1. $(3^{-1}+3^{-2})^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

2. 함수 $f(x)=3x^2-x+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=6x-1$

$f'(1)=5$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\frac{S_7 - S_4}{S_3} = \frac{1}{9}$일 때, $\frac{a_5}{a_7}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$$\frac{a_5+a_6+a_7}{a_1+a_2+a_3} = r^4 = \frac{1}{9}$$

$$r^2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_5}{a_7} = \frac{1}{r^2} = 3$$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^3 + 2x + 2)f(x)$$

라 하자. $g'(1) = 10$일 때, $f(1) + f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$g'(x) = (3x^2+2)f(x) + (x^3+2x+2)f'(x)$$

$$g'(1) = 5f(1) + 5f'(1) = 10$$

$$f(1) + f'(1) = 2$$

5. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수 $y=a\sin ax+b$의 주기가 π이고 최솟값이 5일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{a}=\pi \\ -a+b=5 \end{cases}$$

$a=2,\ b=7$

6. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)}=2,\quad \lim_{x\to 3}\frac{f(x-1)}{x-3}=4$$

를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

$f(2)=0,\ f'(2)=4$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+4(x-2)+0$

$f(4)=2+8=10$

7. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k+k)=60,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k+1)=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\sum_{k=1}^{10} a_k = x$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = y$

$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-2y=0 \end{cases}$

$x=2$, $y=1$

$\therefore x+y=3$

8. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

$$f(1)=0, \quad F(1)=0, \quad F(2)=4$$

일 때, $F(3)$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$f(x)=3(x-1)^2+a(x-1)+0$

$F(x)=(x-1)^3+\frac{a}{2}(x-1)^2+0=(x-1)^3+3(x-1)^2$

$F(3)=8+3\times4=20$

※ $F'(1)=F(1)=0$, $F(2)=4$

$F(x)=(x-1)^2(x+2)$

9. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(9)와 점 B(1)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=6t^2-18t+7, \quad v_2(t)=2t+1$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$x_1 = 2t^3-9t^2+7t+9, \quad x_2 = t^2+t+1$

$f(t)=|x_1-x_2| = 2|t^3-5t^2+3t+4|$

$g(t)=t^3-5t^2+3t+4 \Rightarrow g'(t)=3t^2-10t+3=(3t-1)(t-3)$

구간 $[1, 3]$에서 $g(t)$는 감소함수

$g(1)=3, \ g(3)=-5 \Rightarrow -5 \leq g(t) \leq 3$

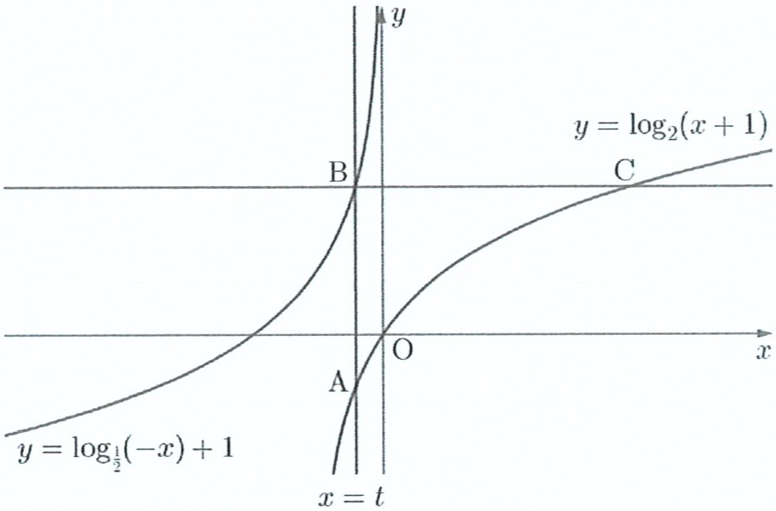
$f(t)=2|g(t)| \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq 10$

10. $-\frac{1}{2}<t<0$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선

$$y=\log_2(x+1),\quad y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)+1$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 9$일 때, 선분 BC의 길이는? [4점]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$



$\overline{AB} = -\log_2(-t)+1-\log_2(t+1)=\log_2 9$

$-9t(t+1)=2 \Rightarrow 9t^2+9t+2=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$

$3t \quad +1$

$3t \quad +2$

$B(-\frac{1}{3}, \underline{\log_2 3+1})$, $C(5, \log_2 6) \Rightarrow \overline{BC}=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$

$\log_2 6$

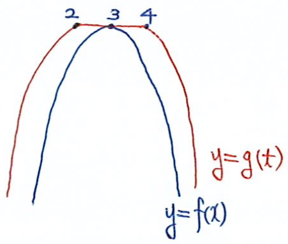
11. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.
> (나) 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $-1 \le t \le 1$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(1)$이다.

$f(2)=0$일 때, $f(5)$의 값은? [4점]

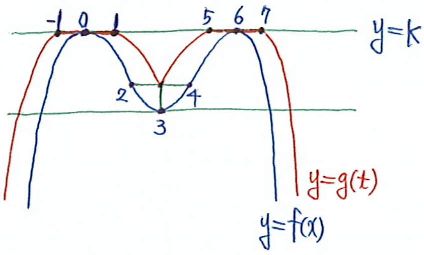
① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

i)



(X)

ii)



$f(x)=-x^2(x-6)^2+k=-x^2(x-6)^2+64$

$f(5)=-25+64=39$

12. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

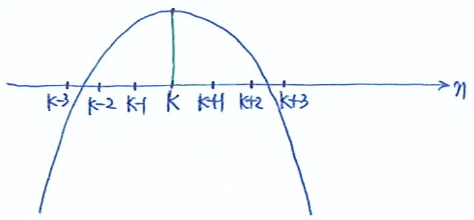
$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 14　　② 15　　③ 16　　④ 17　　⑤ 18

$f(3)=f(5)=f(7)=1 \Rightarrow f(4)+f(6)=4$

$\therefore f(4)=f(6)=2$



$\therefore k=4,5,6$

13. $-6 \leq t \leq 2$인 실수 t와 함수 $f(x)=2x(2-x)$에 대하여 x에 대한 방정식

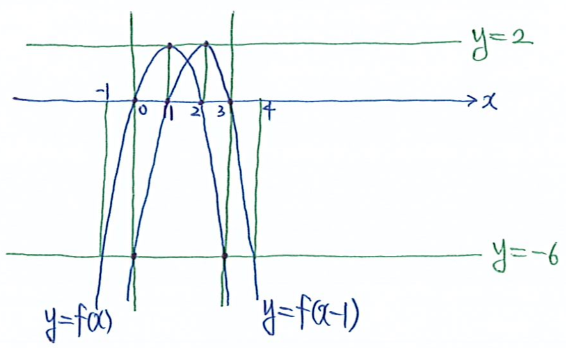
$$\{f(x)-t\}\{f(x-1)-t\}=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$에 속하는 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 불연속이다. $\lim_{t \to a-} g(t) + \lim_{t \to a+} g(t)$의 값은? (단, a는 $-6<a<2$인 상수이다.)

[4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$f(x)=t$ 또는 $f(x-1)=t$ $(0 \leq x \leq 3)$



$a=0$

$\therefore 1+3=4$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_5|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_2=27$, $a_3a_4>0$

(나) 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2|a_n|$이다.

① 224 ② 232 ③ 240 ④ 248 ⑤ 256

$S_n = 2|a_n|$
$-\ S_{n-1} = 2|a_{n-1}|$

$a_n = 2|a_n| - 2|a_{n-1}|$ $(n \geq 3)$

$a_3 = 2|a_3| - 2|a_2| = 2|a_3| - 54$
$a_4 = 2|a_4| - 2|a_3|$
$a_5 = 2|a_5| - 2|a_4|$

i) $a_3 > 0$: $a_3 = 54$

$a_4 > 0$ 이므로 $a_4 = 2|a_3| = 108$

$a_5 \geq 0$: $a_5 = 2|a_4| = 216$
$a_5 < 0$: $3a_5 = -2 \times 108 \Rightarrow a_5 = -72$

ii) $a_3 < 0$: $3a_3 = -54 \Rightarrow a_3 = -18$

$a_4 < 0$ 이므로 $3a_4 = -2 \times 18 \Rightarrow a_4 = -12$

$a_5 \geq 0$: $a_5 = 2|a_4| = 24$
$a_5 < 0$: $3a_5 = -2 \times 12 \Rightarrow a_5 = -8$

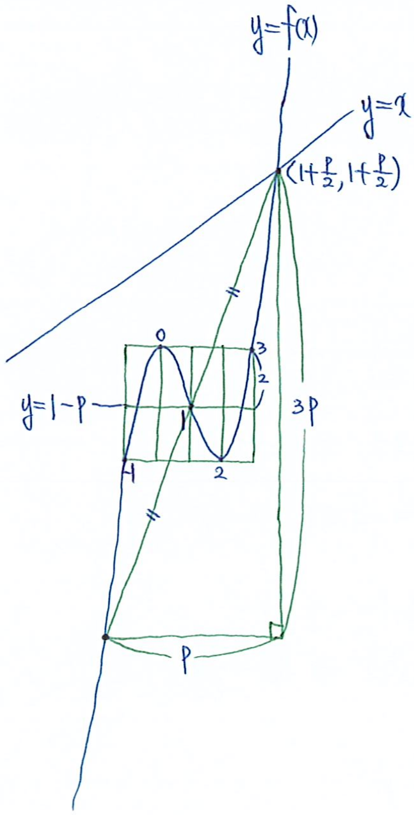
$\therefore M = 216$, $m = 8$

15. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq x) \\ f(x-p)+3p & (f(x)<x) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① $4-3\sqrt{6}$ ② $2-2\sqrt{6}$ ③ $3-2\sqrt{6}$ ④ $3-\sqrt{6}$ ⑤ $4-\sqrt{6}$



$f(x)=x^2(x-3)+3-p$

$f(1+\frac{p}{2})=(1+\frac{p}{2})^2(1+\frac{p}{2}-3)+3-p=1+\frac{p}{2}$

$1+\frac{p}{2}=t$: $t^3-3t^2+5-2t=t$

$t^3-3t^2-3t+5=0$ $(t>1)$

$(t-1)(t^2-2t-5)=0 \Rightarrow t=1+\sqrt{6}$

$\therefore f(0)=3-p=5-2t=3-2\sqrt{6}$

16. 부등식 $4^x - 9\times 2^{x+1} + 32 \le 0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점] 10

$2^x = t$; $t^2 - 18t + 32 \le 0$

$2 \le t \le 16 \Rightarrow 1 \le x \le 4$

$\therefore 1+2+3+4 = 10$

17. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_{12}=5, \quad |a_5|=|a_{13}|$$

을 만족시킬 때, a_{24}의 값을 구하시오. [3점] 25

$a_5+a_{13}=0 \Rightarrow 2a_9=0 \Rightarrow a_9=0$

$\therefore a_n=\frac{5}{3}(n-9) \Rightarrow a_{24}=\frac{5}{3}\times 15=25$

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

36 [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

(나) $\displaystyle\int_{-2}^{2} xf(x)\,dx=\frac{144}{5}$

(가) $f(x)=x^3+ax$

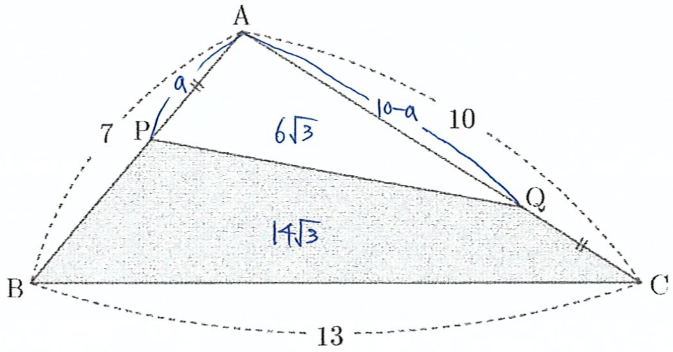
(나) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^4+ax^2)\,dx=2\int_{0}^{2}(x^4+ax^2)\,dx=2\left(\frac{32}{5}+\frac{8a}{3}\right)=\frac{144}{5}$

$\frac{16}{3}a=\frac{80}{5} \Rightarrow a=3$

$\therefore f(x)=x^3+3x \Rightarrow f(3)=36$

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=13$, $\overline{CA}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q를 $\overline{AP}=\overline{CQ}$이고 사각형 PBCQ의 넓이가 $14\sqrt{3}$이 되도록 잡을 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하시오. [3점]

64



$$\cos A = \frac{49+100-169}{140} = \frac{-20}{140} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 7 \times 10 \times \sin A = 20\sqrt{3}$$

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times a(10-a) \sin A = 6\sqrt{3}$$

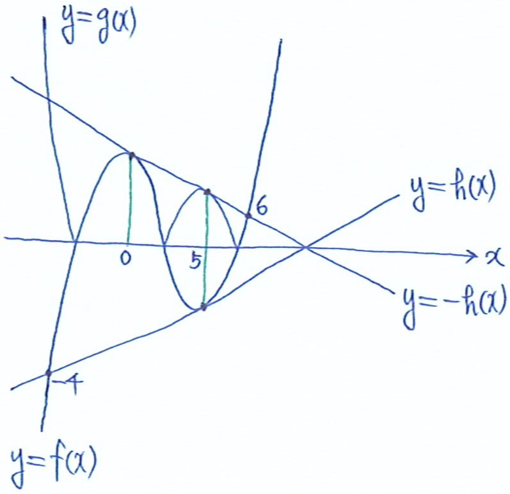
$$a(10-a) = 21 \Rightarrow a = 3$$

$$\therefore \overline{PQ}^2 = 9+49-2\times3\times7\times\cos A = 64$$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

118

(가) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 미분가능하고,
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5, g(5))$에서의 접선은 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0, g(0))$에서 접한다.



(가) $\alpha+\beta+\gamma=3\times2=6$ (일정)

$$\begin{cases} f(x)-h(x)=(x+4)(x-5)^2 \\ f(x)+h(x)=x^2(x-6) \end{cases}$$

$2f(x)=(x+4)(x-5)^2+x^2(x-6)$

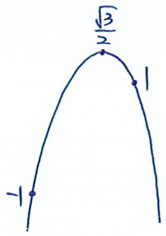
$2f(8)=12\times9+64\times2$

$\therefore g(8)=f(8)=54+64=118$

21. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 α, β에 대하여 $\frac{12}{\pi}\times(\beta-\alpha)$의 최댓값을 구하시오. [4점] 19

> $0\le x<2\pi$에서 함수
>
> $$f(x)=\cos^2\left(\underbrace{\frac{13}{12}\pi-2x}_{\frac{\pi}{2}-\theta}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\underbrace{2x-\frac{7}{12}\pi}_{\theta}\right)-1$$
>
> 은 $x=\alpha$일 때 최댓값을 갖고, $x=\beta$일 때 최솟값을 갖는다.

$f(x)=\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-1=-\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta\quad\left(-\frac{7}{12}\pi\le\theta<4\pi-\frac{7}{12}\pi\right)$



$y=-t^2+\sqrt{3}t\ (-1\le t\le 1)$

i) 최대 : $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x-\frac{7}{12}\pi=-\frac{\pi}{6},\cdots$

(α의 최솟값) $=\frac{5}{24}\pi$

ii) 최소 : $\cos\theta=-1\Rightarrow 2x-\frac{7}{12}\pi=\pi,3\pi$

(β의 최댓값) $=\frac{43}{24}\pi$

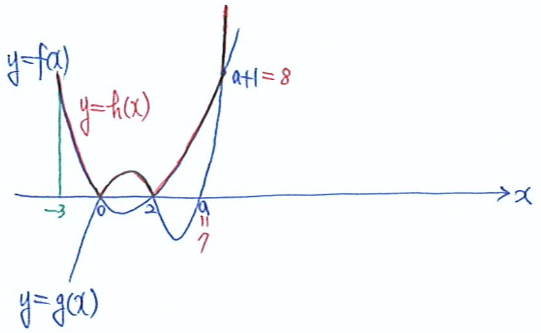
$\therefore\ \frac{12}{\pi}\times\frac{38}{24}\pi=19$

22. 함수 $f(x)=x^2-2x$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$이다.
> (나) $h(k)h(k+2)\le 0$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 개수는 3이다.

$\int_{-3}^{2} h(x)\,dx=26$이고 $h(10)>\underbrace{80}_{f(10)}$일 때, $h(1)+h(6)+h(9)$의 값을 구하시오. [4점]　156

(가) $h(x)=f(x)$ 또는 $h(x)=g(x)$



(나) $h(x)\ge 0$

$k=0,\ 2$

$k+2=0,\ 2 \Rightarrow k=-2,\ 0$

$\therefore k=-2,\ 0,\ 2$ (3개)

$g(x)=x(x-2)(x-a)=x(x-2) \Rightarrow x=0,\ 2,\ a+1$

$$\int_{-3}^{2} h(x)\,dx=\int_{-3}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}x(x-2)(x-a)\,dx=\int_{0}^{3}(x^2+2x)\,dx+\int_{0}^{2}x^2(x-2)\,dx-a\int_{0}^{2}x(x-2)\,dx$$

$$=18-\frac{2^4}{12}+a\times\frac{2^3}{6}=26 \Rightarrow a=7$$

$h(1)=g(1)=6$

$h(6)=f(6)=24$

$h(9)=g(9)=9\times7\times2=126$

$\therefore 6+24+126=156$

※ **확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2025학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 (확률과 통계)

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \dfrac{3}{7}\right)$을 따를 때, $\mathrm{V}(2X)$의 값은? [2점]

① 16 ② 24 ③ 32 ④ 40 ⑤ 48

$4V(X) = 4 \times \left(49 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7}\right) = 48$

24. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

$P(A)=\frac{1}{2}$

$P(A^c\cap B^c)=\frac{1}{2}P(B^c)=\frac{3}{10}$

$P(B^c)=\frac{3}{5} \Rightarrow P(B)=\frac{2}{5}$

25. $(x^2+y)^4\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y^2}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{x^4}{y^5}$의 계수는? [3점]

① 80 ② 120 ③ 160 ④ 200 ⑤ 240

${}_4C_r(x^2)^{4-r}y^r \times {}_5C_s\left(\frac{2}{x}\right)^{5-s}\left(\frac{1}{y^2}\right)^s$

$\begin{cases} 8-2r-5+s=4 \Rightarrow -2r+s=1 \\ r-2s=-5 \end{cases}$

$r=1,\ s=3$

$\therefore {}_4C_1 \times {}_5C_3\, 2^2=160$

26. 어느 사관학교 생도의 일주일 수면 시간은 평균이 45시간, 표준편차가 1시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사관학교 생도 중 임의추출한 36명의 일주일 수면 시간의 표본평균이 44시간 45분 이상이고 45시간 20분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8185 ③ 0.8413 ④ 0.9104 ⑤ 0.9772

$m=45,\ \sigma=1,\ n=36$

$$Z=\frac{\overline{X}-45}{\frac{1}{\sqrt{36}}}=6(\overline{X}-45)$$

$$\therefore P\left(44+\frac{3}{4}\le \overline{X}\le 45+\frac{1}{3}\right)=P(-1.5\le Z\le 2)=0.9104$$

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

(가) $x=1,\ 2,\ 3$일 때 $f(x) \le f(x+1)$이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$

$\therefore\ \underbrace{{}_5C_2}_{\text{치역}} \times \underbrace{{}_2C_1}_{f(5)} \times {}_2H_3 = 80$

28. 숫자 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차를 각각 a, b, c, d, e, f라 하자. 예를 들어 그림과 같이 나열한 경우 $a=3$, $b=1$, $c=1$, $d=3$, $e=0$, $f=2$이다.

$$\boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$$

$a+b+c+d+e+f$의 값이 짝수가 되도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a, b, c, d, e, f \Rightarrow$ 홀수가 2개 또는 4개

1 1 ? ? ? ? ? (X)

? 1 1 ? ? ? ? (O)

1 ? 1 ? ? ? ? (X)

? 1 ? 1 ? ? ? (O)

$$\therefore \underbrace{\frac{5!}{2!\,3!}}_{2,2,4,4,4} \times \left(\underbrace{{}_4C_1}_{1,1\text{ 이웃}} + \underbrace{{}_6C_2 - 8}_{1,1\text{ 이웃X}}\right) = 10 \times 11 = 110$$

29. 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개, 빨간 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 색의 종류의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(64X-10)$의 값을 구하시오. [4점]

165

$a, b, c, d \xrightarrow{{}_4\Pi_4} \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$

$P(X=1) = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{64}$

$P(X=2) = \frac{{}_4C_2(4+6+4)}{4^4} = \frac{21}{64}$ (aaab, aabb, abbb)

$P(X=3) = \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1 \times \frac{4!}{2!}}{4^4} = \frac{36}{64}$ (abc ⇒ aabc)

$P(X=4) = \frac{4!}{4^4} = \frac{6}{64}$

$E(X) = \frac{1+42+108+24}{64} = \frac{175}{64}$

$\therefore 175-10=165$

30. 흰 공 1개, 검은 공 6개, 노란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 주머니에 남아 있는 공의 색의 종류의 수가 처음으로 2가 되면 시행을 멈춘다. 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수가 4일 때, 꺼낸 공 중에 흰 공이 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13 [4점]

1 2 3 4

검3 흰 $\Rightarrow \frac{{}_6C_3}{{}_9C_3} \times \frac{1}{6}$

검2, 노1 흰 $\Rightarrow \frac{{}_6C_2 \times {}_2C_1}{{}_9C_3} \times \frac{1}{6}$

검2, 노1 노 $\Rightarrow \frac{{}_6C_2 \times {}_2C_1}{{}_9C_3} \times \frac{1}{6}$

$$\therefore \frac{{}_6C_3 + {}_6C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3 + {}_6C_2 \times {}_2C_1 + {}_6C_2 \times {}_2C_1} = \frac{20+30}{20+30+30} = \frac{5}{8}$$

※ **확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2025학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역 미적분

23. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$\sqrt{4n^2+n}-2n \fallingdotseq \frac{n}{2n+2n} \longrightarrow \frac{1}{4}$

24. 함수 $f(x)=e^{x^2}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}e-\frac{1}{4}$

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

25. 함수 $f(x)=\ln(e^x+2)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=\{g(x)\}^2$에 대하여 $h'(\ln 4)$의 값은? [3점]

① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $4\ln 2$ ④ $5\ln 2$ ⑤ $6\ln 2$

$h'(x)=2g(x)g'(x) \Rightarrow h'(\ln 4)=2g(\ln 4)g'(\ln 4)$

$f(\ln 2)=\ln 4$, $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$

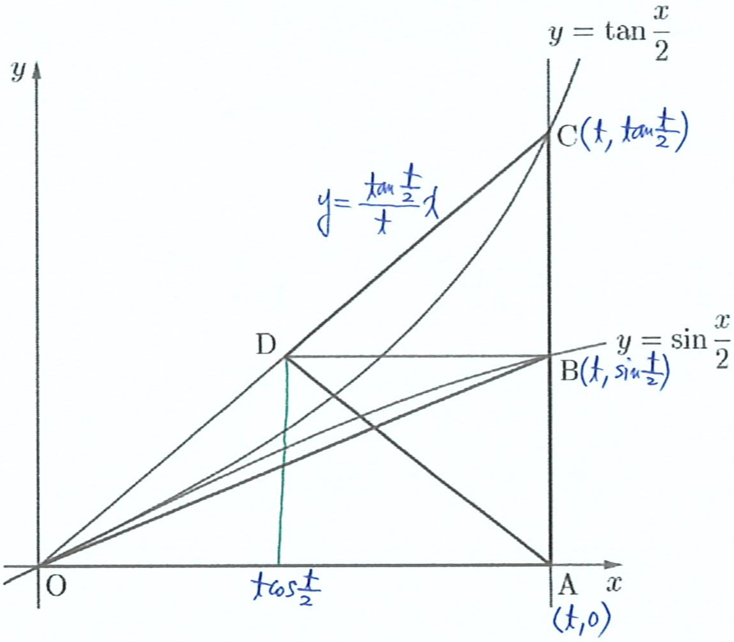
$\therefore h'(\ln 4)=2\ln 2\times\frac{1}{f'(\ln 2)}=2\ln 2\times\frac{4}{2}=4\ln 2$

※ $g(x)=\ln(e^x-2) \Rightarrow h(x)=\{\ln(e^x-2)\}^2$

$h'(x)=2\ln(e^x-2)\times\frac{e^x}{e^x-2} \Rightarrow h'(\ln 4)=2\ln 2\times\frac{4}{2}=4\ln 2$

26. $0<t<\pi$인 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{A}(t, 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\tan\frac{x}{2}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $f(t)$, 삼각형 ACD의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{g(t)}{\{f(t)\}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

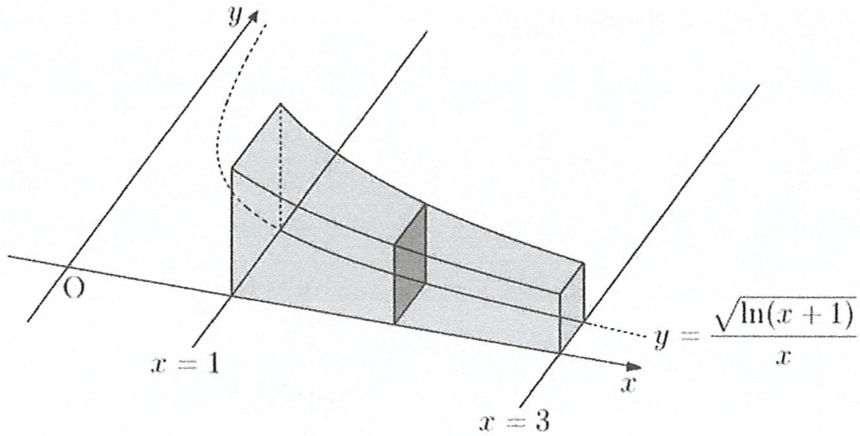
① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$



$$D_x=\frac{t\sin\frac{t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}=t\cos\frac{t}{2}$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}\times\tan\frac{t}{2}\times t\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\times t\times\sin\frac{t}{2}\right)^2}\fallingdotseq\frac{\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t\times\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\times t\times\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\frac{t^4}{32}}{\frac{t^4}{16}}\Rightarrow\frac{1}{2}$$

27. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x}\,(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{9}{2}$ ④ $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{27}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{27}{2}$

$$V=\int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx \qquad \left(u'=\frac{1}{x^2} \quad v=\ln(x+1) \quad u=-\frac{1}{x} \quad v'=\frac{1}{x+1} \right)$$

$$=\left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^3+\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

$$=-\frac{\ln 4}{3}+\ln 2+\Big[\ln x-\ln(x+1)\Big]_1^3$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\ln 3-\ln 2$$

$$=\ln 3-\frac{2}{3}\ln 2$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{27}{4}$$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = e^{2x} - 2x + a$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [4점]

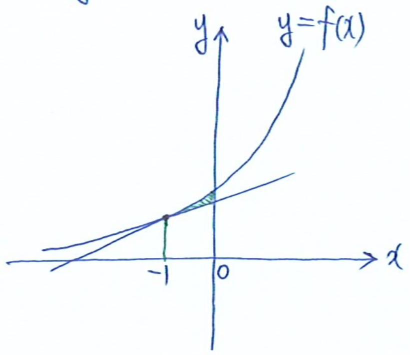
① $2-\frac{6}{e^2}$ ② $2-\frac{7}{e^2}$ ③ $2-\frac{8}{e^2}$ ④ $2-\frac{9}{e^2}$ ⑤ $2-\frac{10}{e^2}$

$x=0$; $0 = 1 + a \Rightarrow a = -1$

$\frac{d}{dx}$; $\int_0^x f(t)\,dt = 2e^{2x} - 2 \Rightarrow f(x) = 4e^{2x}$

$f'(x) = 8e^{2x}$

l : $y = 8e^{-2}(x+1) + 4e^{-2}$

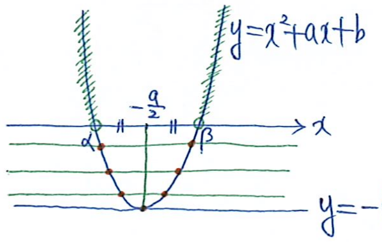


$\therefore S = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \frac{4e^{-2}+12e^{-2}}{2} \times 1 = (2-2e^{-2}) - 8e^{-2} = 2 - \frac{10}{e^2}$

29. 두 실수 a, b에 대하여 x에 대한 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하자. $(\alpha-\beta)^2=\frac{34}{3}\pi$일 때, 함수 $f(x)=\sin(x^2+ax+b)$가 $x=c$에서 극값을 갖도록 하는 c의 값 중에서 열린구간 (α, β)에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 c_1, c_2, $\cdots$, c_n(n은 자연수)라 하자. $(1-n)\times\sum_{k=1}^{n}f(c_k)$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$) [4점]

15

$f'(x)=(2x+a)\cos(x^2+ax+b)=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{2}$ 또는 $\cos(\underbrace{x^2+ax+b}_{-\frac{\pi}{2},\ -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{5}{2}\pi})=0$



$y=-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2=-\frac{17}{6}\pi=-3\pi+\frac{\pi}{6}$

$n=7$

$\therefore -6\times\left\{-\frac{1}{2}+2\times(-1+1-1)\right\}=3+12=15$

30. 양수 k와 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-2|^{2n+1}+f(x)}{|x-2|^{2n}+k} & (|x-2|\neq 1) \\ \dfrac{|f(x+1)|}{k+1} & (|x-2|=1) \end{cases}$$

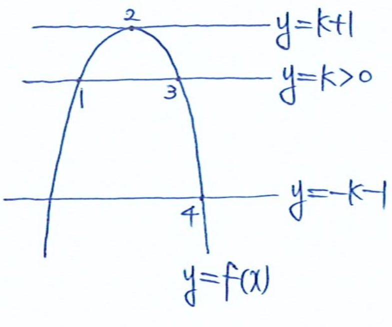
이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(g(x))$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $10(M+m)$의 값을 구하시오. [4점]

30

$$\begin{cases} |x-2|<1 : g(x)=\dfrac{f(x)}{k} & (1<x<3) \\ |x-2|>1 : g(x)=|x-2| & (x<1, x>3) \\ |x-2|=1 : g(x)=\dfrac{|f(x+1)|}{k+1} & (x=1, 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1\ (\text{연속}) : \dfrac{f(1)}{k}=1=\dfrac{|f(2)|}{k+1} \\ x=3\ (\text{연속}) : \dfrac{f(3)}{k}=1=\dfrac{|f(4)|}{k+1} \end{cases}$$

$f(1)=f(3)=k$, $|f(2)|=|f(4)|=k+1$



$f(x)=a(x-2)^2+k+1$

$$\begin{cases} f(1)=a+k+1=k \Rightarrow a=-1 \\ f(4)=4a+k+1=-k-1 \Rightarrow \underline{k=1} \end{cases}$$

$1\le x\le 3 : g(x)=f(x) \Rightarrow 1\le f(x)\le 2$

$1\le f(g(x))=f(f(x))\le 2 \Rightarrow \underline{M=2,\ m=1}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2025학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

기 하

23. 좌표공간의 점 $A(1,\ -2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

$P(-1,-2,-3)$, $Q(1,2,3)$

$\overline{PQ}=2\sqrt{1+4+9}=2\sqrt{14}$

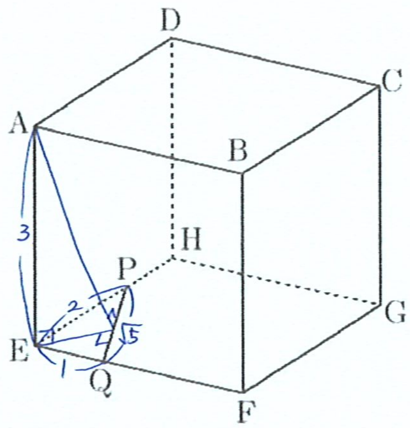
24. 좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{u}=(3,\,1)$인 직선 l과 법선벡터가 $\vec{n}=(1,\,-2)$인 직선 m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

방향벡터 : (3,1), (2,1)

$$\cos\theta = \frac{6+1}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

25. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD−EFGH에서 선분 EH를 2:1로 내분하는 점을 P, 선분 EF를 1:2로 내분하는 점을 Q라 할 때, 점 A와 직선 PQ 사이의 거리는? [3점]

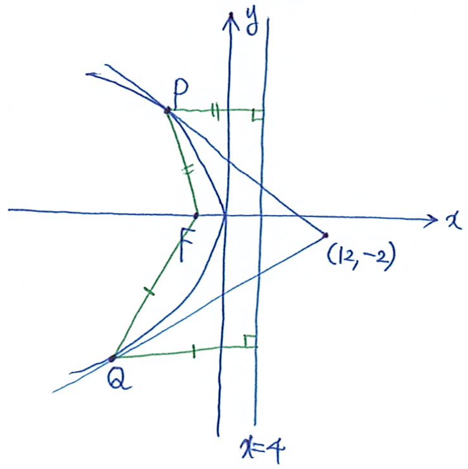


① $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{17\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

$$\sqrt{9+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

26. 포물선 $(y+2)^2=16(x-8)$의 초점에서 포물선 $y^2=-16x$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. 포물선 $y^2=-16x$의 초점을 F라 할 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}$의 값은? [3점]

① 33 ② 34 ③ 35 ④ 36 ⑤ 37



접선 : $y_1 y = -8(x+x_1) \Rightarrow -2y_1 = -8(12+x_1)$

$y_1 = 4(x_1+12) \longrightarrow y_1^2 = -16x_1$

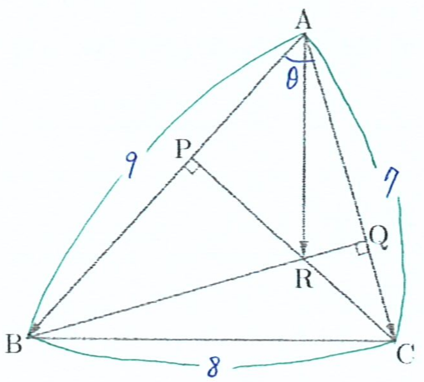
$16(x_1^2+24x_1+144) = -16x_1$

$x_1^2+25x_1+144=0$

$x_1=-9, -16$

$\therefore \overline{PF}+\overline{QF} = 13+20 = 33$

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 두 선분 CP, BQ의 교점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{AR}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$의 값은? [3점]



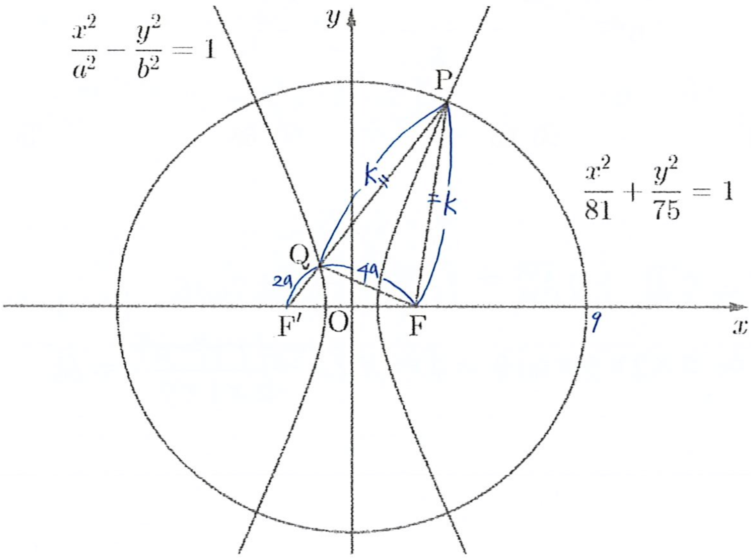
① 62　　② 64　　③ 66　　④ 68　　⑤ 70

$$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AC}=9\overline{AP}+7\overline{AQ}=9\times7\cos\theta+7\times9\cos\theta$$

$$=2\times9\times7\times\cos\theta=2\times9\times7\times\frac{81+49-64}{2\times9\times7}=66$$

28. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{75}=1$과 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 선분 F′P가 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 P의 x좌표는? (단, a와 b는 양수이다.) [4점]

(가) $\overline{PQ}=\overline{PF}$ (나) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 20이다.



① $\sqrt{13}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ $\frac{\sqrt{58}}{2}$ ⑤ $\sqrt{15}$

(나) $4a+2k=20$

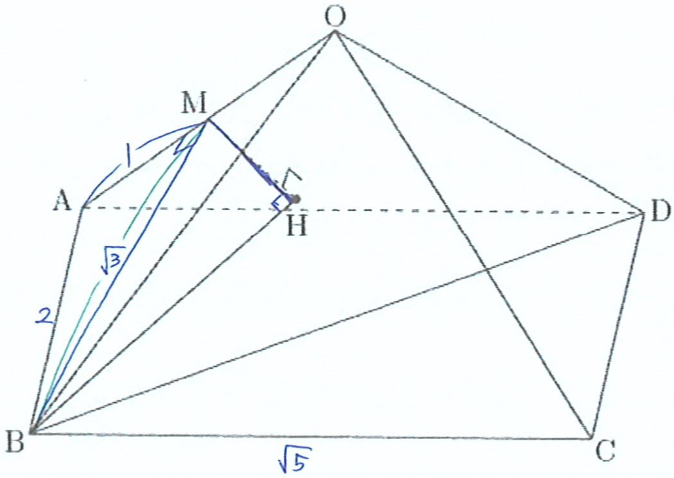
타원의 정의 : $2a+2k=18$

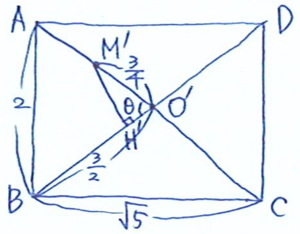
$a=1$: $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow y=5(x^2-1)$

$\frac{x^2}{81}+\frac{x^2-1}{15}=1 \Rightarrow 15x^2+81x^2-81=81\times15$

$96x^2=81\times16 \Rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

29. $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$ 인 직사각형 ABCD를 밑면으로 하고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2$ 인 사각뿔 O−ABCD가 있다. 선분 OA의 중점을 M이라 하고, 점 M에서 평면 OBD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 BH의 길이를 k라 할 때, $90k^2$의 값을 구하시오. [4점] 220





$\cos\theta = \frac{18-16}{18} = \frac{1}{9}$

$\overline{MH} = \overline{M'H'} = \frac{3}{4}\sin\theta = \frac{3}{4} \times \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

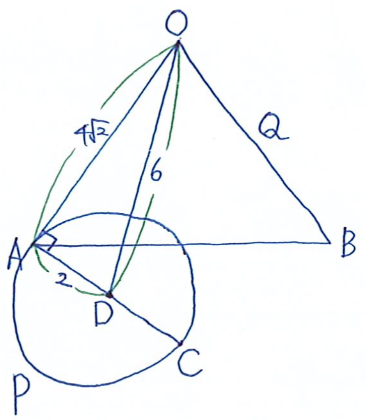
$\therefore 90k^2 = 90\left(3 - \frac{5}{9}\right) = 220$

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 정삼각형 OAB와 다음 조건을 만족시키는 점 C가 있다.

(가) $|\overrightarrow{AC}|=4$
(나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=0$ 을 만족시키는 점 P와 정삼각형 OAB의 변 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $p+q\sqrt{33}$ 일 때, p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

40



$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow$ $\overline{AC}$가 지름인 원 (P의 자취)

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OD}+\underbrace{\overrightarrow{DP}}_{크기 : 2}+\overrightarrow{OQ}|$

먼저

i) 최소 : Q=O $\Rightarrow m=6-2=4$

ii) 최대 : Q=A $\Rightarrow |\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}| = |2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(8\sqrt{2})^2+2^2} = 2\sqrt{33}$ $\Rightarrow M=2\sqrt{33}+2$

$\therefore M+m = 6+2\sqrt{33} \Rightarrow 36+4=40$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.