TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(28번)

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f'(2x)\sin\pi x + x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx + \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

[2025학년도 9월 모의고사 28번]

TEAM 수리남's TIP

역함수의 정적분이 나왔을 때 원함수를 치환해서 푼다는 것만 알고 있으면 어렵지 않은 문항이다. 나머지는 정적분의 범위와 sin을 미분했을 때 cos이 나온다는 것을 이용해 부분적분만 해주면 끝!

해설) $\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx + \frac{1}{4}$ 에서

여기서 앞의 식을 $x = g(t)$로 치환해보자.

(이때, (가)조건에서 $g(0)=0,\ g(1)=1$이므로 $h(0)=0,\ h(1)=1$임을 알 수 있다.)

(좌변) = $g(1)-g(0)-\int_0^1 g(x)dx$임을 알 수 있다. 이때 $g(x)$대신 주어진 식을 대입해보면

(좌변) = $1-\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x + x\,dx = \frac{1}{2}-\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$임을 알 수 있다.

따라서 , $\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{12}$ 임을 알 수 있다.

이때, 문제에서 구하는 적분범위가 $0-2$이므로 $2x=t$로 치환하면

$\frac{1}{2}\int_0^2 f'(t)\sin\frac{\pi t}{2}\,dx = \frac{1}{12}$ 임을 알 수 있고, $\int_0^2 f'(t)\sin\frac{\pi t}{2}\,dx = \frac{1}{6}$ 임을 알 수 있다.

f를 적분하고, sin을 미분하는 부분적분을 해보면

$\left[f(t)\sin\frac{\pi t}{2}\right]_0^2 \ -\frac{\pi}{2}\int_0^2 f(t)\cos\frac{\pi t}{2}dt = \frac{1}{6}$이므로, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = -\frac{1}{3\pi}$임을 알 수 있다.

정답: ③

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(29번)

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔4점〕

[2025학년도 9월 모의고사 29번]

TEAM 수리남's TIP

S_n과 a_n사이의 관계는 다들 잘 알고 있을 것이다. 따라서 $a_1 = S_1$, $a_{10} = S_{10} - S_9$를 이용해 대입해서 계산하면 답이 나왔을 것이다. 또한 생소한 급수문항은 등비급수 또는 망원급수라는 생각을 갖고 풀면, 어렵지 않은 문항!

해설)

$$S_m=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(n+m+1)-n}{n(n+m+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)$$임을 알 수 있다.

따라서 $a_1=S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+10}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+10}-\frac{1}{n+11}\right)=\frac{1}{11}$$

(단, 무한급수끼리의 사칙연산은 급수의 기본성질에 의해 각각의 급수가 수렴해야만 위와 같이 합쳐서 계산할 수 있다는 것을 유의해야한다.)

따라서 $a_1+a_{10}=\frac{35}{22}$

정답: 57

TEAM 수리남‘s 9월 모의고사 주요문항 해설(30번)

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x) \geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.)〔4점〕

[2025학년도 9월 모의고사 30번]

TEAM 수리남's TIP

방정식과 부등식의 기본은 방/부등식에서 한 쪽은 곡선 한 쪽은 직선으로 만들어 곡선의 그래프와 직선의 그래프의 위치관계를 보는 것이 기본이다.

$F(x)-f(x)$의 그래프를 그릴 때 절댓값 기호 때문에 미분이 안 돼서 당황하지 말고, 범위를 나눠 그래프를 따로 그려주면 어렵지 않게 그래프를 그려낼 수 있을 것이다.

해설)

$F(x)-f(x) \geq 0$여야 하므로 $h(x)=F(x)-f(x)$의 그래프를 그려 x축과의 위치관계를 비교해보자.

$F(x)-f(x)$의 그래프를 미분하여, 증감을 조사하고 싶지만 절댓값 때문에 미분할 수 없으므로 $x=0$을 기준으로 그래프를 나눠서 생각하자.

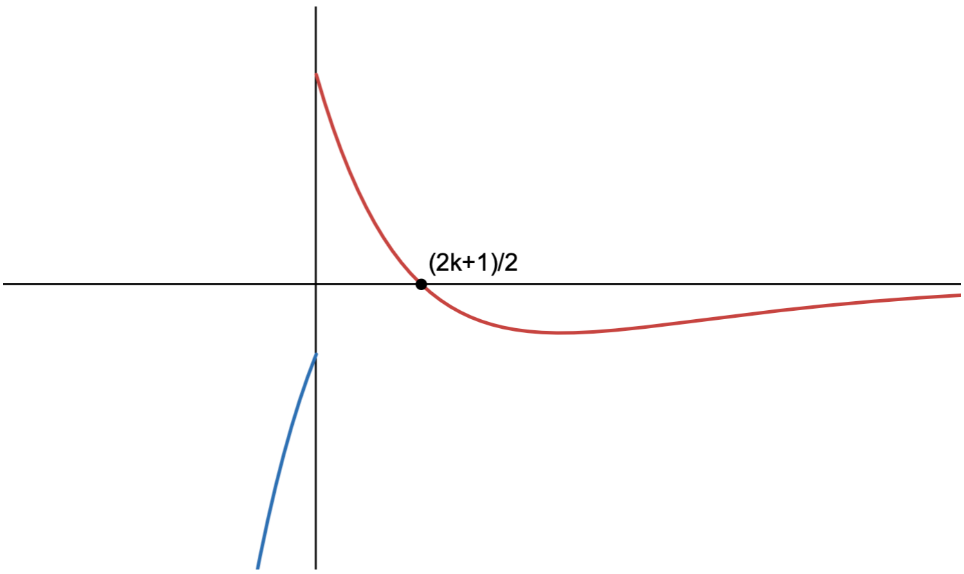
$$h(x)=\begin{cases} F(x)-(k+x)e^{-x} & (x<0) \\ F(x)-(k-x)e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$ 이다.

$$h'(x)=\begin{cases} f(x)-(1-k-x)e^{-x} & (x<0) \\ f(x)-(x-k-1)e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$이므로, $$h'(x)=\begin{cases} (2k-1+2x)e^{-x} & (x<0) \\ (2k+1-2x)e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$ 임을 알 수 있다.

이때, 부호변화가 생길 수 있는 지점의 후보 중, $x=-\frac{2k-1}{2}$, $x=\frac{2k+1}{2}$이 있는데, k가 $\frac{1}{2}$보다 크게 되면 $x=-\frac{2k-1}{2}<0$이므로 범위 안에 포함이 되어 부호변화가 생기고 k가 $\frac{1}{2}$보다 작으면 범위 안에 포함이 되지 않아, 부호 변화가 일어나지 않는다, 즉 k를 $\frac{1}{2}$을 기준으로 케이스를 나눠서 생각해야하는 문제이다.

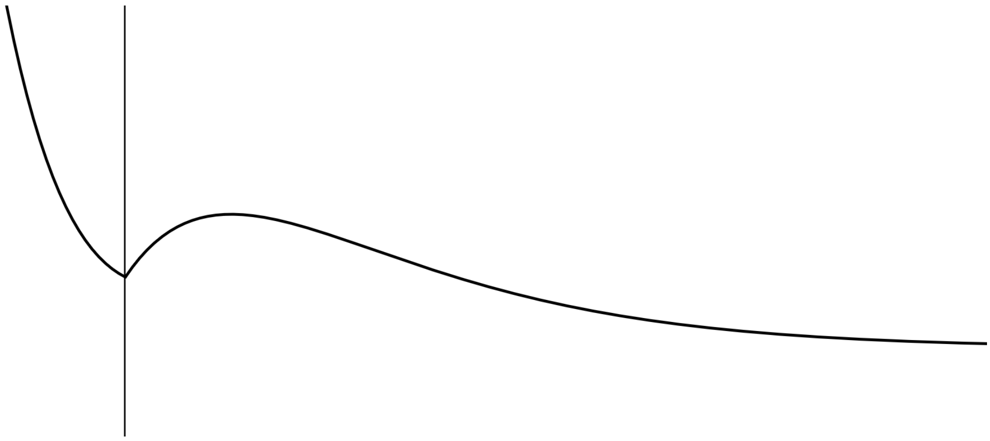
1) $k<\frac{1}{2}$인 경우(문제에서는 $k=\frac{1}{4}$)

$h'(x)$의 개형을 그려보면 아래와 같다. 이 부호변화를 통해 $h(x)$를 그려주기만 하면 된다.



이때, 증감을 대충 생각해보면 나머지 구간은 다 괜찮지만, $x=\frac{2k+1}{2}$이후로는 $h(x)$가 계속 감소하는데, 어떻게, x축 위에 $h(x)$가 존재할 수 있을까를 생각해봐야 한다. 어렵지 않게 점근선을 향해 감소한다는 것을 추론할 수 있고, 함수의 넓이가 적분한 함수의 함숫값과 관련이 있다는 것을 생각해보면, 무한대까지 넓이가 어딘가로 수렴하지 않을까? 라는 생각을 해볼 수 있다.

따라서 $h(x)$의 개형을 그려보면 다음과 같다.



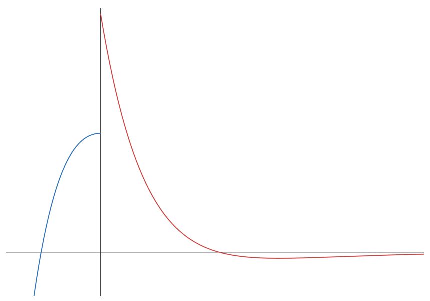
이때, $x=0$에서 극소를 갖게 되고, 점근선과 극솟값 중 어느 것이 더 밑에 있는지만 판단해주면 된다.
0에서의 함숫값은 $h(0)=F(0)-f(0)$이고

$h(x)-h(0)=\int_0^x h'(t)dt$이고 점근선의 값을 알아내는 것이 목적이므로 양변에 $\lim_{x\to\infty}$를 취해주면

$\lim_{x\to\infty}(h(x)-h(0))=\lim_{x\to\infty}\int_0^x(2k+1-2x)e^{-x}dx=\lim_{x\to\infty}\{(-2k+1)e^{-x}+2xe^{-x}+2k-1\}=2k-1$임을 알 수 있다.
(문제 조건에서 $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$)

$\lim_{x\to\infty}h(x)=h(0)-2k+1=F(0)-f(0)+2k-1=F(0)+k-1$이다. 즉 k가 $\frac{1}{4}$일 때는 점근선이 $F(0)-\frac{3}{4}$이므로 극솟값보다 아래에 있는 위의 그래프가 맞다는 것을 알 수 있고 x축이 이 점근선보다 아래에 있어야 하므로 $F(0)-\frac{3}{4}\geq 0$ 따라서 $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$이다.

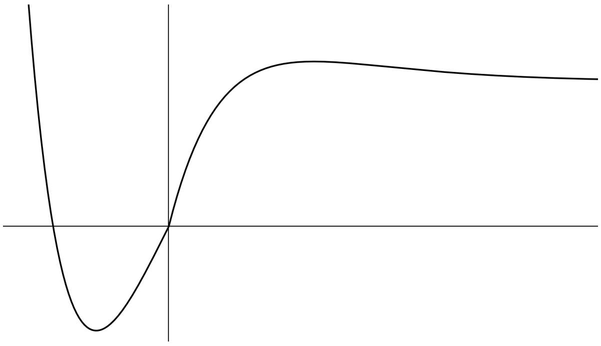
2) $k>\frac{1}{2}$인 경우(문제에서는 $k=\frac{3}{2}$)



$h'(x)$의 그래프가 위와 같이 그려진다는 것을 알 수 있고, $x=-\frac{2k-1}{2}$, $x=\frac{2k+1}{2}$에서 모두 부호변화가

생긴다는 것을 알 수 있다.

따라서 이를 바탕으로 $h(x)$의 그래프를 그려주자. 이번에는 점근선이 $y=F(0)+k-1$에서 k값이 $\frac{3}{2}$이므로 $F(0)$보다 위에 있다는 것을 알 수 있다.



따라서 이번엔 극솟값이 x축 위에 있어야 함을 알 수 있다.

극솟값은 $x=-\frac{2k-1}{2}$에서 가지므로 $h\left(-\frac{2k-1}{2}\right)-h(0)=\int_0^{-\frac{2k-1}{2}} h'(x)dx$로 계산하면 된다.

$k=\frac{3}{2}$대입해서 계산해주면, 극솟값$-\left(F(0)-\frac{3}{2}\right)=\int_0^{-1}(2+2x)e^{-x}dx$이므로,

극솟값=$F(0)-2e+\frac{5}{2}\geq 0$이므로 $g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{5}{2}$이다.

따라서, $g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}$

정답: 25