

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(2^{\sqrt{3}+1})^{2^{\sqrt{3}-2}}$ 의 값은? [3점]
 ① $8\sqrt{2}$ ② 16 ③ $16\sqrt{2}$ ④ 32 ⑤ $32\sqrt{2}$

2. 두 자연수 a, b 에 대하여, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \sin(bx) + a$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 서로 다른 네 점에서 만난다. ab 의 최솟값은? [3점]
 ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

3. 자연수 n 에 대하여 다항식 $(x+1)^n$ 을 $x(x-1)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R_n(x)$ 라 하자. $\sum_{n=1}^8 R_n(2)$ 의 값은? [3점]
 ① 1008 ② 1012 ③ 1016 ④ 1020 ⑤ 1024

4. 40 이하의 두 자연수 m, n 에 대하여

$$-\log_{\sqrt{2}} m + \log_{\frac{1}{2}} (4n+6)^{-1}$$
 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는?
 [3점]
 ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 19^3$ 의 값은? [4점]

- ① 3300 ② 3400 ③ 3500 ④ 3600 ⑤ 3700

6. 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (x(x-3) \neq 0) \\ 0 & (x(x-3) = 0) \end{cases}$$

이고 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
 $g(0) = 5$ 이고 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
 $g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 245 ② 247 ③ 249 ④ 251 ⑤ 253

7. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가

$$x = t^4 - 4t^3 + 2kt$$

이다. 점 P가 원점을 출발한 후 운동 방향을 두 번 바꾸도록 하는 정수 k 의 개수는? [4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4일 때, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ 의 값은? [4점]

- ① $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ② $4(2 + \sqrt{3})$ ③ $4(\sqrt{3} + \sqrt{5})$
 ④ $4(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ ⑤ $4(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

9. 함수 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 에 대하여 집합

$$\{x \mid f(f(x)) = f(x), x \text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수가 2일 때, 양수 a 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 실수 θ 에 대하여 직선 $y = x$ 와 곡선

$$y = x^2 + 2x \sin \theta - \cos^2 \theta$$

이 만나는 두 점 사이의 거리의 최댓값은? [4점]

- ① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

11. 첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이

$$b_n = n^2 \sin(\pi a_n) + n \cos(\pi a_n) + 1, \quad \sum_{n=1}^7 b_n = 3$$

을 만족시킬 때, $b_{48} + b_{49} + b_{50}$ 의 값은? [4점]

- ① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

12. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,
모든 자연수 n 에 대하여

$$S_n = 2a_n - pn$$

이다. $\sum_{k=1}^6 \frac{p+a_k}{a_k a_{k+1}} = 3$ 일 때, 상수 p 의 값은? [4점]

- ① $\frac{36}{127}$ ② $\frac{38}{127}$ ③ $\frac{40}{127}$ ④ $\frac{42}{127}$ ⑤ $\frac{44}{127}$

13. 함수 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 13x + 8$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 하자.
두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 직선 $y = -x + 8$ 로 둘러싸인
도형의 넓이는? [4점]

- ① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

14. 자연수 n 에 대하여 함수 $y = |2^{|x-n|} - 2n|$ 의 그래프가
직선 $y = 15$ 와 제1사분면에서 만나는 점의 개수를 a_n 이라

할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 52 ② 55 ③ 58 ④ 61 ⑤ 64

15. 실수 a, b, c, d 에 대하여, 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

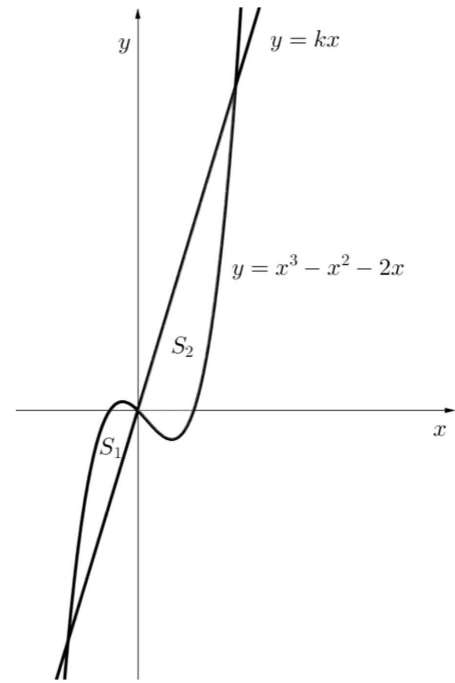
(가) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$
 (나) $\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$

함수 $f(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

- < 보 기 >
- ㄱ. $abcd \geq 0$
 - ㄴ. $ab < 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.
 - ㄷ. $ab > 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 다음 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $S_2 - S_1 = 18$ 일 때, 실수 k 의 값은? [4점]



- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$

17. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x < 1) \\ a - a|x - 2| & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 b 에 대하여 함수

$$g(x) = |x(x-2)| \int_b^x f(t) dt$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 최댓값은? [5점]

- ① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{29}{6}$ ③ 5 ④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

18. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & (x \neq 2) \\ 3 & (x = 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 3$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{h(x)} = \infty$ 이다.

(나) 방정식 $h(x) = 12$ 가 오직 하나의 실근을 가진다.

$h(0)$ 의 값은? [5점]

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = |f(x)| - f'(x)$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다음을 만족시킨다.

(가) $g(0) = f(0) = 1$

(나) 방정식 $|f(x)| = 3$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(다) 함수 $g(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분불가능한 실수 k 의 개수는 3이다.

$g(1)$ 의 값은? [5점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

20. 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2$ 이라 하자.

$-1 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$$

를 만족시키도록 하는 실수 t 의 최댓값은? [5점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

단답형

21. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [3점]

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n \text{은 홀수}) \\ \frac{a_n}{2} & (a_n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

(나) $a_5 = 1$

22. 자연수 n 에 대하여

$$\{x \mid x \leq \log_2(x+n), x \text{는 자연수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} f(n)$ 의 값을 구하시오.

[4점]

23. 다항함수 f, g 가 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(0) = 5, \quad f(x-g(y)) = (x+4y^2-1)^3 - 3$$

을 만족시킬 때, 함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 의 극댓값을 구하시오.

[4점]

24. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^4 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$(f'(x)+2)(f'(x)-2)=x(x-4) \text{이다.}$$

(나) $f(0) < f(4)$, $f(2) = 1$

25. 함수 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)$$

- 일 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n = p + q\sqrt{2}$ 이다. 정수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하시오. [5점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.