2025 BLANK 모의고사

[답지 : 해설]

● 수학영역 ●

수학 정답

1	③	2	②	3	⑤	4	④	5	②
6	②	7	③	8	①	9	⑤	10	②
11	③	12	⑤	13	①	14	②	15	④
16	8	17	11	18	13	19	2	20	7
21	106	22	24						

미적분

				23	③	24	④	25	①
26	⑤	27	②	28	④	29	90	30	4

01.

$\sqrt{24}\times\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{24}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=3$이다.

답: ③

02.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-x}{6}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{6\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{12x}=\frac{1}{3}$$

답: ②

03.

첫째항을 a, 공비를 r이라고 할 때 $(a>0,\ r>0)$

$\dfrac{a_2a_9}{a_3a_6}=r^2=9\ \Rightarrow\ r=3$

(계산할 때, **r의 차수를 더하고 뺀다**는 생각으로 구하면 편하다.
$2+9-3-6=2$ 또는 $1+8-2-5=2$와 같이 말이다.)

$a_1+a_4=a(1+r^3)=56\ \Rightarrow\ 28a=56\ \Rightarrow\ a=2$

따라서, $a_5=ar^4=162$

답: ⑤

04.

먼저, **모든 조건들이 $x=1$일 때를 기준**으로 서술되어 있으므로
주어진 식에 $x=1$을 대입하면 $g(1)=3f(1)$이다. ⋯ ㉠

이제 주어진 식의 **양변을 미분**해보자.
$g'(x)=(3x^2+1)f(x)+(x^3+x+1)f'(x)$

이제 $x=1$을 대입하면
$g'(1)=4f(1)+3f'(1)=4f(1)+3$이다. ⋯ ㉡ $(f'(1)=1)$

$g(1)=g'(1)$이므로, ㉠과 ㉡을 연립하면
$g(1)=3f(1)=4f(1)+3 \Rightarrow f(1)=-3$이다.

답: ④

05.

$\int_0^4 f(t)dt = k$라고 하자.

이 때, $f(x) = kx - 3$이고,

$\int_0^4 f(t)dt = \int_0^4 (kt-3)dt = \left[\frac{1}{2}kt^2 - 3t\right]_0^4 = 8k - 12 = k$

$\Rightarrow\ k = \frac{12}{7}$이다.

따라서, $f(7) = 7k - 3 = 9$이다.

답: ②

06.

$6\cos^2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+5 = -\sin\theta+5$

$\Rightarrow\ 6-6\sin^2\theta = -\sin\theta+5$

$\Rightarrow\ 6\sin^2\theta-\sin\theta-1=(3\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

$\Rightarrow\ \sin\theta = -\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{2}$

발문에 따르면 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로, $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이다.

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{1}{3},\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \Rightarrow\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

답: ②

07.

$f(x)$를 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}(12x^2+8ax+a^2)=\frac{1}{4}(6x+a)(2x+a)$이다.

즉, $f(x)$는 $x=-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{6}$에서 극값을 갖는다.

따라서, $x=1$에서 '극값'을 갖도록 하기 위한 a는 $-2,\ -6$이다.

$a<0$일 때, $-\frac{a}{6}<-\frac{a}{2}$이므로 (헷갈린다면, a에 -3 같은 아무 음수나 대입해보자.),

'극대'를 갖는 지점은 $x=-\frac{a}{6}$이다.

(**최고차항이 양수**인 삼차함수에서 **왼쪽 극점이 '극대'**고, **오른쪽 극점이 '극소'**기 때문이다.)

따라서, $x=1$에서 '극대'을 갖도록 하기 위한 a는 -6이다.

$\therefore\ f(2)=8+4a+\frac{1}{2}a^2+1=3$

답: ③

08.

STEP 1.

먼저 점 A, B의 x좌표를 살펴보면,

$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}x+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}x=0$을 만족하는 실근일 것이다.

따라서, 이를 $\sin x+\cos x=0$을 만족시키는 실근으로 **간추려서 표현**해보면,

각각 $-\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$이다.

STEP 2.

이제 점 A, B의 실제 위치를 구해보면,

$\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{\pi},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3\pi}{4}\times\frac{2}{\pi},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\right) \Rightarrow \mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$이다.

마침 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$으로 x축 위에 있으므로, 이 점을 M이라고 하면

삼각형의 넓이 공식을 통해 $\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAM}+\triangle\mathrm{OBM}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OM}}\times(1+1)=\frac{1}{2}$이다.

(신발끈 공식을 이용해 풀어도 좋다.)

답: ①

09.

STEP 1.

$v(t)=t^2+a(t)$, $a(t)=2t+k \Rightarrow v(t)=t^2+2t+k$

"그런데, 생각해보면 **가속도$(a(t))$는 속도$(v(t))$의 미분식**이다."

따라서, $v'(t)=a(t)=2t+2 \Rightarrow k=2$

STEP 2.

발문에 따르면 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 k이므로,

$x(t)=\int v(t)\,dt=\frac{1}{3}t^3+t^2+kt+k=\frac{1}{3}t^3+t^2+2t+2$

따라서, 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는 $x(2)=\frac{38}{3}$이다.

답: ⑤

| 무엇을 변별하였는가?

- **$v(t)$를 미분하면 $a(t)$가 된다**는 것을 이용하여 k의 값을 구할 수 있는가?

10.

STEP 1.

우선 주어진 조건 중, $S_2 = 0$임을 먼저 해석해보자.

$S_2 = a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$이다. ⋯ ㉠

다음은 조건 $S_4 - S_1 = a_4 + 4a_2$를 살펴보자.

$S_4 - S_1 = a_2 + a_3 + a_4$이므로, 조건과 연립하면

$a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + 4a_2 \Rightarrow a_3 = 3a_2$이다. ⋯ ㉡

이제 첫째항을 a라고 하면,

$a_2 = -a$ (㉠ 참고), $a_3 = -3a$ (㉡ 참고)이다.

STEP 2.

"이제, $a_1,\ a_2,\ a_3$**를 전부** a**에 대해 표현**할 수 있으니,

$a_2 a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에 $n = 1$을 대입하여 $a_1,\ a_2,\ a_3$**로 이루어진 관계식으로 만들면**,

이를 통해 a를 구할 수 있겠다."

대입해보면,

$(a_2)^2 = a_1 + a_3 \Rightarrow a^2 + 2a = 0$

$\therefore\ a = -2$ (발문에 따르면, 첫째항은 0이 아니기 때문이다.)

이제, 이를 다시 주어진 식에 대입해보면

$a_2 a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \Rightarrow 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$이므로,

등차중항의 원리에 의해 a_n**은 등차수열**이다.

(아니면, 직접 식을 $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$로 변형해봐도 된다.)

또한, $a_2 = -a_1 = 2$를 통해 **등차수열** a_n**은 첫째항이** -2**이고 공차가** 4**임**을 알 수 있다.

STEP 3.

따라서, S_9는 **등차수열의 합 공식**으로 풀면 될 것이다.

$\therefore S_9 = 9a_5 = 126$

답: ②

| 무엇을 변별하였는가?

- 조건들을 연립해서 $a_1,\ a_2,\ a_3$**을 전부** a**에 대해 표현**되도록 할 수 있는가?

- 주어진 식$(a_2 a_{n+1} = a_n + a_{n+2})$이 $a_1,\ a_2,\ a_3$으로만 구성되도록 $n=1$을 대입한 뒤, 이를 토대로 **첫째항**(a)**을 구할 수 있는가**?

- 식을 변형하거나, 등차중항의 원리를 사용하여 a_n**이 등차수열임을 파악**할 수 있는가?

11.

$SOL1)$ 정적분으로 계산하기

발문에 따르면 주어진 직선과 곡선으로 둘러싸인 **면적 A와 B의 넓이가 같으므로,**
이를 정적분의 관점에서 설명해보면 **두 면적이 서로 상쇄**된다, 즉 0부터 k까지의 정적분 값은 0이라고 할 수 있다.

이를 토대로 식을 세워보면,
$\int_0^k \left\{ \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \left(-\frac{1}{8}x + \frac{5}{8} \right) \right\} dx = 0$ 이다.

$\int_0^k \left\{ \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \left(-\frac{1}{8}x + \frac{5}{8} \right) \right\} dx = \frac{k}{16}(k^3 - 4k^2 + 9k - 10) = 0$이므로,
이후 **조립제법**을 통해 이를 만족하는 $k=2$임을 알 수 있다.

$SOL2)$ 삼차함수의 변곡점을 이용한 풀이

발문에 따르면 주어진 직선과 곡선으로 둘러싸인 **면적 A와 B의 넓이가 같고,**
주어진 곡선은 삼차함수로, **변곡점을 기준으로 대칭**이다.

"그림상 면적 A와 B가 어느정도 대칭관계를 이루는 것 같은데.. 만약 실제로 저 직선과 삼차함수 간의
교점이 변곡점이라면 문제가 정말 간단하게 풀릴텐데.. 한번 맞는지 살펴볼까?"

먼저 삼차함수 $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x$의 변곡점을 살펴보자.

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + 1 = \frac{3}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}$이므로, 변곡점은 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

이후, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$를 직선 $y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$에 대입해보면,
역시나 주어진 삼차함수와 직선 간의 **교점이 변곡점과 일치**하는 것을 알 수 있다.

그렇다면, 면적 A와 B가 서로 대칭관계를 이루기 위해서는, **변곡점의 x좌표가 $x=k$의 절반**이 되어야겠네.
변곡점은 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이므로, 이를 통해 $k=2$임을 바로 알 수 있다.

답: ③

| 무엇을 변별하였는가?

- 두 넓이가 같음을, ‘정적분 값이 0이 된다’로 해석하면 되는 기본적인 문항이다. (기출에 빈번히 출제되는 소재다.) 계산이 복잡하면 실수가 일어날 수 있으니 각별히 주의하자.

12.

(가) 함수 $\left|(x^n-32)f(x)\right|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

STEP 1.

“n이 **홀수냐 짝수냐**에 따라 x^n-32가 가지는 실근의 개수가 달라지겠군.”

먼저 $n=1$일 때, $\left|(x^1-32)f(x)\right|$가 미분가능하기 위해서는
$f(x)$가 $x=32$에서 실근을 가져, 결과적으로 $(x^1-32)f(x)$가 중근을 갖도록 하면 된다.

“그런데, $f(x)$는 이차함수이므로 $x=32$ **외에도 또다른 실근**이 있거나, $x=32$**에서 중근**을 가져야 할텐데...“

”만약 $f(x)$가 또다른 실근을 갖는다면, 결과적으로 $\left|(x^1-32)f(x)\right|$는 **그 실근에서 미분불가능할 것이다**.“

따라서, $f(x)$는 이때 $x=32$**에서 중근**을 가져야한다. $f(x)=(x-32)^2$이다.

$n=2$일 때, $\left|(x^2-32)f(x)\right|$에서 x^2-32가 2개의 실근$(x=\pm4\sqrt{2})$을 가지므로,
$f(x)$도 $x=\pm4\sqrt{2}$에서 각각 실근을 가져야만 $(x^2-32)f(x)$가 $x=\pm4\sqrt{2}$에서 전부 중근을 갖게 되어
미분가능할 수 있게 된다.

따라서, 이때 $f(x)=x^2-32$이다.

현재까지의 정보를 조합해보면, 핵심은 x^n-32가 가지는 모든 실근을 $f(x)$에서도 똑같이 가져,
결과적으로 $(x^n-32)f(x)$이 오로지 중근만을 갖도록 하는 것이다.

STEP 2.

i) n이 홀수라면, 앞서 $n=1$일 때 살펴봤듯 $f(x)$가 $x=32^{\frac{1}{n}}$에서 중근을 가져야하므로,
$f(x)=\left(x-32^{\frac{1}{n}}\right)^2$ 이다.

(나)에 따르면 $f(0)=32^{\frac{2}{n}}=2^{\frac{10}{n}}$ 이 정수가 되어야하므로, $n=1,5$일 때 성립한다. (10의 약수 중 홀수)

ii) n이 짝수라면, 앞서 $n=2$일 때 살펴봤듯 $f(x)$가 $x=\pm32^{\frac{1}{n}}$에서 실근을 가져야하므로,
$f(x)=\left(x-32^{\frac{1}{n}}\right)\left(x+32^{\frac{1}{n}}\right)=x^2-32^{\frac{2}{n}}$ 이다.

마찬가지로 $f(0)=-32^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{10}{n}}$가 정수가 되어야하므로, $n=2,\ 10$일 때 성립한다. (10의 약수 중 짝수)

따라서, 가능한 모든 n을 살펴보면 $n=1,\ 2,\ 5,\ 10$이다.
$\therefore\ \ 1+2+5+10=18$

답: ⑤

❙ 무엇을 변별하였는가?

- $\left|(x^n-32)f(x)\right|$가 미분가능하도록 하는 $f(x)$가 가져야 할 실근을 n이 홀수, 짝수인지에 따라 나눠 각각 파악할 수 있는가?

- $f(0)$이 정수라는 조건을 통해 n의 값을 구할 수 있는가?

13.

STEP 1.
우선 $g'(k)=8$을 풀어보자.

$g'(k)=f'(0)=8$

발문에 따르면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,
$x=k$에서의 연속성과 미분가능성을 살펴보면

1) $f(0)=f(k)$ $\cdots$ ㉠
2) $f'(0)=f'(k)=8$이다.

이를 식으로 정리하면 다음과 같다.
$f'(x)=3x(x-k)+8=3x^2-3kx+8$,
$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}kx^2+8x+C$

또한, ㉠에 의해 $f(0)=f(k) \Rightarrow C=-\dfrac{1}{2}k^3+8k+C \Rightarrow k=\pm 4$이다. $(k\neq 0)$

STEP 2.
이제, $g(x)$가 **<u>실수 전체의 집합에서 증가하는지의 여부</u>**를 통해
k가 4인지, -4인지 살펴보자.

$g(x)$를 살펴보면,
왼쪽구간$(x\leq k)$에서는 $f(-\infty)$에서부터 $f(0)$까지,
오른쪽구간$(x>k)$에서는 $f(k)$에서부터 $f(\infty)$까지 표현되어있다. $\cdots$ ㉡

그런데, $f'(x)$에 대해 판별식을 써보면 $D/4=\left(\dfrac{3}{2}k\right)^2-24=12>0$이므로,
$f(x)$에는 **<u>반드시 감소구간이 포함</u>**되어있다.

만약 $k=-4$라면, ㉡에서 $g(x)$가 각각 $f(-\infty)$부터 $f(0)$까지, $f(-4)$에서부터 $f(\infty)$까지 표현되어있으므로,
결과적으로 그 속에 반드시 감소구간이 존재할 수 밖에 없다.

따라서, $k=4$이다.

($k=4$일 경우, ㉡에서 $g(x)$가 각각 $f(-\infty)$부터 $f(0)$까지, $f(4)$에서부터 $f(\infty)$까지 표현되어있으므로,
$f(x)$의 감소구간이 닫힌구간 $[0,\ 4]$ 속에 포함되어 있다면, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가할 수 있다.)

따라서 $f'(x)=3x(x-4)+8$이고, $g'(x)=f'(x-4)$ $(x\leq 4)$이다.

$\therefore\ g'(1)=f'(-3)=71$

답: ①

❙ 무엇을 변별하였는가?

- 구간의 경계$(x=k)$에서 **연속성과 미분가능성**을 확인하는 과정을 통해, 두 식을 세우고 연립하여 가능한 k값의 후보군을 구할 수 있는가?

- **실수 전체의 집합에서 증가**해야한다는 조건을 통해, k의 값을 확정할 수 있는가?

14.

$SOL1)$ 사인 / 코사인법칙을 이용한 풀이

STEP 1.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$와 $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 길이가 전부 주어져 있고, 두 삼각형의 넓이비 또한 주어져 있다.

"그렇다면, 이제 두 삼각형의 넓이를 각각 식으로 표현하기 위해 **사인법칙을 사용**해보자."

$\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$라고 할 때,

$\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 넓이는 각각

1) $\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\sin\alpha \times 3 \times 3\sqrt{2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

2) $\triangle ACD = \dfrac{1}{2}\sin\beta \times 5 \times \sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\sin\beta$

으로 표현할 수 있다.

STEP 2.

두 넓이비가 $3 : \sqrt{2}$이므로, 이를 통해 **$\sin\alpha$와 $\sin\beta$의 비율**을 알 수 있다.

$\triangle ABC : \triangle ACD = 3 : \sqrt{2}$

$\Rightarrow\ 3\triangle ACD = \sqrt{2}\triangle ABC$

$\Rightarrow\ \dfrac{15\sqrt{2}}{2}\sin\beta = 9\sin\alpha$

$\Rightarrow\ \sin\beta = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}\sin\alpha\ \cdots$ ㉠

STEP 3.

이제, **두 삼각형이 변 $\overline{AC}$를 공유**하고 있다는 점을 이용해(코사인법칙), $\sin\alpha$와 $\sin\beta$의 값을 구해보자.

$2\cos\alpha \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$

$2\cos\beta \times \overline{DA} \times \overline{CD} = \overline{DA}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2$

$18\sqrt{2}\cos\alpha = 27 - \overline{AC}^2$

$10\sqrt{2}\cos\beta = 27 - \overline{AC}^2$

$\Rightarrow\ 9\cos\alpha = 5\cos\beta$

$\Rightarrow\ 9\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 5\sqrt{1-\sin^2\beta}$

$\Rightarrow\ 9\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 5\sqrt{1-\dfrac{18}{25}\sin^2\alpha}$ (㉠ 대입)

$\Rightarrow\ 81-81\sin^2\alpha=25-18\sin^2\alpha$

$\Rightarrow\ \sin^2\alpha=\dfrac{8}{9}$

$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ \sin\beta=\dfrac{4}{5}$

이제 사각형 ABCD의 넓이를 식으로 표현해보면,

$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\sin\alpha\times3\times3\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\sin\beta\times5\times\sqrt{2}$

$=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\sin\beta=6+2\sqrt{2}$

$SOL2)$ 삼각형의 높이를 이용한 풀이

STEP 1.

$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{DA}}$의 길이가 전부 주어져 있고, 두 삼각형의 넓이비 또한 주어져 있다.

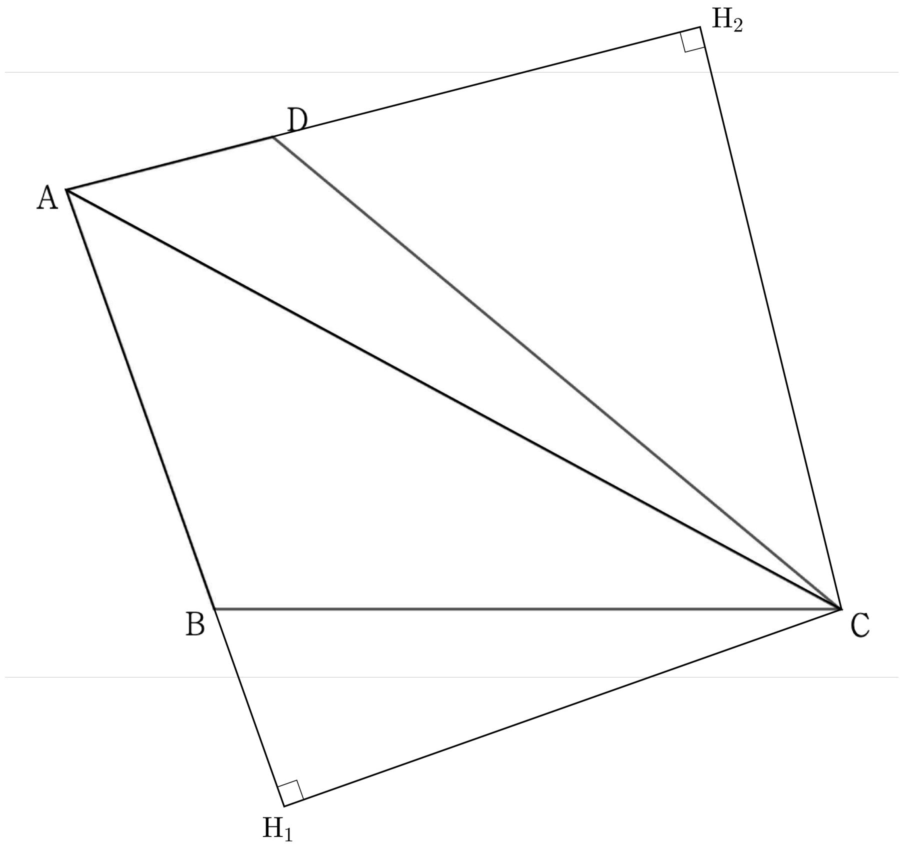
"그렇다면, 이제 두 삼각형의 넓이를 각각 식으로 표현해야 하는데..
여기서 **물론 사인 / 코사인법칙을 사용해도 되겠지만**, 주어진 변의 길이에서 익숙한 숫자가 보인다."

바로 $\overline{\mathrm{AB}}=3$과 $\overline{\mathrm{DA}}=\sqrt{2}$이다.

STEP 2.

그렇다면, 삼각형의 넓이를 **높이를 이용해 표현**하는 것이 더 합리적이겠다.

점 C에서 직선 AB에 그은 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$, 점 C에서 직선 DA에 그은 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라고 하자.



$\triangle$ABC와 $\triangle$ACD의 넓이는 각각

1) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH_1} = \frac{1}{2}\overline{CH_1} \times 3$

2) $\triangle ACD = \frac{1}{2} \times \overline{DA} \times \overline{CH_2} = \frac{1}{2}\overline{CH_2} \times \sqrt{2}$

으로 표현할 수 있다.

두 넓이비가 $3 : \sqrt{2}$이므로, 이를 통해 $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$임을 알 수 있다.

STEP 3.

$\overline{CH_1} = \overline{CH_2} = h$라고 한다면, 이제 h만 구하면 된다.

단순하게, 한번 $\overline{BH_1} = a$, $\overline{DH_2} = b$라고 해보자.

1) 이때, 먼저 $a^2 + h^2 = \overline{BC}^2 = 18$, $b^2 + h^2 = \overline{CD}^2 = 25$이다. 또한, $b^2 - a^2 = 7$이다. ⋯ ㉠

2) 이제, 두 삼각형 $\triangle AH_1C$, $\triangle AH_2C$를 살펴보자.

변 $\overline{AC}$를 공유하고 있고, $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$이고, 둘 다 직각삼각형으로, **두 삼각형 $\triangle AH_1C$, $\triangle AH_2C$는 합동**이다.

따라서, $\overline{\mathrm{AH_1}} = \overline{\mathrm{AH_2}} \Rightarrow 3+a=\sqrt{2}+b \Rightarrow b-a=3-\sqrt{2}$인 것이다. $\cdots$ ㉡

㉠을 변형하면 $b^2-a^2=(b+a)(b-a)=7=(3-\sqrt{2})(b+a) \Rightarrow b+a=3+\sqrt{2}$ $\cdots$ ㉢

이제, ㉡과 ㉢을 연립하면
$a=\sqrt{2}$, $b=3$임을 알 수 있다.

또한, $a^2+h^2=18$임을 이용해 $h=4$임을 알 수 있다.

이제 사각형 ABCD의 넓이를 식으로 표현해보면,
$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})h=6+2\sqrt{2}$

답: ④

| 무엇을 변별하였는가?

- **수선의 발**$(\mathrm{H_1},\ \mathrm{H_2})$을 긋고, **높이를 이용해 삼각형의 넓이를 표현**한 뒤, 이를 넓이비 조건에 대입해 두 삼각형의 높이가 같음을 구할 수 있는가?

- **두 삼각형 $\triangle\mathrm{AH_1C}$, $\triangle\mathrm{AH_2C}$가 합동임**을 알고, 이를 이용하여 식을 세울 수 있는가?

15.

STEP 1.

삼차함수에서 서로 수직인 두 접선이 있다는 뜻은, 일단 **감소하는 구간이 있다**는 뜻이다.

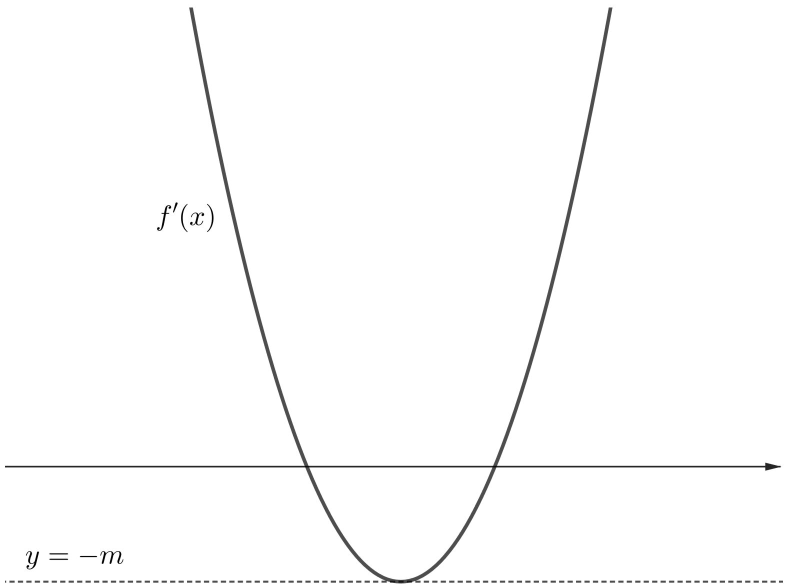
이를 통해 삼차함수의 개형을 어느정도 생각해볼 수 있다.

또한 **감소구간은 변곡점에서 가장 가파르게 감소**하고, 이 때의 기울기만이 '유일'하다.
('유일'하다는 것은, 동일한 접선의 기울기를 가지는 다른 지점이 없다는 뜻이다.)

이를 바탕으로 $g(t)$를 구해보자.

STEP 2.

변곡점에서 $f(x)$의 접선의 기울기가 $-m$이라고 해보자.



$i)$ $-m \le f'(t) < 0$일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$의 범의는 $\dfrac{1}{m} < f'(s) < \infty$으로 $g(t)=2$이다.

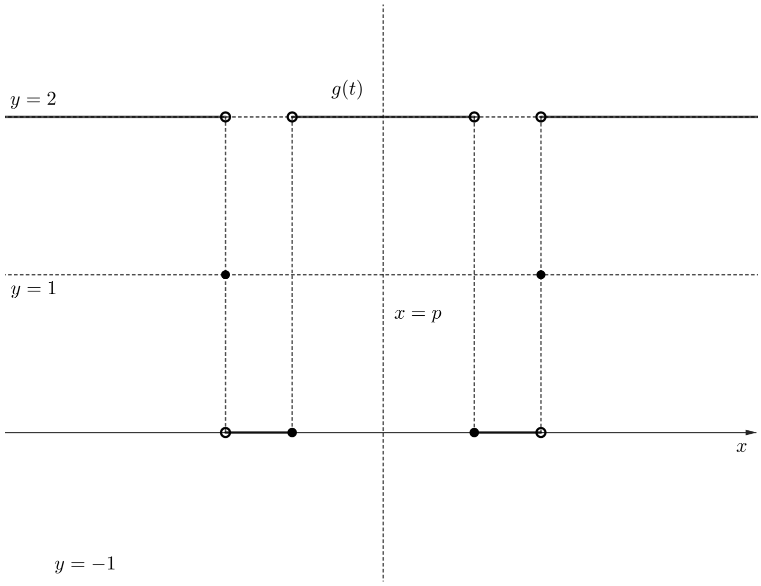
$ii)$ $f'(t)=0$일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$는 존재할 수가 없으므로 $g(t)=0$이다. $\cdots$ ㉠
(대응하는 접선이 존재하기 위해서는 접선이 y축과 평행해야 하는데, 이는 불가능하다.)

$iii)$ $0 < f'(t) < \dfrac{1}{m}$일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$의 범의는 $-\infty < f'(s) < -m$으로 존재하지 않으므로, $g(t)=0$이다.

$iv)$ $f'(t)=\dfrac{1}{m}$일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$는 $f'(s)=-m$이므로 $g(t)=1$이다.
(변곡점에서 접선의 기울기는 '유일'하기 때문이다.)

$v)$ $f'(t)>\dfrac{1}{m}$라면, 이에 대응하는 $f'(s)$의 범의는 $-m<f'(s)<0$으로 $g(t)=2$이다. ⋯ ㉡

그래프를 그려보면 다음과 같다.



STEP 3.
"이제 위 그래프를 이용해 $f'(t)=g(t)$의 실근의 개수가 6이 되도록 해보자."

삼차함수의 변곡점의 x좌표를 p라 하면,
$f'(x)$ 또한 $x=p$를 기준으로 선대칭이다.

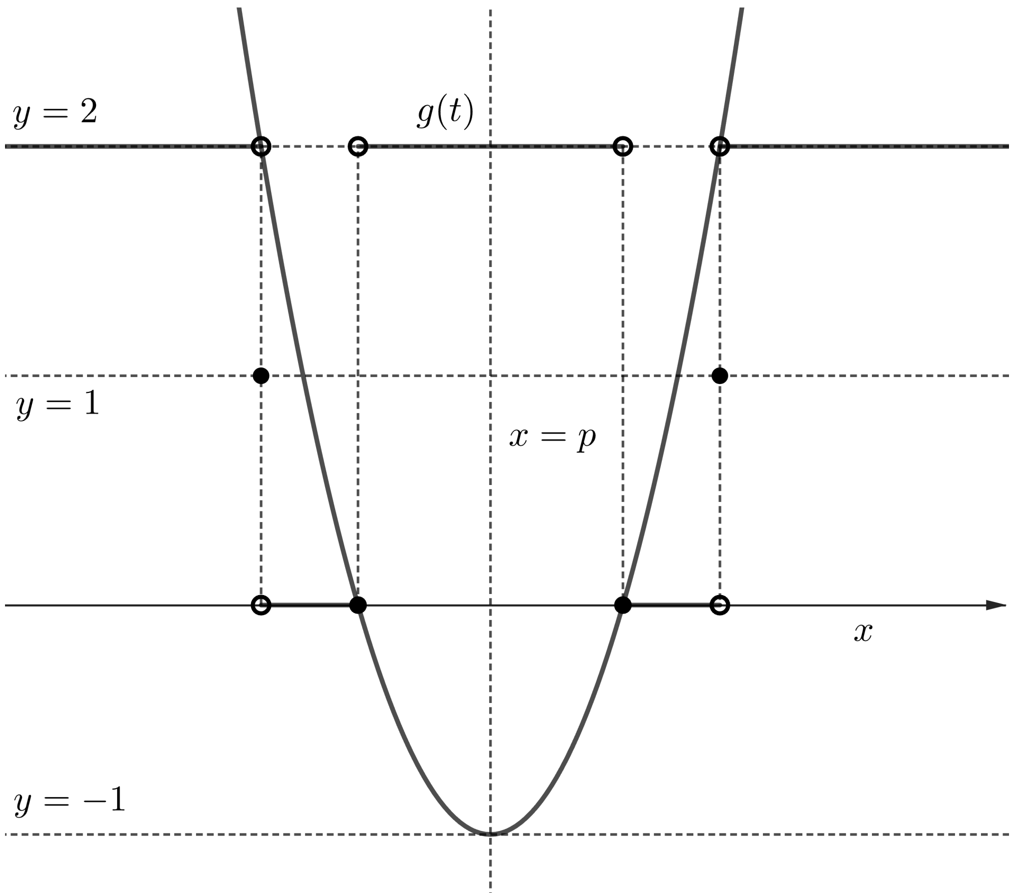
이때 $f'(t)=g(t)$의 실근의 개수가 6이라는 것은,
대칭축을 기준으로 **왼쪽 구간에 3개의 실근**($f'(t)=g(t)$)이 있다는 것과 같다.

㉠을 살펴보면 $f'(t)=0$일 때 $g(t)=0$이므로 이 지점에서는 무조건 근을 가질 것이고,

왼쪽 구간에서 3개의 근을 갖기 위해서는 $g(t)=1$일 때 $f'(t)=1$이 되면 된다.
(즉, $f'(t)=1$과 **수직을 이루는 접선이 변곡점에서의 접선**이면 된다.)

이 때 $f'(t)=1 \Rightarrow f'(s)=-1$이므로, 변곡점에서 접선의 기울기가 -1이 되어야한다.
(즉, 앞서 변곡점에서 접선의 기울기를 $-m$으로 설정했으므로, $m=1$이다.) ⋯ ㉢

따라서 삼차함수를 다음과 같이 설정할 수 있다.
$f(x)=(x-p)^3-(x-p)+k$



STEP 4.

이제 남은 조건 중 일부인 $f(0)=f(2)$를 세웠던 식에 대입하면,

$-p^3+p+k=(2-p)^3-(2-p)+k \Rightarrow p=1$이다.

"마지막으로 p가 결정되었으니, 남은 미지수는 k 뿐이다.
이는 남은 조건인 $f(0)=f(2)=g(0)+g(2) \Rightarrow k=g(0)+g(2)$를 통해 구할 수 있겠다."

$f'(x)=3(x-1)^2-(x-1)$이므로, $f'(0)=f'(2)=2$이고,

㉡, ㉢에 따라 $f'(0)=f'(2)=2 \Rightarrow g(0)=g(2)=2$이므로,

$k=g(0)+g(2) \Rightarrow k=4$이다.

이에 따라

$f(x)=(x-1)^3-(x-1)+4$이므로,

$f(6)=125-5+4=124$

답: ④

| 무엇을 변별하였는가?

- $f'(t)$에서 t에 따라 대응하는 $f'(s)$의 값이 $f'(x)$의 **치역** $[-m,\ \infty)$ **속에 포함**되어 있는지, **변곡점에서의 접선의 기울기와 같은지** 등을 기준으로 $g(t)$**의 개형을 파악**할 수 있는가?

- $g(t)$의 개형을 그린 후, $f'(t)$와 $g(t)$의 교점이 6개가 되기 위해서는 $f'(t)=1$**일 때** $g(t)=1$**이 되어야 함**을 직관적으로 파악할 수 있는가?

- 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 변곡점에서 접선의 기울기가 -1이 되어야 함을 이용하여 $f(x)$**를** x^3-x**의 평행이동식**으로 표현할 수 있는가?

16.

"지수 / 로그 계산 문제다. 진수조건 먼저 써놓고, 밑을 통일시키자."

$$\log_3(x-3)=\log_9(4x-7)=\frac{1}{2}\log_3(4x-7)=\log_3\sqrt{4x-7}\quad(x>3)$$

$$x-3=\sqrt{4x-7}\ \Rightarrow\ (x-3)^2=4x-7$$
$$\Rightarrow\ (x-8)(x-2)=0$$

$$\therefore\ x=8\quad(x>3)$$

답: 8

17.

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$\therefore\ f'(0) = 11$

답: 11

18.

$\sum_{n=1}^{9} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{9} b_n = B$라 하자.

이때,
1) $A+2B=24$ $\cdots$ ㉠
2) $4A-B=15$ $\cdots$ ㉡
이므로,

두 식을 연립해보자. (A, B를 각각 구해도 되고, ㉠ $-$ ㉡ $=3(B-A)$임을 이용해 바로 답을 구해도 좋다.)

$$3(B-A)=9 \Rightarrow \sum_{n=1}^{9} b_n - \sum_{n=1}^{9} a_n = 3$$

발문에 따르면 $b_{10}-a_{10}=10$이므로,
$\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{9}(b_n-a_n)+b_{10}-a_{10}=13$이다.

답: 13

19.

$x < a$ 구간에서 $\dfrac{2}{x-3}$이 연속이 되기 위해선 $a \le 3$이어야한다. $\cdots$ ㉠

또한 구간의 경계$(x=a)$에서 연속이 되어야 하므로,

$\dfrac{2}{a-3} = a-4 \;\Rightarrow\; (a-3)(a-4)=2$

$\Rightarrow\; a^2-7a+10=0$

$\therefore\; a=2,\ 5$

㉠을 고려하면, $a=2$이다.

답: 2

20.

a, b는 전부 자연수다. 자연수 조건은 일단 체크해 놓자.
문제에서 핵심으로 준 조건은 $y = f(x)$가 **모든 사분면을 지난다**는 조건이다.

STEP 1.
일단, 상황에 따라 $f(x)$가 몇몇 사분면을 지날지 따져 보자.

$a - 16 \times 2^{x-b}$는 $x \to \infty$에서 음의 무한으로 발산하므로 **무조건 4사분면을 지난다**.
$a - \log_2(8b - 8x)$는 $x \to -\infty$에서 음의 무한으로 발산하므로 **무조건 3사분면을 지난다**.

그렇다면, $1, 2$사분면에 초점을 두고 문제를 풀어보자.

STEP 2.
구간의 경계($x = b-2$)를 살펴보면 연속이고, 이때 최댓값 $a-4$를 갖는다.

여기서 최댓값 $a-4$가 양수라면 $f(x)$는 $1, 2$사분면 중 적어도 하나를 지날 것이고,
만약 $x=0$에서 함숫값이 양수라면 $f(x)$는 확정적으로 $1, 2$사분면을 지날 것이다.

$b-2$의 값에 따라 $x=0$가 왼쪽 구간($x \le b-2$)에 포함되어 있을지 오른쪽 구간($x > b-2$)에 포함되어 있을지가 결정되므로, 이를 기준으로 경우를 나누어 따져 보자.

i) $b=1$일 때,
$f(0) = a - 16 \times 2^{-b} = a - 8 > 0 \Rightarrow a > 8$

$(a,\ b)$로 가능한 값 중 $a+b$가 최소인 경우는 $(9,\ 1)$이다. (a가 최소)

ii) $b \ge 2$일 때,
$f(0) = a - \log_2 8b = a - 3 - \log_2 b > 0 \Rightarrow a > 3 + \log_2 b$

$(a,\ b)$로 가능한 값 중 $a+b$가 최소인 경우는 $(5,\ 2)$이다.
(b가 커질수록 가능한 a의 최솟값도 같이 커지므로, a, b가 모두 최소)

두 가지 경우 중, $a+b$가 최소인 경우는 $(5,\ 2)$이고,
이 때 $a+b=7$이다.

답: 7

❙ 무엇을 변별하였는가?

- $f(x)$가 연속함수임을 알고, $f(0)$이 양수가 되어야 $f(x)$가 $1,\ 2$사분면을 모두 지날 수 있음을 파악할 수 있는가?

21.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{g(x)h(x)\}^2}{\{F(x)\}^2}=9$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $G(x)-H(x)=2x$이다.

STEP 1.

“우선 (가)에서 **극한식이 수렴한다**는 점을 이용하여, **다항식의 차수를 추론**할 수 있겠다.”

$f(x)$의 차수를 a, $g(x)$의 차수를 b, $h(x)$의 차수를 c라고 하자.
이 때, $F(x)$의 차수는 $a+1$일 것이다.

따라서, (가)의 극한식이 수렴한다는 것을 이용하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{g(x)h(x)\}^2}{\{F(x)\}^2}=9 \Rightarrow a+2(b+c)=2(a+1)$이라고 할 수 있다.

$\therefore\ a+2(b+c)=2(a+1) \Rightarrow a=2b+2c-2 \ \cdots$ ㉠

STEP 2.

“이제, $f(x)=x^a+\cdots$라고 한다면 $F(x)=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+\cdots$이므로,

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 최고차항의 계수가 전부 1이고 $F(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{a+1}$임을 이용하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{g(x)h(x)\}^2}{\{F(x)\}^2}=\frac{1\times(1\times1)^2}{\left(\frac{1}{a+1}\right)^2}=(a+1)^2=9 \Rightarrow a=2$임을 알 수 있다.

따라서, $f(x)$는 이차함수$(a=2)$이다.

STEP 3.

“다음으로 (나)를 살펴보자. $g(x)$와 $h(x)$가 다항함수라고 하였으므로,
$G(x)$와 $H(x)$는 적어도 **이차함수 이상의 차수**를 가지고 있을 것이다.”

“그런데 $G(x)-H(x)=2x$이므로,
이를 통해 **$G(x)$와 $H(x)$는 차수가 같다**$(b=c)$는 것을 알 수 있다.”

㉠을 다시 살펴보면, ($a=2$, $b=c$ 대입)
$a=2b+2c-2 \Rightarrow b=c=1$임을 알 수 있다.

따라서, $g(x)$, $h(x)$는 전부 일차함수$(b=c=1)$이다.

STEP 4.
“결국 우리는 $g(h(100))$을 구해야하니, 이제 $g(x)$와 $h(x)$의 식을 구해보자.”

$g(x)=x+p$, $h(x)=x+q$라고 하자.

이 때, $G(x)=\frac{1}{2}x^2+px+C_1$, $H(x)=\frac{1}{2}x^2+qx+C_2$이다.

이를 (나)에 대입해보면,
$G(x)-H(x)=(p-q)x=2x$
$\Rightarrow$ $p-q=2$이다.

또한, $g(h(0))=g(q)=p+q=6$
$\Rightarrow$ $p+q=6$이다.

두 식을 연립하면, $p=4$, $q=2$이다.

따라서, $g(h(100))=100+p+q=106$이다.

답: 106

| 무엇을 변별하였는가?

- 조건 (가)를 통해 다항식의 차수를 추론할 수 있는가?
  (여기서, 다항식의 차수를 미지수로 설정하는 것이 가장 편하다.)

22.

a_1은 정수이고, a_n의 범위에 따라 점화식이 주어져 있다.

그리고, $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}|$가 최댓값을 갖도록 하는 '$x$축 위의 점 P'가 존재한다는 조건을 걸고 있다.

언뜻 보면 해석이 잘 안 되는 조건이다. 문제에서 직관적으로 조건을 파악할 수 없을 때에는, 역시 대입해보면서 상황을 파악해야 한다. 결국 **이 조건을 어떻게든 해석하면 문제가 풀릴 것이란 확신**을 갖고 있어야 한다.

STEP 1.

a_n으로 가능한 정수들을 넣어보면서 무슨 소리인지 파악해 보자.

점화식의 윗쪽 부분($a_{n+1}=2+a_n$)을 살펴보면, 1보다 작은 경우에는 2씩 증가할 것이다.

i) 짝수 상태로 밑에서부터 올라올 경우, $\cdots\ -2 \to 0 \to 2 \to 2 \to 2\ \cdots$와 같이 2가 반복된다. … ㉠

ii) 홀수 상태로 밑에서부터 올라올 경우, $\cdots\ -3 \to -1 \to 1 \to 4 \to -2 \to 0 \to 2\ \cdots$와 같이 2가 반복된다. … ㉡

이 외에도 위에서부터 아래로 내려오는 경우($a_{n+1}=6-2a_n$)도 살펴보자.

그런데, 귀납적으로 일일이 따져볼 것 없이, a_1이 3보다 크면 결국 $a_2 \le 0$인 짝수가 되어 ㉠의 절차를 밟게 될 것이고,

$a_1=1,\ 2$일 때에도 무난하게 ㉠ 또는 ㉡의 절차를 똑같이 밟게 될 것이다.

결국 **첫째항과는 무관하게 언젠가는 2가 무한반복**하게 된다.

(또한, 여기서 첫째항을 제외한 나머지 항들이 **5 이상의 값을 가질 수 없다**는 사실까지 알아놓으면 좋다.) … ㉢

STEP 2.

이제 수열의 대략적인 추이는 파악했으나,

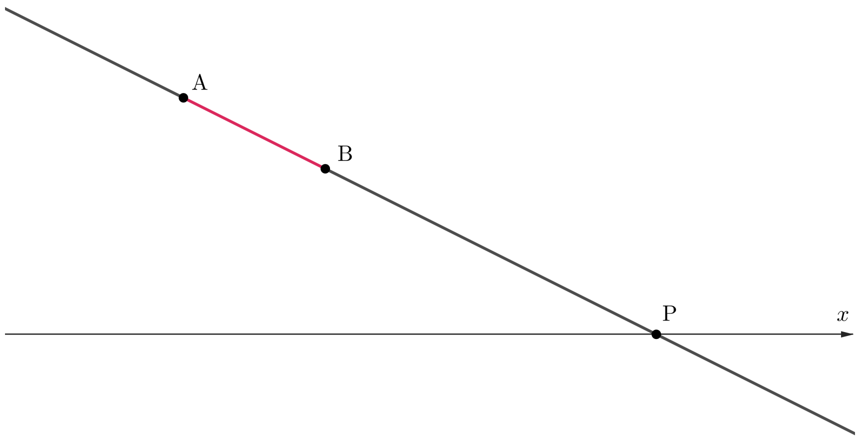
아직 우리는 $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}|$가 최댓값을 갖도록 하는 점 P가 존재한다는 조건이 무엇인지 해석하지 못했다.

일단 귀납적으로 점 P를 **아무 위치에 찍어보면서**, $\overline{\mathrm{AP}}$와 $\overline{\mathrm{BP}}$의 추이를 계속 살펴보자.

그러다보면, 결국 **직선 AB 위에, 그러나 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 밖에 점 P가 존재**할 때,

$|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}|$가 최댓값을 가질 것이다.

(이 때, $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}| = \overline{\mathrm{AB}}$이다.)



STEP 3.

그렇다면, 대부분의 경우 점 A나 B가 아닌 x축 위에 점 P가 존재할 수 있을 것이고,
우리는 **그러한 점 P가 존재할 수 없는 경우**를 살펴보는 것이 더 빠를 것이다.

(대부분의 경우 **직선 AB는 x축을 통과**하며, 점 A, B의 **y좌표는 절댓값**으로 이루어져 있기에 항상 x축 혹은 그보다 더 위에 존재하기 때문이다.)

생각해보면, 아래와 같은 두 가지 경우가 있다.

i) 직선 AB가 x축과 평행할 때 (x축과 완전히 일치할 때 제외, 그러나 주어진 점화식의 특성상 그럴 경우는 없다.)
ii) 점 A 또는 B가 x축 위에 있을 때

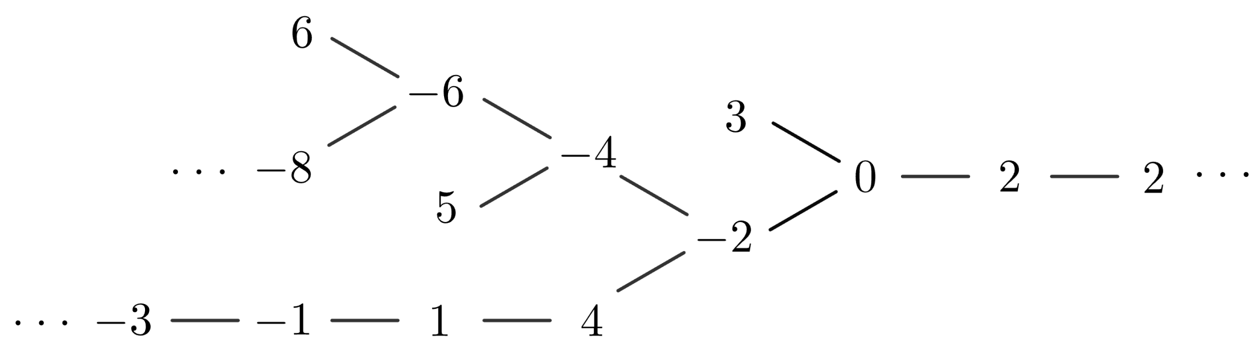
하나씩 살펴보자.

i) 직선 AB가 x축과 평행할 때, $|a_k| = |a_{k+1}|$이다.
바로 떠오르는 경우가 있다. 바로 **2가 무한반복**되는 경우이다.

그리고, **부호는 반대지만 절댓값이 같은 경우** 또한 이에 포함된다.
이 경우를 미리 살펴보자면, $-1 \to 1$, $6 \to -6$ 정도가 있겠다.

ii) 점 A 또는 B가 x축 위에 있을 때, $a_k = 0$ 또는 $a_{k+1} = 0$이다.
이는 ㉠에서 찾아볼 수 있다.

2가 무한반복되기 직전에는 필연적으로 0이 있으므로,
0에서부터 역추적을 진행해보자.
(㉢을 염두에 둔 채로 역추적을 진행하면 훨씬 수월하다.)



따라서 $a_1 = -3,\ -8$인 경우에 조건을 만족함을 알 수 있다.

답: 24

| 무엇을 변별하였는가?

- 귀납적인 나열을 통해 어떠한 경우에서든 **결국은 2가 무한반복한다는 사실**을 파악할 수 있는가?

- **점 P가 직선 AB 위에, 그러나 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 밖에 존재**할 때 $\left|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}\right|$가 최댓값을 가질 것이라는 사실을 파악하고, 조금 더 나아가 점 P가 x축 위에 **존재할 수 없는 경우**를 파악할 수 있는가?

- 2 또는 0에서부터 실수 없이 **역추적**하여, 문제의 조건을 만족하는 경우들을 찾아낼 수 있는가?

23.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\times\frac{4x}{e^{4x}-1}\times\frac{6x}{4x}=\frac{3}{2}$$

(실전에서는, $e^{x}-1$ 꼴을 외워두고 바로 $e^{6x}-1 \Rightarrow 6x$, $e^{4x}-1 \Rightarrow 4x$로 치환할 수 있도록 하자.)

답: ③

24.

$a_n = pn + q$라 하자. (단, d, k는 상수이다.)

이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{pn+q} + p(n+1) + q}{4^n - (pn+q)} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^{pn+q}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{(p-2)n+q} = 2^{\frac{3}{2}}$

따라서 이 극한값이 수렴하기 위해서는 $p = 2$, $q = \frac{3}{2}$가 되어야한다.

$\therefore\ a_1 = p + q = \frac{7}{2}$

답: ④

25.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) f(x) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x)\cos(x) f(x) dx$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x) e^{\sin x} dx$$

“여기서 $\underline{\cos x}$**는** $\underline{\sin x}$**의 미분식**이므로, $\sin x = t$로 치환하면 식이 깔끔하게 정리될 것 같다.“

이때, $2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x) e^{\sin x} dx$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} t e^{t} dt = 2\left[(t-1)e^{t} dt\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = e^{\frac{1}{2}}$$

답: ①

26.

$y=\sqrt{\tan^2 t+1}=\sqrt{\sec^2 t}=|\sec t|$

$\Rightarrow\ \sec t\ \left(0<|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $-\sec t\ \left(\dfrac{\pi}{2}<|t|<\pi\right)\ \cdots$ ㉠

(우리는 $|k|$의 최솟값, 즉 최대한 0과 가장 가까운 k를 구하는 것이고,
객관식 선지도 전부 π 미만으로 되어있으므로 $0<|t|<\pi$만을 살펴보는 것이다.)

“$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\pm\sec k\tan k}{-\sin k}=\dfrac{\pm\sin k}{-\sin k\cos^2 k}=4$이므로,

㉠을 참고하면 $\dfrac{\pi}{2}<|k|<\pi$를 만족시켜야 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin k}{-\sin k\cos^2 k}=4$가 될 수 있겠다.”

또한, 이 때 $\cos k=-\dfrac{1}{2}$이므로, 실수 $|k|$의 최솟값은 $\dfrac{2}{3}\pi$이다.

답: ⑤

27.

“$f(t)>0,\ f'(t)>0$이라면, $f(t)\ \ (t>0)$은 증가함수겠다.”

또한, (나)를 살펴보면, 직선과 점 사이의 거리를 묻고 있다.
“오랜만에 꺼내보는 개념이네. **점과 직선 사이의 거리 공식**을 이용해야겠다.”

$$\frac{|2f'(t)+f(t)f'(t)+f(t)|}{\sqrt{\{f'(t)\}^2+1}}=f(t)\ \ \cdots ㉠$$

이때, 우리가 구해야하는 $f(x)$의 길이를 공식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\int_1^6 \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

㉠을 주어진 공식꼴로 맞추어 계산해보자.

$$\int_1^6 \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_1^6 \frac{2f'(t)+f(t)f'(t)+f(t)}{f(t)}dt=\int_1^6\left(\frac{2f'(t)}{f(t)}+f'(t)+1\right)dt$$
$$=[2\ln f(t)+f(t)+t]_1^6$$

이때, $f(1)=2,\ f(6)=8$이므로
대입하면

$$\int_1^6 \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=4\ln 2+11$$이다.

답: ②

28.

"$g(x)$의 도함수를 구간별 함수로 줬네.
해석해보면 $g'(x)$는 오른쪽 구간$(x \geq t)$에서 $f(x)$이고,
$x = t$를 기점으로 그 왼쪽 구간$(x < t)$에서부터는 **$x = t$에서 $f(x)$의 접선**일 것이다."

$f(x)$의 개형을 파악하기 위해 이를 미분해보면 다음과 같다.

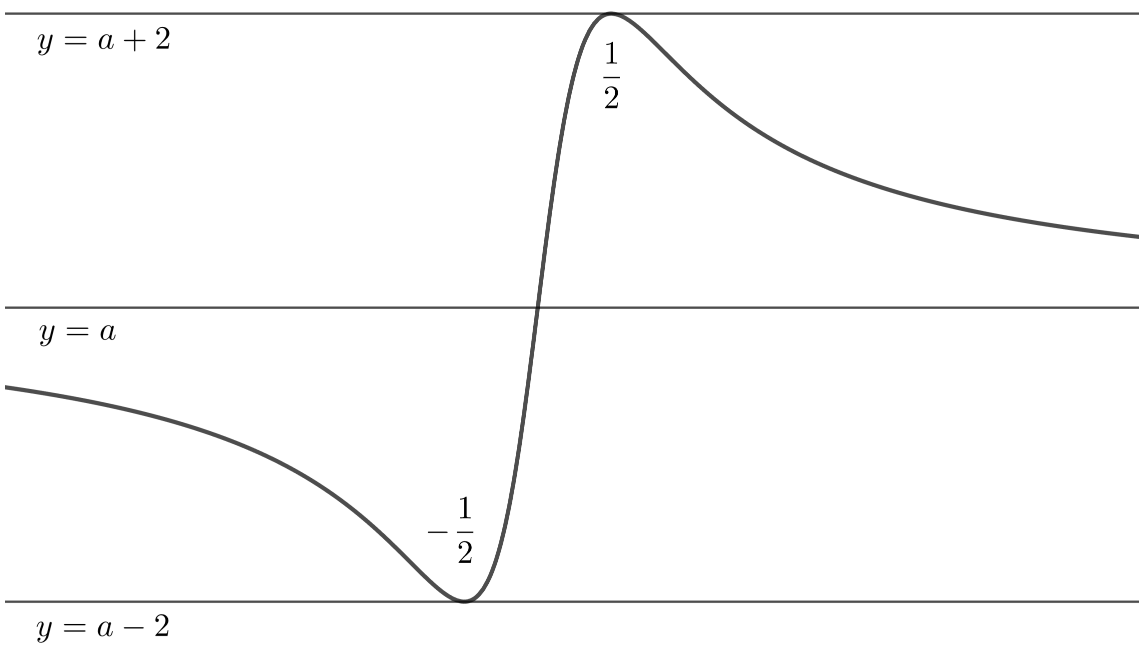
$$f'(x) = a + \frac{2x}{x^2 + \frac{1}{4}} = a + \frac{8x}{4x^2 + 1}$$

"$f'(x)$의 개형은 기함수 $y = \dfrac{8x}{4x^2+1}$를 a만큼 평행이동시킨 그래프네..?"

$g(x)$의 최솟값이 존재하지 않으려면,
$g'(x)$**에서 $(-) \rightarrow (+)$로의 부호변화**가 없어야한다.

(여기까지 생각했다면, 더 이상 $g(x)$에 대해서는 생각할 필요가 없다. 이제 $g'(x)$를 파악하는 것에 집중하도록 하자.)

"아직까지 **실수 t의 개수가 1개**라는 조건은 잘 와닿지가 않네...
먼저 $f'(x)$의 개형을 살펴보자."

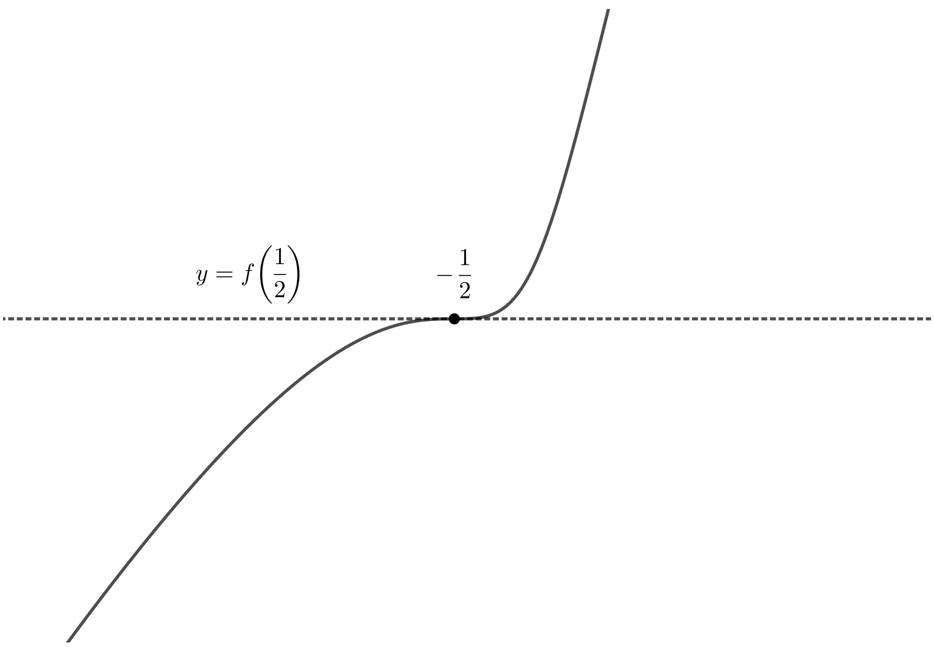


"일반적인 개형에서 **최솟값을 갖지 않도록 하는 실수 t의 개수는 없거나, 셀 수 없이 많거나** 둘 중 하나일테니, 특수한 곳을 기점으로 $f'(x)$의 개형을 살펴봐야겠다."

$i)$ $a=2$인 경우
$ii)$ $a=0$인 경우
$iii)$ $a=-2$인 경우

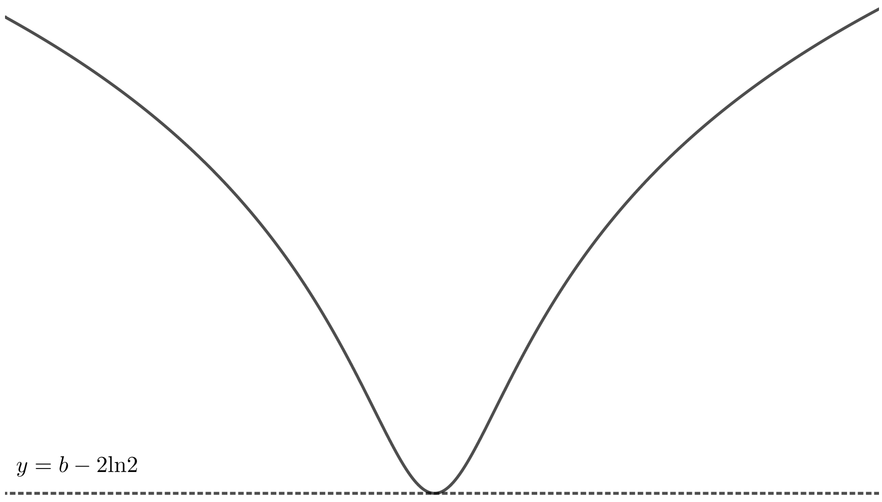
위 세가지 경우를 살펴보자.

$i)$ $a=2$인 경우, $f(x)$는 **증가함수**일 것이고,
최솟값이 존재하지 않기 위해서는 $g'(x)$의 구간별 함수에서 접선으로 갈아타는 순간이 $f(x)$의 접선의 기울기가 0인 순간, 즉 $x=-\frac{1}{2}$이 되어야겠다.
(그 이외에서는 $(-) \rightarrow (+)$인 순간이 반드시 존재할 수 밖에 없다.)



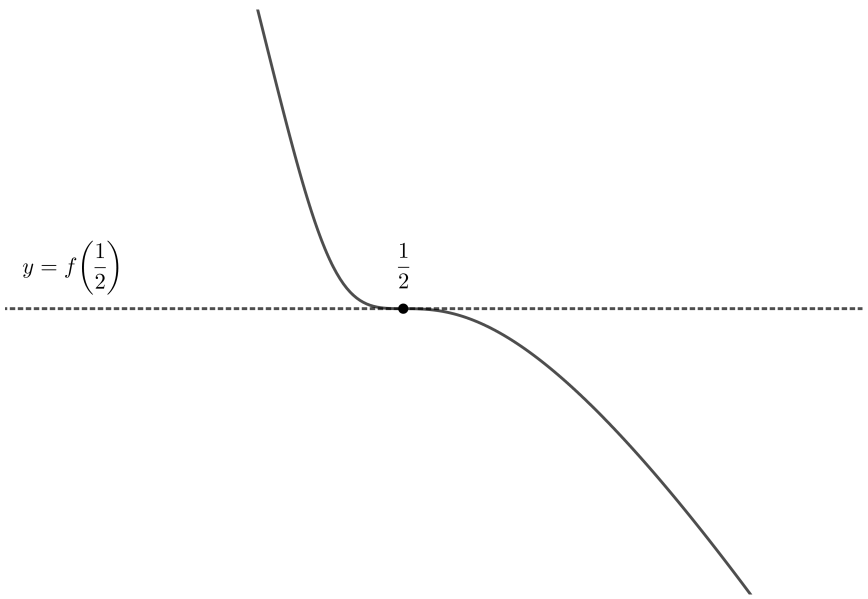
또 다른 케이스들을 살펴보자.

$ii)$ $a=0$인 경우, $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



이 경우에는, 최솟값이 존재하지 않도록 하는 t가 1개가 되기는 힘들어보인다.
b의 값에 따라 셀 수 없이 많거나, 없거나 중 하나가 될 것 같다.

$iii)$ $a=-2$인 경우, $f(x)$는 **감소함수**이고, 접선을 어디에 그어도 최솟값은 항상 존재하지 않는다.
(즉, $(+)\rightarrow(-)$인 순간밖에 존재하지 않는다.)



따라서 $a=2$이고, 이때 가능한 t는 $-\dfrac{1}{2}$ 뿐이다.

그러나, 최종적으로 $(-)\rightarrow(+)$ 부호변화가 존재하지 않기 위해서는 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0$가 되어야하고,

이를 계산하면 $-1+b+\ln\left(\frac{1}{2}\right)>0 \Rightarrow b \geq 2$임을 알 수 있다.

종합하면 $a=2$, $b \geq 2$일 때 문제의 조건이 성립하므로 $a+b$의 최솟값은 4이다.

답: ④

┃ 무엇을 변별하였는가?

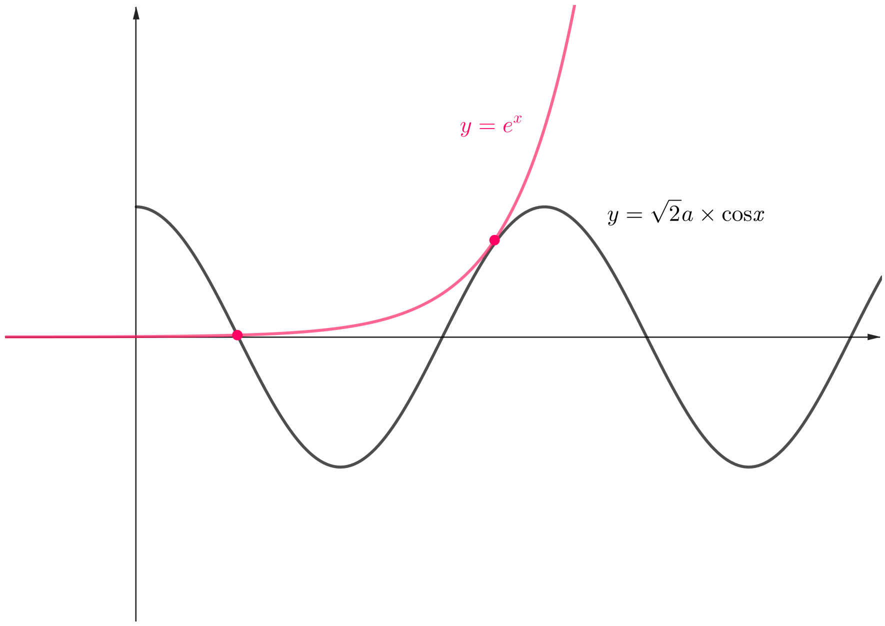
- $f'(x)$의 개형은 기함수 $y=\dfrac{8x}{4x^2+1}$를 a만큼 평행이동시킨 그래프임을 알고,
  $g'(x)$에서 <u>$(-) \to (+)$**로의 부호변화의 존재여부**</u>에 초점을 맞춰 문제의 상황을 파악할 수 있는가?

- <u>**실수 t의 개수가 1이 되어야한다**</u>는 조건을 염두에 둔 채로 (문제를 풀다보면 종종 잊어버린다.),
  일반적인 상황에서는 <u>**실수 t의 개수가 유한할 수 없음**</u>을 알고, 특수한 상황($a=-2,\ 0,\ 2$)를 위주로 상황을 살펴볼 수 있는가?

29.

"일단, $y=e^x$와 $y=\sqrt{2}a\times\cos x$를 그려놓고, $y=\sqrt{2}a\times\cos x$를 **위로 점점 당겨보면서** 교점의 개수가 짝수가 될 때를 판단해보자." (a를 점점 키워보는 것이다.)

"역시나, $y=e^x$와 $y=\sqrt{2}a\times\cos x$가 **접할 때** 양의 실근의 개수가 짝수가 되는 것을 알 수 있네.
그렇다면, 두 그래프가 접한다는 사실을 바탕으로 관계식을 뽑아내자."
(문제의 특성상, 어느정도 접할 때 짝수가 될 것이라고 예상하고 들어가는 것이 좋다.)



$e^x=\sqrt{2}a\times\cos x$
$e^x=-\sqrt{2}a\times\sin x$

두 식을 연립하면, $\sin x+\cos x=0$**을 만족**하는 x값 중에서,
$\sin x<0$, $\cos x>0$**을 만족**시키는 x가 존재할 때 양의 실근의 개수가 짝수가 될 것이다.

(e^x는 항상 양수이므로, $-\sqrt{2}a\times\sin x>0$, $\sqrt{2}a\times\cos x>0 \Rightarrow \sin x<0$, $\cos x>0$을 만족시켜야한다.)

먼저, 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$ 내에서 위 조건을 만족시키는 x의 값을 살펴보면 $\frac{7}{4}\pi$이고,

이때 $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로,

$e^x=\sqrt{2}a\times\cos x \Rightarrow e^{\frac{7}{4}\pi}=a$이다.
또한, 이는 **각 주기마다 반복**되므로, a_n은 다음과 같이 일반화될 수 있다.

$a_n = e^{\frac{7}{4}\pi + 2(n-1)\pi}$ (단, n은 자연수)

“아, 역시 a_n이 등비수열이구나..! 그렇다면 $\frac{1}{a_n}$도 공비가 $\frac{1}{e^{2\pi}}$인 등비수열이고,
이를 이용해 급수를 계산할 수 있겠네.”

따라서, 급수를 계산하면 $\dfrac{\dfrac{1}{e^{\frac{7}{4}\pi}}}{1-\dfrac{1}{e^{2\pi}}} = \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{2\pi}-1}$이다.

$\therefore\ p=2,\ q=\frac{1}{4}$

따라서, $40(p+q)=90$이다.

답: 90

| 무엇을 변별하였는가?

- $y=e^x$와 $y=\sqrt{2}a\times\cos x$가 **접할 때** 양의 실근의 개수가 짝수가 되는 것을 파악할 수 있는가?

- 접한다는 사실을 이용해 두 식 $e^x=\sqrt{2}a\times\cos x$, $e^x=-\sqrt{2}a\times\sin x$을 연립한 뒤 **가능한 a_n의 값들을 일반화**시키고, 이를 이용해 **a_n이 등비수열**임을 확인할 수 있는가?

30.

STEP 1.

"$\int_2^x g(t)dt \le 0 \le \int_4^x g(t)dt$에서 x가 공통적으로 포함되어 있네."

이를 분리해서 본다면, 아래와 같을 것이다.

$$\int_0^x g(t)dt - \int_0^2 g(t)dt \le 0 \le \int_0^x g(t)dt - \int_0^4 g(t)dt$$

이를 $\int_0^x g(t)dt$를 기준으로 정리해주면, 아래와 같다.

$$\int_0^4 g(t)dt \le \int_0^x g(t)dt \le \int_0^2 g(t)dt$$

$\int_0^x g(t)dt = G(x)$라고 한다면, $G(4) \le G(x) \le G(2)$이므로

$G(x)$가 **$x=4$에서 최솟값, $x=2$에서 최댓값**을 갖는다고 할 수 있다.

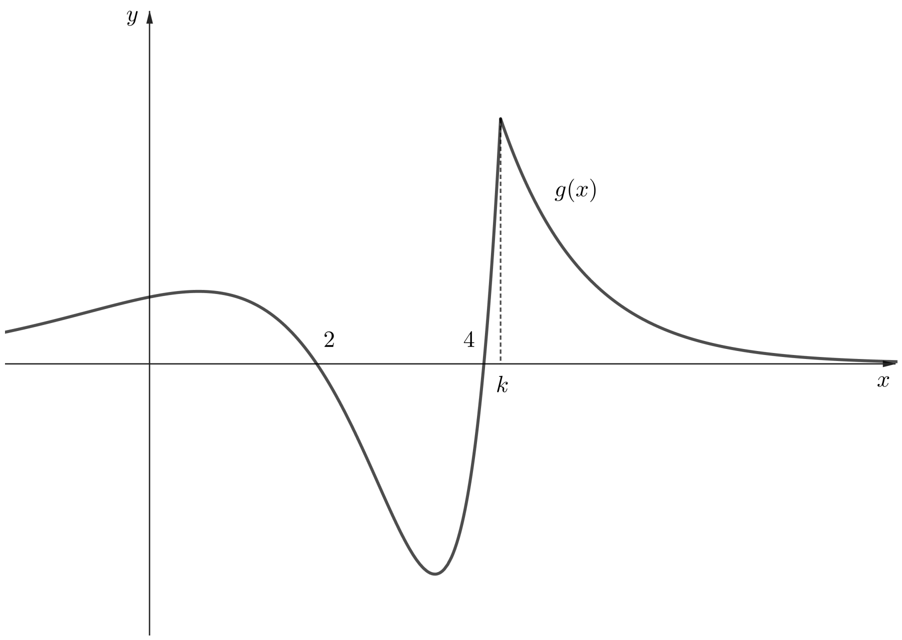
그렇다는 것은, $g(x)$를 놓고 보았을 때 $x=2$에서 $(+) \to (-)$로 부호가 바뀌고,
$x=4$에서 $(-) \to (+)$로 부호가 바뀐다는 뜻이다.

STEP 2.

그런데, 우리는 k의 '최댓값'을 구해야하므로,
"일단 $x=k$가 $x=4$보다 **오른쪽에 위치할 수 있는지**, 즉 $k>4$가 될 수 있는지 먼저 판단해봐야겠다."

만약 $k>4$라면, $x=2,\ 4$는 전부 왼쪽 구간$(x<k)$에 위치하고,
이 때 $g(x)=f(x)e^x\ \ (x<k)$의 부호가 바뀌기 위해서는 $f(x)$의 부호가 바뀌어야 하므로
$x=2,\ 4$는 각각 $f(x)$의 두 실근일 것이다.

따라서, $f(x)=(x-2)(x-4)$, $g(x)=(x-2)(x-4)e^x\ \ (x<k)$이고,
이에 따라 **$g(x)$의 그래프**는 다음과 같이 그려질 것이다.



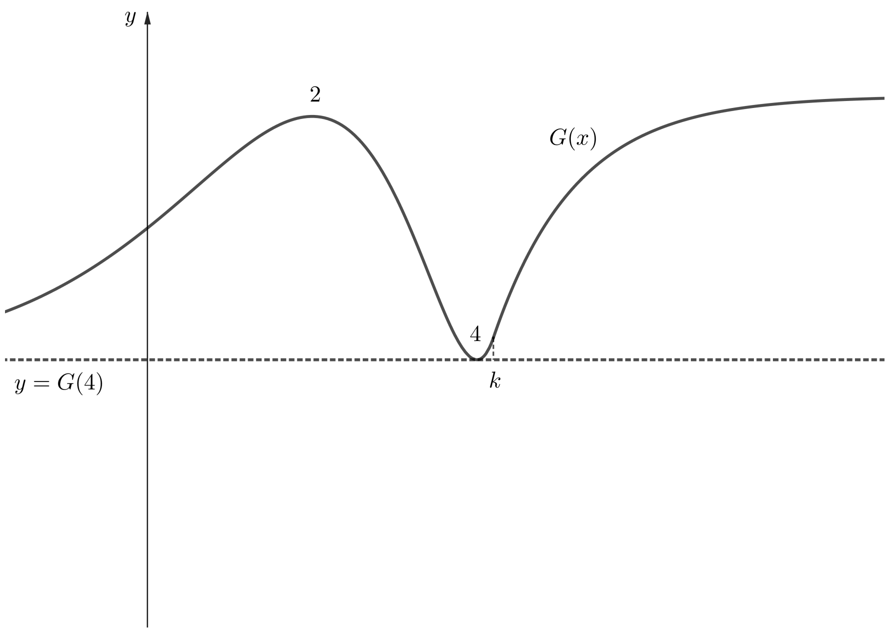
이를 토대로 <u>$G(x)$**의 그래프**</u>까지 그려보자.

먼저, $g(x)=(x-2)(x-4)e^x=(x-6x+8)e^x \ \ (x<k)$를 적분하면

$G(x)=(x-4)^2e^x+C \ \ (x<k)$이다.

(앞서 $\int_0^x g(t)dt=G(x)$이라고 정의하였기 때문에 적분상수 C를 구할 수는 있으나, 그다지 유의미하지 않다.)

또한, $y=f(k)e^{2k-x}$를 적분하면 $y=-f(k)e^{2k-x}+C$이므로,
$G(x)$를 그려보면 아래와 같을 것이다.



STEP 3.

그런데, 위 그래프를 살펴보면 $G(x)$의 최댓값이 $G(2)$가 되기 위해서는

$G(2) \geq \lim_{x \to \infty} G(x)$를 만족시켜야 한다.

여기서,

$\lim_{x \to \infty} G(x) = \int_k^{\infty} f(k) e^{2k-x} dx + G(k) = (k^2 - 6k + 8)e^k + (k^2 - 8k + 16)e^k + C$

$= 2(k^2 - 7k + 12)e^k + C$이고, $G(2) = 4e^2 + C$이므로,

$G(2) \geq \lim_{x \to \infty} G(x) \;\Rightarrow\; 4e^2 \geq 2(k^2 - 7k + 12)e^k$

$\Rightarrow\; 2e^2 \geq (k^2 - 7k + 12)e^k$

따라서, $(M^2 - 7M + 12)e^M = 2e^2$이다.

$\therefore\; p = 2,\; q = 2$

따라서, $p + q = 4$이다.

답: 4

| 무엇을 변별하였는가?

- 주어진 식을 $\int_0^x g(t)dt$를 기준으로 변형하여,
  $G(x)$가 <u>$x = 4$**에서 최솟값,** $x = 2$**에서 최댓값**</u>을 가져야 함을 파악할 수 있는가?

- $k > 4$일 경우, $x = 2,\ 4$가 이차함수 $f(x)$의 <u>**두 실근이 됨**</u>을 파악하고, 이를 통해 <u>$g(x)$**와** $G(x)$**의 개형을 파악**</u>할 수 있는가?

- $G(x)$의 최댓값이 $G(2)$가 되기 위해서는 $G(2)$가 $\lim_{x \to \infty} G(x)$보다 큰 값을 가져야 함을 알고,
  이를 통해 <u>k**의 최댓값**</u>(정확히는, k가 최댓값일 때 $(M^2 - 7M + 12)e^M$의 값)을 구할 수 있는가?