얻은 등차수열의 처음 세 개의 항은

$$a_1+a_2<a_1+a_3<a_1+a_4 \text{ 혹은 } a_1+a_2<a_1+a_3<a_2+a_3$$

이다. 먼저, $a_1+a_2<a_1+a_3<a_1+a_4$라고 가정하자. 이때, 등차수열은

$$a_1+a_2<a_1+a_3<a_1+a_4<a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4$$

가 되고, 공차를 d라고 하면 $d=a_3-a_2=a_4-a_3$이 된다. 이로부터,

$$d=(a_2+a_3)-(a_1+a_4)=a_2-a_1-d$$

을 얻게 되어, $a_2-a_1=2d$이다. 따라서, $S=\{a, a+2d, a+3d, a+4d\}$가 되고, 집합 S의 원소들로 만들어진 등차수열은 첫째항이 $2a+2d$이고 공차가 d인 등차수열이므로 $\frac{6(4a+9d)}{2}=2025$, 즉 $4a+9d=675$이고 이를 만족하는 양의 정수의 쌍 (a,d)는 $(162,3), (153,7), \cdots (9,71)$으로 총 18개다.

이제, $a_1+a_2<a_1+a_3<a_2+a_3$라고 가정하자. 이때, 등차수열은

$$a_1+a_2<a_1+a_3<a_2+a_3<a_1+a_4<a_2+a_4<a_3+a_4$$

이 되고, 위와 같은 방법으로(혹은 대칭성에 의해) $S=\{a, a+d, a+2d, a+4d\}$이고 집합 S의 원소들로 만들어진 등차수열은 첫째항이 $2a+d$이고 공차가 d인 등차수열이므로 $\frac{6(4a+7d)}{2}=2025$, 즉 $4a+7d=675$가 된다. 이를 만족하는 양의 정수의 쌍 (a,d)는 $(167,1), (160,5), \cdots, (6,93)$으로 총 24개다. 따라서, 가능한 집합 S의 개수는 42개다.

채점기준

2점 가능한 집합 S를 두 가지로 나눌 수 있다.

4점 첫 번째 경우의 개수를 구할 수 있다.

4점 두 번째 경우의 개수를 구할 수 있다.

문제 1 - iii

<예시답안>

집합 $S=\{a_1,\cdots,a_n\}$로부터 얻은 등차수열은 다음과 같다.

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_{n-2}+a_n<a_{n-1}+a_n$$

공차를 d라 하면, $d=a_3-a_2=a_{n-1}-a_{n-2}$를 얻을 수 있다. 이로부터

$$a_2+a_{n-1}=(a_3-d)+(a_{n-2}+d)=a_3+a_{n-2}$$

가 되어, 만약 $n\geq 6$이라면 <제시문 3>의 조건에 모순이다.

이제 $n=5$이라고 가정하면, $a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_3+a_5<a_4+a_5$를 얻는다.

이로부터, $d=a_3-a_2=a_4-a_3$을 얻게 되고, $(a_1+a_3)+d=a_1+(a_3+d)=a_1+a_4$가 되어, a_1+a_4가 3번째 항이 된다. 마찬가지로 a_2+a_5는 8번째 항이 된다.

또한, $a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4$도 각 항의 차이가 d이므로 a_1+a_5는 4번째 항이거나 7번째 항이 된다. 먼저, a_1+a_5가 4번째 항이라고 가정하자. 그러면 등차수열은

$$\begin{aligned}a_1+a_2<a_1+a_3&<a_1+a_4<a_1+a_5\\&<a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4\\&<a_2+a_5<a_3+a_5<a_4+a_5\end{aligned}$$

이 된다. 이때, $a_5-a_4=(a_1+a_5)-(a_1+a_4)=d=(a_1+a_3)-(a_1+a_2)=a_3-a_2$이다. 이로부터 $a_2+a_5=a_3+a_4$가 되어, <제시문 3>의 조건에 모순이다.

마찬가지로 a_1+a_5가 7번째 항인 경우에도 비슷한 방식으로 모순을 이끌어낼 수 있다.

채점기준

4점 $n\geq 6$인 경우 존재하지 않음을 보인다.

6점 $n=5$인 경우 존재하지 않음을 보인다.

문제 2

개요 및 주요 평가항목

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계로부터 파생되는 다양한 점의 좌표와 직선의 방정식을 구할 수 있는지와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있는지, 그리고 정적분을 올바르게 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중에서 방정식과 부등식, 직선의 방정식, 정적분 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

문제 2 - i 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

문제 2 - ii 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

문제 2 - iii 직선의 방정식을 올바르게 구할 수 있고, 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

예시답안 및 채점기준

문제 2 - i

<예시답안>

이차방정식 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$이 두 개의 서로 다른 실근을 가져야 하므로,

$$D=4k^2+8(1-k^2)>0$$

이 성립한다. 따라서, $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 이고 $k\neq\pm1$이다.

$x_1+x_2=\dfrac{2k}{1-k^2}$이므로, 두 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$의 중점의 x좌표는 $\dfrac{k}{1-k^2}$이다.

문제의 직선이 y축과 만나지 않기 위해서는 $\dfrac{k}{1-k^2}=2$, 즉 $2k^2+k-2=0$이 성립해야 하고

$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$이다. 이 두 개의 k의 값 모두 위에서 구한 부등식을 만족한다.

채점기준

5점 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 k에 대한 조건으로 표현할 수 있다.

5점 가능한 k의 값을 모두 구할 수 있다.

문제 2 - ii

<예시답안>

이차방정식 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$이 두 개의 서로 다른 양의 실근을 가져야 하므로,

$$x_1+x_2=\frac{2k}{1-k^2}>0,\ x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0,\ D=4k^2+8(1-k^2)>0$$

이 성립한다. 따라서, $-\sqrt{2}<k<-1$이다.

이때, 두 점 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{k}{1-k^2},\frac{1}{1-k^2}\right)$이므로, $\dfrac{\frac{1}{1-k^2}}{\frac{k}{1-k^2}-2}=\dfrac{c}{-2}$를 얻게 되어

$$c=\frac{2}{-2k^2-k+2}$$

가 성립한다. $-\sqrt{2}<k<-1$에 대해 $-2+\sqrt{2}<-2k^2-k+2<1$이므로, $c<-2-\sqrt{2}$ 혹은 $c>2$이다. 따라서, 문제의 선분은 점$(0,-2-\sqrt{2})$와 점$(0,2)$를 연결하므로, 그 길이는 $4+\sqrt{2}$이다.

채점기준

5점 가능한 k값의 범위를 구할 수 있다.

5점 선분의 길이를 구할 수 있다.

문제 2 - iii

<예시답안>

[문제 2 - ii]와 대칭성으로부터 $k=\sqrt{2}$ 이다. 즉, 문제에서 주어진 직선의 방정식은 $y=\sqrt{2}x+1$, 이차함수는 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 이고, 점 P_1의 좌표는 $\mathrm{P}_1(-\sqrt{2},\,-1)$이다.

따라서, 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{T}$의 방정식은 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2$이고 $\mathrm{T}(2\sqrt{2},\,-4)$이다.

이로부터 직선 TB의 방정식은 $y=-2\sqrt{2}x+4$가 되어 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,2\right)$이다.

이로부터 직각삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{TB}$에서 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{T}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{B}}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$ 이므로, 그 넓이는 $\frac{27}{4}\sqrt{2}$ 이다.

이제 두 영역 중에서 아래에 놓인 부분의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x+2\right)dx=\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

이므로 나머지 영역의 넓이는 $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ 이고, 두 영역의 넓이의 비는 $2:1$이다.

채점기준

3점 점 $\mathrm{P}_1,\mathrm{T},\mathrm{B}$의 좌표를 구할 수 있다.

2점 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

5점 정적분을 이용하여 각 영역의 넓이를 구할 수 있다.

문제 3

개요 및 주요 평가항목

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 삼각형의 세 선분과 원과의 교점의 개수를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교과정 중 두 점 사이의 거리 공식, 이차함수의 최대, 최소, 다항식의 인수분해, 이차부등식, 삼차함수의 그래프의 개형 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

문제 3 - i 이차함수의 닫힌 구간에서의 최대, 최소를 활용하여 관련된 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

문제 3 - ii 삼차함수의 그래프의 개형을 이해하고, 이와 관련한 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

문제 3 - iii 사차다항식의 인수분해를 통하여 주어진 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

문제 3 - iv 이차함수와 관련된 절대부등식의 개념을 이용해, 주어진 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

예시답안 및 채점기준

문제 3 - i

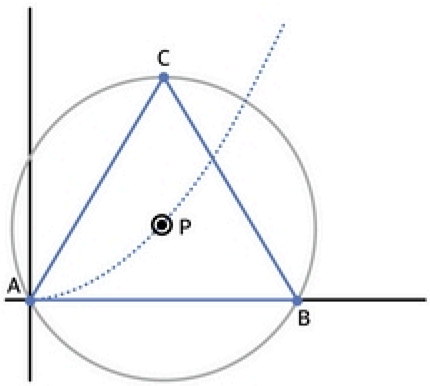
<예시답안>

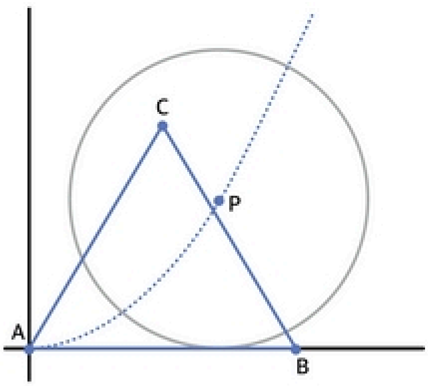
선분 AB 위의 임의의 점을 $(x,0)$으로 놓자. 여기서 $0 \le x \le 2$이다. 원 C_a와 선분 AB의 교점이 생길 필요충분조건은 두 점 $(x,0)$과 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이 되는 x가 0과 2 사이에 존재한다는 것이다. 두 점 $(x,0)$과 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리의 제곱을 $f(x)$로 두면, $f(x) = (x-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$이므로

$f(x)=\frac{4}{3}$가 되는 x를 닫힌 구간 $[0,2]$에서 찾도록 하자. 다음 두 가지 경우로 나누어서 생각해보도록 하겠다.

(경우1) $1 \le a \le 2$: 이 경우 닫힌 구간 $[0,2]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(a)=\frac{1}{3}a^4$이고 최댓값은 $f(0)=a^2+\frac{1}{3}a^4$이므로, $f_1(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3} \le a^2+\frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4-4=(a^2+2)(a^2-2) \le 0$이므로 $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \le a^2+\frac{1}{3}a^4$를 풀면, $a^4+3a^2-4 \ge 0$이므로 $(a^2-1)(a^2+4) \ge 0$이 되어 $a \ge 1$ 또는 $a \le -1$을 얻는다. 이제 $1 \le a \le 2$임을 고려하면, $1 \le a \le \sqrt{2}$이어야 한다.

(경우2) $a \ge 2$: 이 경우 닫힌 구간 $[0,2]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=(2-a)^2+\frac{1}{3}a^4$이고 최댓값은 $f(0)=a^2+\frac{1}{3}a^4$이므로, $f_1(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $(2-a)^2+\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3} \le a^2+\frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $(2-a)^2+\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4+3a^2-12a+8=(a-1)(a^3+a^2+4a-8) \le 0$이 되는데, 주어진 조건 $a \ge 2$로부터 $a-1 \ge 1$이고,
$a^3+a^2+4a-8=a^3-8+a^2+4a=(a-2)(a^2+2a+4)+a(a+4) \ge 12$이므로, 이 경우에 부등식 $(2-a)^2+\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3}$를 만족하는 a는 존재하지 않는다. 따라서 (경우1)과 (경우2)를 종합적으로 고려하면, $f_1(a) \ge 1$이기 위한 a의 범위는 $1 \le a \le \sqrt{2}$임을 알 수 있다. 아래 그림은 각각 $a=1$인 경우와 $a=\sqrt{2}$인 경우의 그림이다.





채점기준

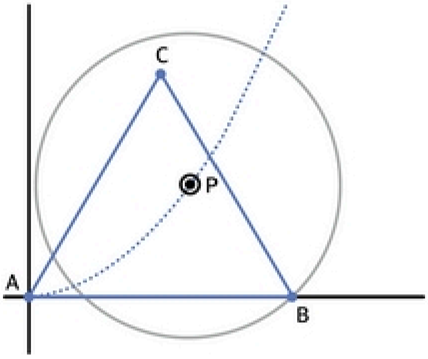
4점 원 C_a와 선분 AB의 교점이 생길 필요충분조건을 거리함수와 관련지어 설정한다.

6점 a의 범위를 두 가지 경우로 나누어, 거리함수와 관련지어 설정한 부등식을 해결한다.

문제 3 - ii

<예시답안>

[문제 3 -i]의 풀이로부터 $f_1(a) \geq 1$이기 위한 a의 범위는 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$이 됨을 알았다. $1 \leq a \leq \sqrt{2}$일 때, 닫힌 구간 $[0,2]$에서 이차함수 $f(x) = (x-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$의 그래프의 개형을 살펴보면, $y = f(x)$와 $y = \frac{4}{3}$의 교점이 2개가 되기 위한 필요충분조건은 $f(a) < \frac{4}{3} \leq f(2)$가 됨을 알 수 있다. 따라서 $f_1(a) = 2$일 필요충분조건은 $\frac{1}{3}a^4 < \frac{4}{3} \leq (2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$이 된다. 여기서 $\frac{1}{3}a^4 < \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4 - 4 = (a^2+2)(a^2-2) < 0$이므로 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \leq (2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$을 풀면, $a^4 + 3a^2 - 12a + 8 = (a-1)(a^3 + a^2 + 4a - 8) \geq 0$이 되는데, a의 범위인 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$를 감안하면, $a^3 + a^2 + 4a - 8 \geq 0$이 되어야 한다. 이제 함수 $k(a) = a^3 + a^2 + 4a - 8$이라고 두면, 이것의 도함수는 $3a^2 + 2a + 4$는 항상 양수이므로, 함수 $k(a)$는 증가함수가 됨을 알 수 있다. 또한 $k(1) = -2 < 0$이고 $k(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 6 > 0$이므로, $k(x) = 0$의 실근은 1과 $\sqrt{2}$ 사이에 딱 하나 존재함을 알 수 있다. 이 실근을 α라고 두면, $f_1(a) = 2$일 필요충분조건은 $a = 1$ 또는 $\alpha \leq a < \sqrt{2}$가 된다. 따라서 $f_1(a) = 2$인 1보다 큰 a의 값들 중에서 가장 작은 값을 m이라고 두면, $m = \alpha$가 되고, m이 만족하는 최고차항의 계수가 1인 정수계수 삼차다항식 중 하나는 $x^3 + x^2 + 4x - 8$임을 알 수 있다. 참고로 아래 그림은 $a = m$인 경우의 그림이다.



채점기준

5점 $f_1(a)=2$이기 위해 a가 만족해야되는 부등식을 올바로 구한다.

5점 a가 만족해야되는 부등식을 풀고, m이 만족하는 삼차다항식을 제대로 구한다.

문제 3 - iii

<예시답안>

선분 AC 위의 임의의 점을 $(x, \sqrt{3}x)$로 놓자. 여기서 $0 \le x \le 1$이다. 원 C_a와 선분 AC의 교점이 생길 필요충분조건은 두 점 $(x, \sqrt{3}x)$와 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이 되는 x가 0과 1 사이에 존재한다는 것이다. 두 점 $(x, \sqrt{3}x)$와 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$로 두면,

$g(x)=(x-a)^2+\left(\sqrt{3}x-\frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2=4\left(x-\frac{(a+a^2)}{4}\right)^2+\frac{1}{12}a^2(a-3)^2$이므로 $g(x)=\frac{4}{3}$가 되는 x를 닫힌 구간 $[0,1]$에서 찾도록 하자. $a \ge 1$이므로, $\frac{1}{2} \le \frac{a+a^2}{4}$이다. 또한 $\frac{a+a^2}{4}=1$이 되는 a는 $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$이므로, 다음 두 가지 경우로 나누어서 생각해보도록 하겠다.

(경우1) $1 \le a \le \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$: 이 경우 $\frac{1}{2} \le \frac{a+a^2}{4} \le 1$이므로, 닫힌 구간 $[0,1]$에서 $g(x)$의 최솟값은 $g\left(\frac{a+a^2}{4}\right)=\frac{1}{12}a^2(a-3)^2$이고 최댓값은 $g(0)=a^2+\frac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서, $f_2(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\frac{1}{12}a^2(a-3)^2 \le \frac{4}{3} \le a^2+\frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\frac{1}{12}a^2(a-3)^2 \le \frac{4}{3}$를 풀면,

$(a^2-3a+4)(a^2-3a-4)=(a^2-3a+4)(a+1)(a-4) \le 0$이고, a^2-3a+4는 항상 양수 값을 가지므로 $-1 \le a \le 4$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \le a^2+\frac{1}{3}a^4$를 풀면, $a^4+3a^2-4 \ge 0$이므로 $(a^2-1)(a^2+4) \ge 0$이 되어 $a \ge 1$ 또는 $a \le -1$을 얻는다. 따라서 $1 \le a \le \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$인 모든 a에 대하여 $f_2(a) \ge 1$임을 알 수 있다.

(경우2) $a \geq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$: 이 경우 $\frac{a+a^2}{4} \geq 1$이므로, 닫힌 구간 $[0,1]$에서 $g(x)$의 최솟값은

$g(1)=(1-a)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2$이고 최댓값은 $g(0)=a^2+\frac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서 이 경우에, $f_2(a) \geq 1$일

필요충분조건은 $(1-a)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 \leq \frac{4}{3} \leq a^2+\frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서

$(1-a)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 \leq \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4-3a^2-6a+8 \leq 0$이 되어

$(a-1)(a-2)(a^2+3a+4) \leq 0$이므로, $1 \leq a \leq 2$가 된다. 또한 $\frac{4}{3} \leq a^2+\frac{1}{3}a^4$를 풀면,

$a^4+3a^2-4 \geq 0$이므로 $(a^2-1)(a^2+4) \geq 0$이 되어 $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$을 얻는다. 이제

$a \geq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$임을 감안하면, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \leq a \leq 2$임을 알 수 있다.

이제 (경우1)과 (경우2)를 종합적으로 고려하면, $f_2(a) \geq 1$이기 위한 a의 범위는 $1 \leq a \leq 2$가 됨을 알 수 있다.

채점기준

4점 원 C_a와 선분 AC의 교점이 생길 필요충분조건을 거리함수와 관련지어 설정한다.

6점 a의 범위를 두 가지 경우로 나누어, 거리함수와 관련지어 설정한 부등식을 해결한다.

문제 3 - iv

<예시답안>

선분 BC 위의 임의의 점을 $(x, \sqrt{3}(2-x))$로 놓자. 여기서 $1 \le x \le 2$이다. 원 C_a와 선분 BC의 교점이 생길 필요충분조건은 두 점 $(x, \sqrt{3}(2-x))$와 $\left(a, \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리가 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이 되는 x가 1과 2 사이에 존재한다는 것이다. 두 점 $(x, \sqrt{3}(2-x))$와 $\left(a, \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리의 제곱을 이차함수 $h(x)$로 두자.

그러면, $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x) = (x-a)^2 + \left(\sqrt{3}(2-x) - \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 = 4\left(x - \frac{(a-a^2+6)}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}(a^2+3a-6)^2$$

이제 $h(x) = \dfrac{4}{3}$가 되는 x를 닫힌 구간 $[1,2]$에서 찾도록 하자. $a \ge 1$이므로, $\dfrac{a-a^2+6}{4} \le \dfrac{3}{2}$이다.

또한 $\dfrac{a-a^2+6}{4} = 1$이 되는 a는 2이므로, 다음 두 가지 경우로 나누어서 생각해보도록 하겠다.

(경우1) $1 \le a \le 2$: 이 경우 $1 \le \dfrac{a-a^2+6}{4} \le \dfrac{3}{2}$이므로, 닫힌 구간 $[1,2]$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h\left(\dfrac{a-a^2+6}{4}\right) = \dfrac{1}{12}(a^2+3a-6)^2$이고 최댓값은 $h(2) = (2-a)^2 + \dfrac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서, $f_3(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\dfrac{1}{12}(a^2+3a-6)^2 \le \dfrac{4}{3} \le (2-a)^2 + \dfrac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\dfrac{1}{12}(a^2+3a-6)^2 \le \dfrac{4}{3}$를 풀면, $(a^2+3a-10)(a^2+3a-2) = (a-2)(a+5)(a^2+3a-2) \le 0$이고, $1 \le a \le 2$에서 $(a+5)(a^2+3a-2)$는 항상 양수 값을 가지므로 $1 \le a \le 2$를 얻는다. 또한 $\dfrac{4}{3} \le (2-a)^2 + \dfrac{1}{3}a^4$을 풀면, [문제 3 -ii]의 풀이로부터 $a=1$ 또는 $a \ge m$임을 알 수 있다. 따라서 $f_3(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $a=1$ 또는 $m \le a \le 2$이 된다.

(경우2) $a \ge 2$: 이 경우 $\dfrac{a-a^2+6}{4} \le 1$이므로, 닫힌 구간 $[1,2]$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(1) = \dfrac{a^4}{3} - a^2 - 2a + 4$이고 최댓값은 $h(2) = (2-a)^2 + \dfrac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서, $f_3(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\dfrac{a^4}{3} - a^2 - 2a + 4 \le \dfrac{4}{3} \le (2-a)^2 + \dfrac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\dfrac{a^4}{3} - a^2 - 2a + 4 \le \dfrac{4}{3}$ 를 풀면, $a^4 - 3a^2 - 6a + 8 \le 0$이 되어 $(a-1)(a-2)(a^2+3a+4) \le 0$이므로, $1 \le a \le 2$가 된다. $a=2$인 경우에, $\dfrac{4}{3} \le (2-a)^2 + \dfrac{1}{3}a^4$도 만족되므로, 이 경우에 $a=2$만이 $f_3(a) \ge 1$이 된다.

이제 (경우1)과 (경우2)를 종합적으로 고려하면, $f_3(a) \ge 1$이기 위한 a의 범위는 $a=1$ 또는 $m \le a \le 2$가 된다.

채점기준

4점 원 C_a와 선분 BC의 교점이 생길 필요충분조건을 거리함수와 관련지어 설정한다.

6점 a의 범위를 두 가지 경우로 나누어, 거리함수와 관련지어 설정한 부등식을 해결한다.

[별해]

거리함수 대신에 중심에서 직선까지의 거리(점과 직선 사이의 거리 공식 활용)가 반지름의 길이보다 작거나 같다와 정삼각형 각 꼭짓점까지의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. $a=1$일 때는 중심의 좌표가 정삼각형의 무게중심, 즉 외심의 좌표와 같기 때문에 두 번째 문제를 제외하고 모두 $a=1$이 답에 포함됨을 알 수 있다. 원의 중심은 함수 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^2$의 그래프 위에서 움직이고 반지름의 길이는 일정하다. 그래서 **[문제 3 -i]**의 경우, 중심의 y좌표가 반지름의 길이보다 작거나 같아야하므로, 이로부터 $1\leq a\leq\sqrt{2}$가 나오고 해당 범위에서 원의 중심에서 x축에 내린 수선의 발이 점 B를 넘어서지 않기 때문에 위에서 구한 범위가 답이 된다. **[문제 3 -ii]**의 경우에는 중심에서 점 B까지의 거리가 반지름의 길이보다 크거나 같으면 되기 때문에, 이로부터 답을 구할 수 있다. 나머지 문제들도 비슷한 방법으로 해결이 가능하다.