2025학년도 제1회

『挫折模擬考査』

『좌절모의고사』

목차

공통 해설

(2쪽부터 7쪽까지)

1. [2점] ◇◇◇

로그를 모두 단순화하면,

$$(\text{준식})=\left(\frac{1}{2}\log_3 2+2\log_3 2\right)\times\log_2 3=\frac{5}{2}$$

를 얻는다.

2. [2점] ◇◇◇

미분계수의 정의에 의하여,

$$(\text{준식})=-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1-h)}{(1-2h)-(1-h)}=-f'(1)$$

인데(참고해설), $f'(x)=5x^4-8x^3+7$이므로 $f'(1)=4$. 따라서 구하는 값은 $-f'(1)=-4$이다.

3. [3점] ◇◇◇

반지름의 길이를 r이라 할 때, 중심각의 크기가 3이므로 호의 길이는 $3r$이다. 따라서 부채꼴의 둘레의 길이는 $r+r+3r=5r$로 표현할 수 있는데, 이것이 20과 같으므로 $5r=20$에서 $r=4$.

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4^2\times 3=24$.

4. [3점] ◇◇◇

등차수열의 초항을 a, 공차를 d라 놓으면 첫째 식에 의하여 $\frac{8(2a+7d)}{2}=36$, 즉 $2a+7d=9$를 얻는다. 한편, 구하고자 하는 식은 $2(a+3d)-(a+4d)+(a+5d)=2a+7d$이므로 이와 똑같다. 따라서 답은 9.

5. [3점] ◇◇◇

주어진 함수의 그래프가 점 $(-2,1)$을 지나므로,

$1=(-2)^3+a(-2)+b$에서 $-2a+b=9$ ⋯ (ㄱ)

한편, 점 $(-2,1)$에서 접선은 원에서의 접선과 같으므로, 그 기울기가 2일 것이다. $y'=3x^2+a$에서 $2=3(-2)^2+a$이고, $a=-10$을 얻는다. (ㄱ)에 대입하면 $b=-11$이다. 따라서 $ab=110$.

6. [3점] ◈◇◇

(해제의 급소) 곱하거나 나눌 때는 0을 주의

> 방정식에 무언가를 곱하거나 나눌 때는 항상 조심! 만약 중위권 이상인데 이 문제를 틀렸다면 여기에서 걸렸을 것이다.

두 그래프의 교점의 개수는 $\frac{k}{x}+6=x^2$의 실근의 개수이다. 따라서 양변에 x를 곱하되, $x\neq 0$임을 반드시 확인한다.

$$k+6x=x^3 \quad\Rightarrow\quad x^3-6x=k$$

를 얻는다. $f(x)=x^3-6x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6$에서 $f(x)$는 $x=\pm\sqrt{2}$에서 극값 $\mp 4\sqrt{2}$를 갖는다. 즉 k는 $-4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2}$를 만족시켜야 한다.

그런데 이때 $x=0$을 근으로 갖는다면 실근의 개수가 2이므로 불가능하다. 따라서 $k=0$일 때의 이 상황을 제외해야 한다. $4\sqrt{2}=\sqrt{32}=5.\cdots$이므로 $k=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5$의 10개가 가능하다.

7. [3점] ◈◇◇

(해제의 급소 ①) 삼각함수의 각변환

> 삼각함수의 각변환은 자유자재로 할 수 있어야 한다.

(해제의 급소 ②) 삼각형의 넓이 공식

> 삼각형을 쪼갤 수 있다면 넓이 공식을 활용하는 것을 염두에 두고 있어야 한다.

$\angle ABC=45°$이다. 원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle AOC=90°$이므로, $\angle AOB=270°-\angle BOC$에서

$$\sin(\angle AOB)=-\cos(\angle BOC)=\frac{3}{5}$$

이며(참고해설), $\sin(\angle BOC)=\frac{4}{5}$이다.

이제 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$이라 놓는다. 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 AOB, BOC, AOC의 넓이의 합이다. 삼각형의 넓이 공식에 의하여,

$$\frac{1}{2}r^2\left(1+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=24$$

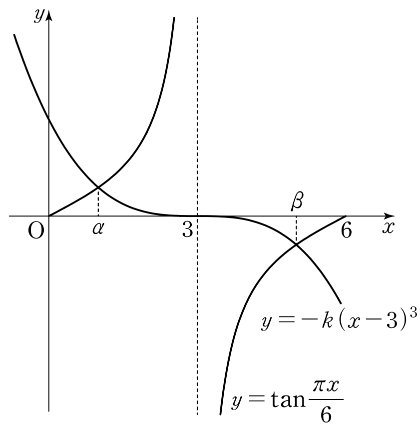
이다. 따라서 $r^2=20$으로 구할 수 있고, $r=2\sqrt{5}$.

8. [3점] ◈◇◇ [융합]

(해제의 급소) 대칭성을 이용한 삼각방정식의 근의 추론

> 삼각방정식의 근을 정확히 구할 수 없는 경우에는 근의 대칭성이 거의 유일한 방법이다.

$y=\tan\frac{\pi x}{6}$와 $y=-k(x-3)^3$의 교점의 x좌표가 α, β이다. 이때, 두 그래프는 모두 점 $(3,0)$에 대하여 점대칭이므로(참고해설) $\alpha+\beta=6$을 얻는다. 따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$ 중 하나를 근으로서 대입하면 $k=\frac{\sqrt{3}}{24}$.



9. [4점] ◆◈◇ [역배치]

(해제의 급소 ①) 함수의 선택

> 함수가 둘 이상의 다른 함수의 조합으로 나타날 때, 이 함수가 연속이려면 조합할 함수들의 교점에서만 함수를 바꿔야 한다.

(해제의 급소 ②) 정적분의 부호

> 절댓값과 관련된 정적분의 경우 적당히 범위를 나누어 분석한다.

조건 (나)에 의하여 $f(x)$의 값은 $3(x^2-4)$ 또는 $-3(x^2-4)$이고, 두 함수 중 아무거나 선택해도 문제 없다. 그런데 조건 (가)에 의하여 $f(x)$는 연속이므로, 선택을 바꾸는 것은 $x=\pm2$에서만 가능하다.

이때 $\int_{-3}^{7}(x+1)f(x)dx$의 값이 최소가 되려면, 구간을 $x<-2$, $-2 \le x \le 2$, $x>2$로 나누어 분석해야 한다. 먼저 $x<-2$에서는 $f(x) \ge 0$이어야 하고, $x>2$에서는 $f(x) \le 0$이면 된다. $-2 \le x \le 2$에서가 문제인데, 실제로 적분을 해 보면

$$\int_{-2}^{2}(x+1)(3x^2-12)dx = 2\int_{0}^{2}(3x^2-12)dx < 0$$

이므로 $-2 \le x \le 2$에서 $f(x)=3(x^2-4)$여야 한다. 따라서

$$g(x)=\begin{cases} 3(x^2-4) & (x \le 2) \\ -3(x^2-4) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 각 구간에서 함수 $g(x)$를 정적분하면,

$$\int_{-5}^{2}3(x^2-4)dx = \left[x^3-12x\right]_{-5}^{2} = 49,$$

$$\int_{2}^{3}-3(x^2-4)dx = \left[-x^3+12x\right]_{2}^{3} = -7.$$

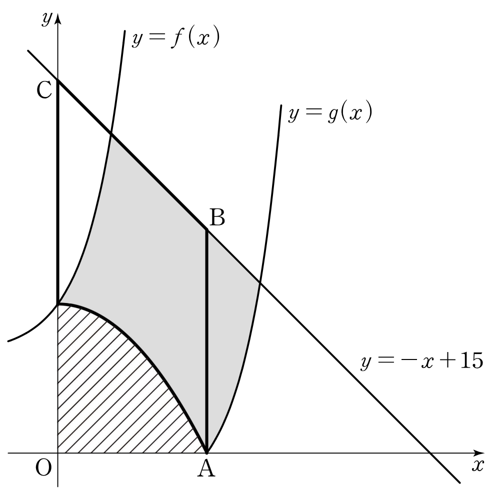
따라서 구하는 값은 $49-7=42$.

10. [4점] ◆◇◇ [융합]

〔해제의 급소〕 지수·로그함수의 평행이동과 나란한 직선

> 지수·로그함수의 평행이동의 방향과 나란한 직선이 주어진 경우, 교점, 선분 및 넓이 등이 그대로 보존된다.

그림에서와 같이 점 $\mathrm{A}(6,0)$, $\mathrm{B}(6,9)$, $\mathrm{C}(0,15)$를 잡고, $0 \le x \le 6$에서 포물선 $y=-\frac{1}{6}x^2+6$과 x축 사이의 빗금 친 영역을 R이라 하자.



이때 곡선 $y=2^{x-5}-2$는 곡선 $y=2^{x+1}+4$를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프이다. 평행이동의 방향이 직선 $y=-x+15$와 나란하므로, 색칠한 영역의 넓이는 사다리꼴 OABC에서 영역 R을 제거한 영역의 넓이와 같다.

사다리꼴 OABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(9+15)\times 6=72$이고, 영역 R의 넓이는 정적분 $\int_{0}^{6}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)dx=\left[-\frac{1}{18}x^3+6x\right]_{0}^{6}=24$로 구할 수 있다. 따라서 구하는 영역의 넓이는 $72-24=48$.

11. [4점] ◆◈◇ [과정]

〔해제의 급소 ①〕 과정형 문제에 대한 이해

> 과정형 문제가 많이 안 나온다고 연습을 게을리 해선 안 된다. 문맥을 통해 문제에서 무엇을 하고 싶은지를 추론해야 한다. 해설지를 많이 정독해 보는 것도 도움이 된다.

〔해제의 급소 ②〕 망원급수의 해결

> 망원급수인 것은 웬만하면 딱 보면 알 정도로 익숙해져야 한다.

(가)를 구하기 위해서는, 식을 변형하여

$$\frac{2}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

로 쓰면 된다. 망원급수에 의하여 (가)를 $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$로 구할 수 있다. 이제 (나)를 구하려면, 다음과 같이 부등식을 풀면 된다.

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)>2,$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{n+1}>\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1),$$

$$\Rightarrow\ n+1>4(\sqrt{2}+1)^2=12+8\sqrt{2}=23.\cdots$$

따라서 $n \ge 23$을 얻는다. 따라서 (나)는 23이다.

마지막으로 (다)를 구하는 과정은 (가)에서와 비슷하다. 식을 변형하면 $2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$이므로 망원급수에 의하여 (다)를 $3-\frac{2}{\sqrt{n}}$로 구할 수 있다.

따라서 $f(n)=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$, $g(n)=3-\frac{2}{\sqrt{n}}$, $p=23$이므로 구하는 값은 $23+\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2=31$.

12. [4점] ◆◇◇

〔해제의 급소 ①〕 속도, 위치 및 거리

> 위치, 속도, 가속도의 관계는 잘 알고 있어야 한다. 또, 거리의 경우 절댓값을 씌워주어야 한다는 것을 잊지 말자.

〔해제의 급소 ②〕 그래프의 개형과 미분가능성

> 절댓값함수가 미분가능하려면 x축과 만나는 모든 점에서 접선이 수평이어야 한다.

시각 t에서 점 P의 위치를 $g(t)$라 두면, $f(t)=|g(t)-3|$이다. 이때 $g(t)=t^3-9t^2+kt+C$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다. 한편, 조건 (나)에 의하여 시각 $t=m$에서 점 P의 위치는 음수이다. 따라서, 곡선 $y=g(t)$는 $y=3$과 $t>m$인 곳에서 만난다. 이 교점의 t좌표를 p라 두자.

조건 (가)에 의하여 $f(t)$는 $t>0$에서 미분가능하므로, $g'(p)=0$이어야 한다. 따라서 $g(t)=(t-p)^2(t-q)+3$로 놓을 수 있다(참고해설). 이때 $q \le 0$이면 $g(t)$는 $t \ge 0$에서 항상 양수이므로 조건 (나)에 위배된다. 따라서 $q>0$인데, 이때 $q \ne p$이면 $f(t)$가 $t=q$에서 미분가능하지 않다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 $q=p$이고, $g(t)=(t-p)^3+3$이다.

계수비교를 통하여 $p=3$임을 알 수 있다. $g(t)=(t-3)^3+3$인 것이다. 이때 자연수 m은 $g(m)<0$을 만족시킨다. 따라서 $m=1$이어야 하고, 구하는 값은 $g(1)=-5$.

13. [4점] ◆◈◇ [계산]

〔해제의 급소 ①〕 극한의 수렴성 활용

> 극한이 수렴한다는 문장이 주어질 때는 분모가 0으로 가는지를 필수로 확인한다. 분모가 0으로 가지 않으면 별 볼 일 없이 수렴하는 경우가 대부분이기 때문이다.

〔해제의 급소 ②〕 사차함수 그래프의 선대칭

> 사차함수 개형에서 국밥 포지션 중 하나가 W자 모양으로 대칭인 함수이다. 사차함수 개형 문제에선 이것을 항상 염두에 두어야 한다.

조건 (나)에서 분모가 0이 되는 a값이 아닌 이상 극한은 무조건 수렴한다. 따라서 방정식 $x^3-16x-21=0$의 해를 구한다.

$$x^3-16x-21=(x+3)(x^2-3x-7)$$

로 인수분해되므로 주어진 방정식의 실근은 3 및 $\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{2}$인데, a는 무리수이므로 $a=\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{2}$일 때만을 고려하면 된다.

위 문단의 상황에서 $f(a)=0$이어야 주어진 극한이 수렴하므로, $f(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖는다. 따라서, $f(x)$는 (x^2-3x-7)을 인수로 가지므로, $f(x)=16(x^2-3x-7)(x^2+px+q)$로 놓을 수 있다.

두 미정계수 p와 q를 모르는 상태에서 극댓값을 구하지는 못할 것이므로 조건 (다)를 먼저 적용한다.
$f'(x)=16\{(2x-3)(x^2+px+q)+(x^2-3x-7)(2x+p)\}$로 구할 수 있으므로 $f'(-1)+f'(4)=0$에서

$$f'(-1)=16\{(-5)(1-p+q)+(-3)(-2+p)\},$$
$$f'(4)=16\{5(16+4p+q)+(-3)(8+p)\}$$
$$\Rightarrow\ f'(-1)+f'(4)=16\{5(15+5p)-3(6+2p)\}=0$$
$$\Rightarrow\ 19p+57=0 \quad \Rightarrow\ p=-3.$$

따라서 $f(x)=(x^2-3x-7)(x^2-3x+q)$이다. 이때 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지고, $f(x)$의 식에서 $f(x)$가 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭임을 확인할 수 있으므로 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=37$이다.

$$16\times\left(-\frac{37}{4}\right)\times\left(-\frac{9}{4}+q\right)=37$$

에서 $q=2$여야 한다. $f(3)=16\times(-7)\times2=-224$.

(직관적 풀이)

사실 함수 $f(x)$를 $16(x^2-3x-7)(x^2+px+q)$로 구했을 때 조건 (나)를 보고 대칭성을 떠올려야 한다. 이미 x^2-3x-7은 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭인데, $f'(-1)=-f'(4)$라는 것은 함수 $f(x)$ 전체가 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭이어야 한다는 직관을 준다. 따라서 $p=-3$을 별도의 계산 없이 "찍을" 수 있다.

14. [4점] ◆◆◇

〔해제의 급소 ①〕 외접원의 반지름의 길이

> 외접원의 반지름의 길이나 외접원의 넓이가 주어진 경우에는 거의 항상 사인 법칙을 사용한다.

〔해제의 급소 ②〕 삼각함수의 최대·최소

> 사인함수의 최댓값이 일어나는 것은 90°에서이다.

선분 BN의 중점을 L이라 놓자. 이때 주어진 문제는 $\overline{\mathrm{MQ}}=4$, $\overline{\mathrm{LM}}=1$, $\overline{\mathrm{LP}}=3$이라는 것과 다를 것이 없다. 삼각형 MPQ의 외접원의 넓이가 최소가 되려면, 외접원의 반지름의 길이 R이 최소가 되어야 한다. 따라서 사인 법칙을 이용해야 함을 추론할 수 있다. 삼각형 PMQ에서 현재 알고 있는 각은 없고, 알고 있는 변은 MQ가 유일하므로,

$$2R\times\sin(\angle\mathrm{MPQ})=\overline{\mathrm{MQ}}$$

에서 R이 최소가 되려면 $\sin(\angle\mathrm{MPQ})$가 최대가 되어야 함을 알 수 있다.

그런데 그림에서 $\angle\mathrm{MPQ}$가 아무 각이나 될 수 있다고 말하기 어려우므로, $\angle\mathrm{MPQ}$와 관련된 다른 각을 찾아본다. 사인 법칙을 적용하여 관계지을 수 있는 각 $\angle\mathrm{LMP}$를 생각해보는 것이 자연스럽다. 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{LP}}}{\sin(\angle\mathrm{LMP})}=\frac{\overline{\mathrm{LM}}}{\sin(\angle\mathrm{MPQ})},$$
$$\sin(\angle\mathrm{MPQ})=\frac{1}{3}\sin(\angle\mathrm{LMP})$$

를 얻는다. 따라서 $\sin(\angle\mathrm{LMP})$가 최대가 되어야 한다. 이때, $\angle\mathrm{LMP}$는 0에서 π까지의 모든 각을 취할 수 있음이 그림으로부터 당연하므로, $\angle\mathrm{LMP}=90^\circ$여야 한다.

이 상황에서 $\cos(\angle\mathrm{MLP})=\dfrac{1}{3}$이므로, $\cos(\angle\mathrm{MLQ})=-\dfrac{1}{3}$임을 알 수 있다. 이제 $\overline{\mathrm{LQ}}=x$로 놓고 삼각형 LMQ에서 코사인 법칙을 적용하면,

$$x^2+1^2-2\times1\times x\times\left(-\frac{1}{3}\right)=4^2,$$
$$x^2+\frac{2}{3}x-15=0,\quad x=\frac{-1+2\sqrt{34}}{3}\ (\because x>0)$$

를 얻는다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=3+\dfrac{-1+2\sqrt{34}}{3}=\dfrac{8+2\sqrt{34}}{3}$.

(다른 풀이)

$\angle\mathrm{LMP}=90^\circ$임을 추론한 이후, 코사인 법칙을 삼각형 MPQ에 적용하여 풀 수도 있다. $\cos(\angle\mathrm{MPQ})=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이고 $\overline{\mathrm{MP}}=2\sqrt{2}$로 쉽게 구할 수 있기 때문이다.

15. [4점] ◆◆◈ [고난도] [융합]

〔해제의 급소 ①〕 귀납적으로 정의된 수열에서의 문제해결

> 귀납적으로 정의된 수열은 무조건 첫째항부터 시작하기보다, 주어진 부등식이나 등식과 관련된 항만을 먼저 고려한다.

〔해제의 급소 ②〕 거듭제곱근 중 실수인 것의 개수

> 홀수제곱근 중 실수인 것의 개수는 무조건 1이고, 짝수제곱근 중 실수인 것의 개수는 부호를 기준으로 경우를 나눈다.

조건 (가)를 우선적으로 해석해 보자. 우선 함수 $y=x^3+x+1$의 경우, $y'=3x^2+1>0$이므로 항상 증가한다. 따라서 각 실수 k에 대하여 $x^3+x+1=k$의 실근은 하나뿐이다. 다시 말해, 곡선 $y=(x^3+x+1)^{n+1}$이 직선 $y=a_n$과 만나는 서로 다른 점의 개수는, a_n의 $(n+1)$제곱근 중 실수인 것의 개수와 같다. 따라서 b_n을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} n\text{이 짝수이면 } b_n=1, \\ n\text{이 홀수이면 } b_n=\begin{cases} 0 & (a_n>0) \\ 1 & (a_n=0) \\ 2 & (a_n<0) \end{cases} \end{cases}$$

이제 이를 바탕으로 조건 (나)를 해석해 보자. 위에서 진행한 분석에 의하여 $a_{n+1}=a_n+9$인 것은 $b_n=0$, 즉 n이 홀수이고 $a_n>0$일 때만이다. 나머지 경우에는 무조건 $a_{n+1}=a_n-2$이다.

조건을 모두 분석했으니, 주어진 정보를 통해 수열 $\{a_n\}$에 대한 추론을 한다. $10<a_5\times a_8<20$이므로, $a_5=k$라 놓고 a_8까지의 상황을 분석하자.

우선 a_6과 a_7의 관계는 명확하다. 6은 짝수이므로 $a_7=a_6-2$가 무조건 성립하기 때문이다. 불명확한 것은 a_5와 a_6의 관계 및 a_7과 a_8의 관계이다.

(ⅰ) $a_5\ge 0$이고 $a_7\ge 0$인 경우

$a_6=a_5-2=k-2$, $a_7=a_6-2=k-4$, $a_8=a_7-2=k-6$으로 구할 수 있고, 이때 $a_5\ge 0$ 및 $a_7\ge 0$에서 $k\ge 4$여야 하며, 주어진 조건에 의하여 $10<k(k-6)<20$이다. 이를 만족시키는 정수 k의 값은 8뿐임을 쉽게 확인할 수 있다.

(ⅱ) $a_5\ge 0$이고 $a_7<0$인 경우

$a_6=k-2$, $a_7=k-4$, $a_8=k+5$로 구할 수 있고, 이때 $a_5\ge 0$ 및 $a_7<0$에서 $0\le k<4$여야 하며, 주어진 조건에 의하여 $10<k(k+5)<20$이다. 이를 만족시키는 정수 k의 값은 2뿐임을 쉽게 확인할 수 있다.

(ⅲ) $a_5<0$이고 $a_7\ge 0$인 경우

위와 비슷한 방법으로 $a_8=k+5$이고, $-7\le k<0$이며, $10<k(k+5)<20$이다. 이러한 정수 k는 -7뿐.

(ⅳ) $a_5<0$이고 $a_7<0$인 경우

위와 비슷한 방법으로 $a_8=k+16$이고, $k<-7$이며, $10<k(k+16)<20$이다. 이러한 정수 k는 -17뿐.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여 a_5로 가능한 정수의 값은 -17, -7, 2, 8뿐이다. a_4로 가능한 정수는 -15, -5, 4, 10뿐이고, a_3으로 가능한 정수는 -24, -14, -5, 6, 12뿐이며, a_2로 가능한 정수는 -22, -12, -3, 8, 14뿐이고, 마지막으로 a_1로 가능한 정수는 -31, -21, -12, -1, 10, 16뿐이다.

$|a_1|$의 값으로 가능한 정수는 따라서 1, 10, 12, 16, 21, 31의 6개뿐이고, 이들의 합은 91이다.

16. [3점] ◇◇◇

x^3-x^2+3의 한 부정적분이 $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+3x$이므로,

$$\int_0^1(x^3-x^2+3)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+3\right]_0^1=\frac{35}{12}$$

이다. 따라서 $p+q=12+35=47$.

17. [3점] ◇◇◇

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2\pi}{3}\right]$에서 $\sin x$의 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

따라서, $3\sin x-1$의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이며, $|3\sin x-1|$의 최댓값은 2, 최솟값은 0이다. 즉, $f(x)=|3\sin x-1|+8$의 최댓값은 10, 최솟값은 8이므로, $M=10$, $m=8$이며, $10M+m=108$.

18. [3점] ◈◇◇

$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$이므로, $\lim_{x\to\infty}f(x+1)=L$이다. 주어진 식을 약간 변형하면

$$2\{f(x)\}^2-4f(x+1)+\frac{-5x}{2x+5}=0$$

과 같이 쓸 수 있고, $x\to\infty$의 극한을 취하면 $2L^2-4L-\frac{5}{2}=0$을 얻는다. $4L^2-8L-5=0$에서 $(2L-5)(2L+1)=0$인데 $L<0$이므로 $L=-\frac{1}{2}$이다. $-100\times L=50$.

19. [3점] ◆◇◇ [계산]

〔해제의 급소〕 구간이 상수인 정적분을 포함하는 등식

> 구간이 상수인 정적분이 포함된 식에서는 그 정적분을 상수로 놓고, 다시 그 상수의 정의식에 대입을 하는 과정을 거쳐야 한다.

주어진 식을 정리하면

$$f(x)=12x^2+2\int_0^1 tf(t)dt+x\int_0^1 f(t)dt$$

로 쓸 수 있다. 이때, $a=\int_0^1 f(t)dt$, $b=\int_0^1 tf(t)dt$라 놓으면, $f(x)=12x^2+ax+2b$가 된다. 이를 다시 두 상수 a, b의 정의식에 대입하면,

$$a=\left[4x^3+\frac{1}{2}ax^2+2bx\right]_0^1=4+\frac{1}{2}a+2b,$$

$$b=\left[3x^4+\frac{1}{3}ax^3+bx^2\right]_0^1=3+\frac{1}{3}a+b$$

이고, 두 번째 식에서 $a=-9$이다. 이를 첫 번째 식에 대입하면,

$$-9=4-\frac{9}{2}+2b \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{17}{4}.$$

따라서 $f(x)=12x^2-9x-\frac{17}{2}$이고,

$$\int_{-1}^3 f(x)dx=\left[4x^3-\frac{9}{2}x^2-\frac{17}{2}x\right]_{-1}^3=42.$$

20. [4점] ◆◆◈ [고난도] [역배치] [함정]

〔해제의 급소 ①〕 조건 면밀하게 살피기

> 이 문제에서 x에 붙은 "유리수"라는 조건을 간과하면 함정에 걸리고 만다. 문제의 모든 토씨와 용어는 쓸모없는 것이 없으므로 모든 것을 면밀하게 살피는 것이 중요하다.

〔해제의 급소 ②〕 복잡한 명제의 해석

> 사실상 국어 능력이나 다름없다. 복잡한 문장구조나 명제가 포함된 문제는 하나하나 천천히 생각하면서 의미를 되짚어보는 것이 필요하다.

우선, 주어진 부등식을 정리하면

$$4^x+n>k\times 2^{x+1} \quad \Rightarrow (2^x-k)^2>k^2-n$$

과 같다. 이때, $k^2<n$이라면 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립할 것이다. 또한, $k^2>n$이라면 부등식이 성립하지 않도록 하는 유리수 x가 무조건 존재할 것이다(참고해설).

한편, $k^2=n$이면, 부등식은 $(2^x-k)^2>0$과 같은 꼴인데, 여기서 k가 2의 거듭제곱이면 $x=\log_2 k$는 유리수로서 위 부등식을 만족시키지 않는다. k가 2의 거듭제곱이 아니면 위 부등식은 모든 유리수 x에 대하여 성립한다.

조건 p를

p: "주어진 부등식이 모든 유리수 x에 대하여 성립한다"

라 하자. 위 내용을 종합해 보면 조건 p는

"$n>k^2$이 성립하거나,
$n=k^2$이고 k가 2의 거듭제곱이 아니다"

의 필요충분조건이다. 또한, $\sim p$는

"$n<k^2$이 성립하거나,
$n=k^2$이고 k가 2의 거듭제곱이다"

의 필요충분조건이다.

구하는 것은 $\{f(n)\}^2-8n+15=0$, 즉 $f(n)=3$ 또는 $f(n)=5$인 모든 자연수 n의 값의 합이다. 우선 $f(n)=3$인 경우부터 살핀다.

$f(n)=3$이라는 것이 무슨 말인가? "p가 참인 자연수 k의 값의 개수가 3이다"라는 문장과 같은 말이다. 따라서 이를 "$k=3$일 때 p가 참이고, $k=4$일 때는 p가 거짓이다"라고 해석할 수 있다.

$k=3$일 때 p가 참이려면, k가 2의 거듭제곱이 아니므로 $n\ge 9$이면 된다. 한편, $k=4$일 때 p가 거짓이려면, k가 2의 거듭제곱이므로 $n\le 16$이면 된다. 다시 말해 $9\le n\le 16$.

마찬가지의 방법으로 $f(n)=5$를 풀어보자. $f(n)=5$는 "$k=5$일 때 p가 참이고, $k=6$일 때 p가 거짓이다"와 같은 말이다. $k=5$일 때 p가 참이려면, k가 2의 거듭제곱이 아니므로 $n\ge 25$이면 된다. 한편, $k=6$일 때 p가 거짓이려면, k가 2의 거듭제곱이 아니므로 $n<36$이면 된다. 즉, $25\le k<36$.

따라서, 자연수 n의 값의 합은

$$(9+\cdots+16)+(25+\cdots+35)$$
$$=\frac{7\times(9+16)}{2}+\frac{11\times(25+35)}{2}=430$$

으로 구할 수 있다.

21. [4점] ◆◆◇ [신유형]

〔해제의 급소 ①〕 규칙성 찾기

> 주어진 수열을 수학적으로 간단하게 생각할 수 있는 방법은 사실상 없다. 그저 나열하면서 규칙성을 살필 뿐.

〔해제의 급소 ②〕 예외의 후보 찾기

> 예외적인 경우가 나올 수 있는 후보군을 미리 골라 놓는 것은 경우를 나누어 일일이 세어야 하는 모든 문제에서 유용하다.

각 자연수 n에 대하여 $b_n=a_{3n-1}-a_{3n-2}$로 정의하자. 이제 b_n의 값을 순서대로 구해 보면,

$b_1=a_2-a_1=2-1=1$,
$b_2=a_5-a_4=5-4=1$,
$b_3=a_8-a_7=8-7=1$,
$b_4=a_{11}-a_{10}=2-1=1$, $\cdots$

계속 1이 나온다. 그런데 만약에 정말로 계속 1만 나오는 것이라면 문제가 성립할 리가 없다. 따라서 예외가 나올 것임을 예측할 수 있고, 예외가 나오려면 $3n-2$에서 $3n-1$로 넘어갈 때 일의 자리가 9에서 0으로 넘어가야 할 것이다.

$$3n-1=10, 20, 30, 40, \cdots$$

을 풀면 $n=7, 17, 27, \cdots$을 얻는다. 실제로

$b_7=a_{20}-a_{19}=-8$,
$b_{17}=a_{50}-a_{49}=-8$, $\cdots$

과 같이 나온다. 이제 $c_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$로 놓으면,

$c_1=1,\quad c_2=2,\quad \cdots,\quad c_6=6,\quad c_7=-2,$
$c_8=-1,\quad c_9=0,\quad c_{10}=1$

이고, 이것이 "한 묶음"이 된다. 그 다음 묶음은

$c_{11}=2,\quad c_{12}=3,\quad \cdots,\quad c_{16}=7,\quad c_{17}=-1,$
$c_{18}=0,\quad c_{19}=1,\quad c_{20}=2$

로, 이전 묶음보다 모든 항이 1씩 커졌다. 하지만, 이것이 계속 반복된다면 $c_n<-3$인 n이 존재하지 않을 것임이 분명하다. 따라서 분명히 어떤 예외가 있을 것이다.

$b_7=b_{17}=b_{27}=b_{37}=b_{47}=b_{57}=-8$이지만,
$b_{67}=a_{200}-a_{199}=-17$

이다. 이 이후로는 $b_{77}=b_{87}=b_{97}=-8$이므로 더이상의 예외는 없다. 따라서,

$c_6=6,\quad c_{16}=7,\quad c_{26}=8,\quad c_{36}=9,\quad c_{46}=10,$
$c_{56}=11,\quad c_{66}=12$

이므로 $c_{67}=c_{66}+b_{67}=-5$이다. $c_{68}=-4$, $c_{69}=-3$임은 당연하다. 이제 이 다음 묶음에서 $c_{77}=-4$일 것이므로 $c_n<-3$인 두 자리 자연수 n은 67, 68, 77의 세 개뿐이다.
$67+68+77=212$.

22. [4점] ◆◆◆ [최고난도] [계산] [신유형]

〔해제의 급소 ①〕 치역의 개념

> 치역에 속한다는 것은 함숫값에 대응하는 정의역의 원소가 존재한다는 뜻이다. 이 개념을 명확하게 가지고 있어야 한다.

〔해제의 급소 ②〕 섬세한 예외 분석

> h(x)의 치역을 결정하는 과정에서 임의로 넣고 뺄 수 없는 예외적 원소가 무엇인지 파악해야 한다.

〔해제의 급소 ③〕 힘세고 강한 집중력

> 생겨먹은 것과 달리 호흡이 매우 긴 문제이다. 중간에 집중력을 잃지 않고 끝까지 전체적인 논리의 흐름을 유지하는 것이 중요하다.

함수 $g(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이므로, $f(h(x)-9)$의 치역 또한 실수 전체의 집합이어야 한다. 함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=3x^2-14x-40=(3x-20)(x+2)$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $L_{\max}$를, $x=\dfrac{20}{3}$에서 극솟값 $L_{\min}$을 갖는다.

우선 방정식 $f(x-9)=a$의 서로 다른 실근의 개수 k에 대하여 생각해 보자. k의 값은 a의 값의 범위에 따라

$$k=\begin{cases}1 & (a<L_{\min} \text{ or } a>L_{\max})\\ 2 & (a=L_{\min} \text{ or } a=L_{\min})\\ 3 & (L_{\min}<a<L_{\max})\end{cases}$$

로 구할 수 있다.

만약 $k=1$이면 $f(x-9)=a$의 유일한 실근 p는 반드시 $h(x)$의 치역에 속해야 한다. 우리가 관심이 있는 것은 $h(x)$의 치역에 속하지 않는 정수이므로 이러한 실근 p에는 관심을 둘 필요가 없다. 따라서 이러한 실근을 제외한 나머지, 즉 $L_{\min}\le f(x-9)\le L_{\max}$인 x의 값의 범위를 구해 놓는다.

인수정리에 의하여

$$f(x)=(x+2)^2(x-11)+L_{\max},$$
$$f(x)=\left(x-\frac{20}{3}\right)^2\left(x+\frac{19}{3}\right)+L_{\min}$$

으로 구할 수 있으므로, 부등식 $L_{\min}\le f(x-9)\le L_{\max}$를 풀면 $\dfrac{8}{3}\le x\le 20$이다. 따라서 $h(x)$의 치역에서 제외되는 것이 가능한 정수는 3부터 20까지의 정수뿐이다.

이제 $k=2$인 경우를 생각해 보자. $a=L_{\min}$이면 두 실근은 정수가 아니므로 관심 외이다. $a=L_{\max}$이면 두 실근은 $x=7$ 및 $x=20$인데 이는 정수이므로 관심을 가져야 한다. 두 실근 중 적어도 하나는 $h(x)$의 치역에 속해야 한다는 것은 당연한데, 둘 다 속한다면 어떨까? 이렇게 되려면 $h(z_1)=7$이고 $h(z_2)=20$인 두 실수 z_1 및 z_2가 존재해야 하는데,

$$f(h(z_1)-9)=f(h(z_2)-9)=L_{\max}$$

이므로, $g(z_1)=g(z_2)=-L_{\max}$여야 한다. 이때 $L_{\max}=f(-2)=44$이므로 $g(z_1)=g(z_2)=-44$여야 하는데 $g(x)=0$의 실근은 한 개뿐이므로 모순이다.

마지막으로 $k=3$인 경우를 생각해 본다. 이때 $f(x-9)=a$의 세 실근 중에서 정수인 것의 개수를 기준으로 경우를 나눈다.

(ⅰ) 정수인 것이 없는 경우

관심 외의 상황이므로 무시한다.

(ⅱ) 정수인 것이 하나뿐인 경우

정수인 실근을 p, 정수가 아닌 한 실근을 골라 q라 하자. 이때 p가 치역에 속하게 하려면 $f(h(x)-9)=a$의 각 실근 z에 대하여 $h(z)=p$로 놓으면 된다. p가 치역에 속하지 않게 하려면 $h(z)=q$로 놓으면 된다. 따라서 p는 치역에 속하든 속하지 않든 관계없다.

(ⅲ) 정수인 것이 둘뿐인 경우

정수인 두 실근을 p_1, p_2, 정수가 아닌 실근을 q라 놓으면 p_1-9, p_2-9, $q-9$는 $f(x)=a$의 서로 다른 세 실근이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$$(p_1-9)+(p_2-9)+(q-9)=7$$
$$\Rightarrow q=34-p_1-p_2$$

인데, q가 정수가 아니라는 가정에 모순이다.

(ⅳ) 모든 실근이 정수인 경우

정수인 세 실근을 p_1, p_2, p_3 $(p_1<p_2<p_3)$이라 놓자. 이때 $f(x)=a$의 서로 다른 세 실근은 p_1-9, p_2-9, p_3-9이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 가장 작은 실근인 p_1-9는 $-6\le p_1-9<-2$여야 한다는 사실을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서, $f(x)$를 $(x+6)$, $(x+5)$, $(x+4)$, $(x+3)$으로 나누어서 그 몫이 인수분해되는지 확인하면 된다.
나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+3)(x^2-10x-10)+f(-3)\\&=(x+4)(x^2-11x+4)+f(-4)\\&=(x+5)(x^2-12x+20)+f(-5)\\&=(x+6)(x^2-13x+38)+f(-6)\end{aligned}$$

이고, 이 중에서 몫이 정수의 범위에서 인수분해되는 것은

$$f(x)=(x+5)(x-2)(x-10)+f(-5)$$

뿐이다. 따라서 p_1-9, p_2-9, p_3-9로 가능한 것은 -5, 2, 10뿐이므로, $p_1=4$, $p_2=11$, $p_3=19$이고, 이때 a의 값은 $f(-5)=-140$이다.

이 경우 $h(x)$는 p_1, p_2, p_3 중에서 적어도 하나를 치역의 원소로 가져야 한다. 이 중에서 두 개를 치역의 원소로 가질 수 있을까? 세 개는 어떤가? 이때 $k=2$에서 했던 분석을 떠올려 보면 $g(z)=-a$의 서로 다른 실근의 개수를 따져볼 생각을 할 수 있다. $a=-100$이므로 $g(z)=100$의 실근의 개수를 세면 되는데, 당연히 한 개이다. 따라서 p_1, p_2, p_3 중에서 정확히 하나만을 치역의 원소로 가져야 한다.

위의 분석에 의하여, $h(x)$의 치역에 속하는 정수는 다음의 규칙을 따른다.

- 7, 20 중 하나만이 치역에 속한다.
- 4, 11, 19 중 하나만이 치역에 속한다.
- 나머지 3부터 20까지의 정수는 상관없다.
- 이를 제외한 나머지 정수는 모두 치역에 속한다.

이제 최솟값과 최댓값을 구하는 일만 남았다.

최솟값을 구하려면 최대한 많은 정수를 치역에 넣어야 한다. 따라서 4, 7 및 11을 뺀 모든 정수를 치역에 넣으면 조건을 충족시킬 수 있다. 즉 $m=4+7+11=22$이다.

최댓값을 구하려면 최대한 많은 정수를 치역에서 제외시켜야 한다. 따라서 3부터 20까지의 정수를 치역에서 제외하되, 4와 7만은 치역에 넣는다. 이때 $M=(3+\cdots+20)-(4+7)=196$을 얻는다.

따라서 $M+10m=196+220=416$.

선택과목 해설 [확률과 통계]

(8쪽에서 10쪽까지)

23. [확통/2점] ◇◇◇

$\mathrm{V}(X) = 450p(1-p)$이고 $\sigma(X) = 10$에서

$$450p(1-p) = 100 \quad \Rightarrow 9p^2 - 9p + 2 = 0$$
$$\Rightarrow (3p-1)(3p-2) = 0$$

이므로, $p = \dfrac{1}{3}$ 또는 $p = \dfrac{2}{3}$이다. 따라서 p의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$.

24. [확통/3점] ◇◇◇

주어진 방정식을 다시 쓰면 $2(x+z+w)+3y=15$이고, 정수 y의 값으로 가능한 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입할 때 $x+z+w$로 가능한 자연수는 $y=1$일 때 6, $y=3$일 때 3, $y=5$일 때 0이 있다. 각각의 경우에 (x, z, w)로 가능한 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6$, ${}_3\mathrm{H}_3$, ${}_3\mathrm{H}_0$이므로, 구하는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_6 + {}_3\mathrm{H}_3 + {}_3\mathrm{H}_0 = {}_8\mathrm{C}_6 + {}_5\mathrm{C}_3 + 1 = 39.$$

25. [확통/3점] ◈◇◇ [신유형]

(해제의 급소) 독립의 의미

> 이 문제는 독립의 정확한 뜻을 물어보고 있다. 두 사건이 독립이라는 것은 한 사건이 일어나든 일어나지 않든 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 미치지 않는다는 뜻이라는 것을 기억하자.

8월의 어떤 날에 지역 E의 최고기온이 $k\,°\mathrm{C}$ 이상인 사건을 A, 그날 지역 E에 눈이 오는 사건을 B라 할 때, 두 사건 A와 B가 서로 독립이라는 것은

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c)$$

와 같다. 즉, 눈이 올 때 최고기온이 $k\,°\mathrm{C}$ 이상일 확률과 눈이 오지 않을 때 최고기온이 $k\,°\mathrm{C}$ 이상일 확률이 같아야 한다.

눈이 올 때 최고기온을 $X\,°\mathrm{C}$, 오지 않을 때 최고기온을 $Y\,°\mathrm{C}$로 놓으면, $X \sim \mathrm{N}(-2, 1^2)$이고 $Y \sim \mathrm{N}(1, 4^2)$이다. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\frac{X+2}{1} \sim Z, \quad \frac{Y-1}{4} \sim Z$$

이므로, 다음과 같은 방정식을 세울 수 있다.

$$\mathrm{P}(X \geq k) = \mathrm{P}(Y \geq k)$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(Z \geq k+2) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{k-1}{4}\right)$$

위 방정식에서 $k+2 = \dfrac{k-1}{4}$여야 하므로, $k=-3$이다.

26. [확통/3점] ◆◇◇ [계산]

두 번 던져 나온 눈을 순서대로 a, b라 할 때, $A \cap B$의 각 원소에 대하여 $a+b$의 값은 다음과 같다.

b \ a	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
5	6	7	8	9

이때, 주어진 조건은 $n(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{2} \times n(C)$와 같으므로, 각 자연수 m에 대하여 $n(A \cap B \cap C)$와 $n(C)$의 값을 구해 본다.

m	$n(C)$	$n(A \cap B \cap C)$
≤ 2	0	0
3	1	
4	3	1
5	6	3
6	10	5
7	15	8
8	21	10
9	26	11
≥ 10	≥ 30	12

위 표에 의하여, 자연수 m의 값으로 가능한 것은 1, 2, 5, 6뿐이다. 구하는 답은 $1+2+5+6=14$.

27. [확통/3점] ◆◈◇

(해제의 급소) 여사건의 복잡한 활용

> 여사건을 이용할 때, 간단한 문제에서는 "주어진 조건을 만족하지 않는 모든 것"을 전체에서 빼서 구할 수 있지만, 복잡한 문제는 이보다 더 섬세한 경우 나누기가 필요하다.

우선 (나)를 만족시키지 않는 함수 f의 개수를 구한다. 전체에서 이 개수를 빼면 (나)를 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있다. 그 후에 (나)를 만족시키지만 (가)는 만족시키지 않는 함수 f의 개수를 구한 다음, 이것을 이전에 구한 개수에서 빼면, 구하는 답이 나올 것이다.

(나)를 만족시키지 않으려면, $f(1)+f(2)=f(3)+2$여야 하고, $f(3)=1, 2, 3, 4$가 가능하다. 각각의 경우에 $f(1)$ 및 $f(2)$를 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 3이고, $f(4)$는 자유롭게 정할 수 있으므로,

$$(2+3+4+3) \times 4 = 48$$

개의 함수가 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 전체 함수의 개수는 $4^4=256$이므로, 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수 f의 개수는 $256-48=208$이다.

한편, (나)를 만족시키면서 (가)를 만족시키지 않으려면, $f(1)+f(2) \neq f(3)+2$이면서 f의 치역 Y의 모든 원소의 합이 3 이하여야 한다. 즉, 집합 Y는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$ 중 하나여야 한다. 집합 Y가 $\{3\}$이면 아무 문제가 없다. 만약 $Y \subset \{1, 2\}$인 경우, 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 것은

$$(1, 1, 1),\ (1, 1, 2),\ (1, 2, 2),\ (2, 1, 2),\ (2, 2, 1)$$

의 5가지뿐이고 $f(4)$는 1과 2 중에서 자유롭게 정할 수 있다. 그러므로, 문단 앞머리의 경우의 수는 $1+5\times 2=11$이다.

따라서 위 과정에 의하여 구하는 경우의 수는

$$208-11=197$$

이 됨을 알 수 있다.

28. [확통/4점] ◆◆◇ [함정]

〔해제의 급소〕 곱의 법칙의 활용

> 곱의 법칙을 활용하여 경우의 수를 계산할 때는, 각 상황에 대응되는 경우의 수가 모두 같다는 것을 전제로 해야 한다. 그렇지 않을 경우 상황 별로 경우의 수를 따로 구한다.

우선 조건 (나)에 의하여, 정사각형 A_1에 네 개의 수 1, 2, 3, 4를 중복을 허용하지 않고 임의로 넣을 수 있고, 이러한 방법의 수는 24가지이다. 이때 어떻게 넣더라도 각각의 경우의 수는 다르지 않으므로, 1, 2, 3, 4를 넣어 다음과 같은 상황이 되었다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
1행	1	2	x_1	x_2
2행	3	4	x_3	x_4
3행	y_1	y_2	z_1	z_2
4행	y_3	y_4	z_3	z_4

조건 (가)에 의하여 (x_1, x_2)은 $(3, 4)$ 또는 $(4, 3)$이다. 이때, $(x_1, x_2)=(4, 3)$인 경우, 3열과 4열의 위치를 바꾸면 $(x_1, x_2)=(3, 4)$인 각 경우와 일대일 대응 관계가 만들어진다. 따라서 $(x_1, x_2)=(3, 4)$로 놓고 전체 경우의 수를 두 배 하여도 된다. 마찬가지의 방법으로 $(y_1, y_3)=(2, 4)$로 놓고 전체 경우의 수를 두 배 하여도 된다. 이때, A_4에서 4를 넣을 수 있는 곳은 z_1뿐이므로 $z_1=4$이다.

1	2	3	4
3	4	x_3	x_4
2	y_2	4	z_2
4	y_4	z_3	z_4

이제 x_3과 x_4 중 하나에는 1이 들어가야 하므로, 이를 기준으로 경우를 나눈다.

(ⅰ) $x_3=1$인 경우
$x_4=2$, $z_3=2$여야 한다. 이제 y_2, y_4 중 하나에 1이 들어가고, 각각의 경우 (y_2, z_2, y_4, z_4)는 $(1, 3, 3, 1)$ 또는 $(3, 1, 1, 3)$이 되므로, 이때의 경우의 수는 2이다.

(ⅱ) $x_4=1$인 경우
$x_3=2$, $z_3=1$, $y_2=1$, $y_4=3$, $z_2=3$, $z_4=2$로 정해지므로, 이때의 경우의 수는 1이다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 경우의 수는 3이 나오고, 구하는 전체 경우의 수는

$$3\times2\times2\times24=288$$

이다.

29. [확통/4점] ◆◆◈ [고난도] [신유형]

〔해제의 급소〕 낯선 상황에 대한 이해

> 수열 a_n에 주어진 조건이 다소 낯설다. 또, 수열의 항 중에서 하나를 뽑아 확률변수로 둔다는 것도 낯설다. 문제를 찬찬히 읽고 해석해서 수열이 어떤 모습인지, 확률변수가 무엇을 의미하는지에 대해 직관적인 이해를 하는 것이 중요하다.

수열 a_n은 각 자연수 n에 대하여

$$a_n=-1,\ a_n=0 \text{ 또는 } a_n=1$$

을 만족시킨다. 따라서, $|a_n|={a_n}^2$이 항상 성립하므로, 두 확률변수 X와 Y는 $X^2=Y$를 만족시킨다.

조건 (가)에 의하여 $17\times\mathrm{E}(X)+6=3\times(2-5\times\mathrm{E}(Y))$, 즉 $17\times\mathrm{E}(X)+15\times\mathrm{E}(Y)=0\ \cdots\ (*)$이 성립한다. 한편, 조건 (나)에 의하여 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{E}(X^2)+\frac{1}{4}$을 $(*)$에 대입하고 $t=\mathrm{E}(X)$라 놓으면,

$$15t^2+17t+\frac{15}{4}=0 \quad \Rightarrow (10t+3)(6t+5)=0$$

에서 $t=-\frac{3}{10}$ 또는 $t=-\frac{5}{6}$이다.

이제 $1\le n\le 972$인 자연수 n 중에서 $a_n=1$인 것의 개수를 α라 하고, $a_n=-1$인 것의 개수를 β라 하면,

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\alpha-\beta}{972},\quad \mathrm{E}(Y)=\frac{\alpha+\beta}{972}$$

임을 알 수 있다. 따라서 $972\times\mathrm{E}(X)$의 값은 정수여야 하는데, 이를 만족시키는 t의 값은 $-\frac{5}{6}$뿐이다. 따라서 $\mathrm{E}(X)=-\frac{5}{6}$이고, $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)^2+\frac{1}{4}=\frac{17}{18}$이다.

위 문단에 의하여 $\alpha-\beta=972\times\left(-\frac{5}{6}\right)=-810$이고, $\alpha+\beta=972\times\frac{17}{18}=918$이므로, 연립방정식을 풀면 $\beta=864$를 얻는다. 다시 말해 $1\le n\le 972$인 자연수 n 중에서 $a_n=-1$인 것의 개수가 864인 것인데, 그중 세 자리 자연수 n의 값의 개수가 최소가 되려면 a_1부터 a_{99}까지의 모든 항이 -1이고, a_{973}부터 a_{999}까지의 항들 중에서 -1인 것이 없으면 된다. 이때의 최솟값은 $864-99=765$.

(다른 풀이)

$\mathrm{E}(X)=\frac{\alpha-\beta}{972}$, $\mathrm{E}(Y)=\frac{\alpha+\beta}{972}$로 놓은 후, $\frac{\alpha}{972}=p$, $\frac{\beta}{972}=q$로 놓으면, $\mathrm{E}(X)=p-q$, $\mathrm{E}(Y)=p+q$이다. 이때 $\mathrm{E}(X^2)$의 확률분포를 분석해 보면 $\mathrm{E}(X^2)=p+q$를 얻으므로, 조건 (가)와 (나)를 적용하여 연립일차방정식을 유도할 수 있다. 이 연립방정식에서 q를 구하면 β의 값이 나오고, 이후의 과정은 위의 풀이와 같다.

30. [확통/4점] ◆◆◆ [최고난도] [신유형]

〔해제의 급소 ①〕 조건부 확률에 유의

이 문제가 조건부 확률임을 인지하지 못했다면 큰일이다. 조건부 확률에서의 조건과 문제 자체의 조건을 구분할 줄 알아야 한다.

〔해제의 급소 ②〕 독립시행의 원리

독립시행 공식은 각 시행의 결과가 독립이라는 것과, 각 경우의 수마다 확률이 동일하다는 두 가지 원리에 기반한다. 이 문제는 독립시행 자체에 대한 문제는 아니지만, 전술한 기본원리를 적용할 줄 안다면 이 문제에서 계산량을 크게 줄일 수 있다.

〔해제의 급소 ③〕 확률 계산에서 약분은 최대한 나중에

복잡한 확률 계산에서는 더하고 빼는 일이 잦기 때문에, 미리 약분을 해 두면 나중에 다시 통분하느라 골머리를 앓게 된다. 분모가 커지더라도 곱의 형태로 나타내어 약분을 최소한으로 하는 것이 좋다.

점 P_{n-1}에서 점 P_n을 정하는 과정을 다른 관점으로 바라보면, 한 점이 집합 A 안에서 이동하면서 발자취를 남기는 것과도 같다고 생각할 수 있다. 이 관점을 바탕으로 문제를 풀어 보자.

주어진 집합 A를 좌표평면 위에 나타내면, 12개의 점들이 간격이 1인 4×3의 격자를 이루고 있는 모습이다. 이때 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4가 정사각형 Q를 이루려면, Q의 한 변의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$여야 한다. 즉, 정사각형의 넓이로 가능한 것은 1 또는 2뿐이다.

정사각형의 넓이가 2인 경우부터 생각해 보자. 점 P_1로 가능한 위치는 $(2,1)$ 및 $(2,3)$뿐이다. 점 P_0에서 이동 가능한 곳은 5군데이므로, 이 두 점으로 이동할 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 점 P_2로 가능한 곳은 두 곳뿐이므로, 이곳으로 이동할 확률은 $\frac{2}{5}$로 구할 수 있다. 이와 마찬가지의 방법으로 점 P_3, P_4를 제대로 정할 확률은 각각 $\frac{1}{5}$이므로, 확률을 계산하면

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5^4}$$

가 된다.

이제 정사각형의 넓이가 1인 경우를 고려한다. 이러한 정사각형은 총 4개가 있는데, $y=2$를 기준으로 위아래에 두 개씩 대칭적인 상황을 이룬다. 따라서 $y=2$의 아래쪽에 있는 두 정사각형에 대하여만 확률을 구하고, 구한 확률에 두 배를 하면 된다. 왼쪽의 정사각형을 Q_1, 오른쪽의 정사각형을 Q_2라 하자.

우선 정사각형 Q_1부터 생각해 보자. 이 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표는 각각 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$이다. 이 중에서 P_1로 가능한 것은 $(1,2)$를 제외한 나머지 세 개이다. 그런데, 이전과 같이 확률을 구하려 하면 가능한 방법의 수가 비현실적으로 많다. 따라서 조금 더 머리를 써서 계산을 줄여야 한다.

상황이 복잡하므로 예시를 보면서 문제를 이해해 본다. 네 점이 각각 $\mathrm{P}_1(1,1)$, $\mathrm{P}_2(2,1)$, $\mathrm{P}_3(2,2)$, $\mathrm{P}_4(1,2)$라 하자. 이 경우의 확률을 구해 보면 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}$인데, 이것을 해석해 보면

(점 $(1,2)$에서 점 $(1,1)$로 이동할 확률),
(점 $(1,1)$에서 점 $(2,1)$로 이동할 확률),
(점 $(2,1)$에서 점 $(2,2)$로 이동할 확률),
(점 $(2,2)$에서 점 $(1,2)$로 이동할 확률)

을 순차적으로 곱한 것이다. 그런데 이 해석에서 출발지는 중요하지만, 목적지는 확률에 영향을 미치지 않는다. 다시 말해, 각 출발지에 이러한 확률을 할당할 수 있다. 즉, 출발지 $(1,1)$에는 확률 $\frac{1}{3}$을, $(1,2)$ 및 $(2,1)$ 에는 확률 $\frac{1}{5}$을, $(2,2)$에는 확률 $\frac{1}{8}$을 할당할 수 있다.

한편, 출발지 P_1, P_2, P_3를 정할 때 순서는 중요하지 않다. 어차피 다 곱할 것이기 때문이다. 즉, P_4가 어떤 점인지만 알면 확률을 구할 수 있다. 따라서 P_4를 기준으로 경우를 나누어 본다.

(i) $\mathrm{P}_4(1,1)$인 경우

P_1, P_2, P_3을 정하는 방법의 수는 $2\times2\times1=4$이다. 또한 네 출발지 P_0, P_1, P_2, P_3에 할당된 확률을 모두 곱하면 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}$이 된다. 이 확률은 세 출발지를 어떻게 정하든 똑같이 유지되므로, 이때의 확률을

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}\times4=\frac{4}{5^3\times8}$$

로 구할 수 있다.

(ii) 나머지 경우

위 방법과 같이 $\mathrm{P}_4(1,2)$, $\mathrm{P}_4(2,1)$, $\mathrm{P}_4(2,2)$일 때의 확률을 각각 구해 보면 다음과 같다.

$$\frac{6}{3\times5^2\times8},\quad \frac{4}{3\times5^2\times8},\quad \frac{4}{3\times5^3}$$

(i), (ii)에 의하여 이때의 확률은 $\frac{47}{3\times5^3\times4}$이다.

이제 정사각형 Q_2에서는, 점 P_1으로 가능한 곳이 $(2,1)$, $(2,2)$뿐이다. 위에서와 같이 출발지에 확률을 할당한 후에 P_4가 $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(3,2)$일 때의 확률을 각각 구해 보면,

$$\frac{2}{3\times5^2\times8},\quad \frac{2}{3\times5^3},\quad \frac{4}{5^3\times8},\quad \frac{4}{3\times5^2\times8}$$

이므로, 이들을 모두 더하면 $\frac{29}{3\times5^3\times4}$를 얻는다.

따라서, 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4가 한 변의 길이가 1인 정사각형의 꼭짓점을 이룰 확률은

$$2\left(\frac{47}{3\times5^3\times4}+\frac{29}{3\times5^3\times4}\right)=\frac{38}{3\times5^3}$$

이다. 마지막으로 조건부 확률을 구해 보면

$$\frac{\frac{38}{3\times5^3}}{\frac{38}{3\times5^3}+\frac{4}{5^4}}=\frac{38\times5}{38\times5+4\times3}=\frac{95}{101}$$

에서 $p+q=101+95=196$.

선택과목 해설 [미적분]

(11쪽에서 13쪽까지)

23. [미적/2점] ◇◇◇

(해제의 급소) 당황...하셨어요?

> 정신만 똑바로 차리면 정말 쉬운 극한이다. 당황스러운 문제가 나와도 침착을 유지하라.

주어진 극한을 다시 쓰면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}4^{\frac{k}{n}}$$

과 같고, 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여 이를

$$\int_0^1 4^x\,dx=\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^1=\frac{3}{\ln 4}=\frac{3}{2\ln 2}$$

으로 구할 수 있다.

24. [미적/3점] ◇◇◇

곡선 $\sin(x+y)=ye^x+\pi$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$(1+y')\cos(x+y)=(y+y')e^x$$

를 얻는다. 여기에 $(x,y)=(0,-\pi)$를 대입하면

$$(1+y')\cos(-\pi)=y'-\pi,$$
$$-1-y'=y'-\pi$$

에서 $y'=\dfrac{\pi-1}{2}$를 얻는다.

25. [미적/3점] ◈◇◇

(해제의 급소) 등비수열의 극한으로 정의된 함수

> 등비수열의 극한으로 정의된 함수가 주어질 때는, 밑의 절댓값이 1보다 큰 경우와 작은 경우, 밑이 1인 경우, 밑이 −1인 경우로 나눈다.

함수 $f(x)$를 x의 범위에 따라 구해 보자. 우선, $|x|>1$이면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-5x^n}{x^{n+2}}=-\frac{5}{x^2}$$

이고, $f'(x)=\dfrac{10}{x^3}$으로 구할 수 있다. 또한, $|x|<1$이면

$$f(x)=\frac{9x+k}{3}$$

이고, $f'(x)=3$으로 구할 수 있다. 한편, $x=1$을 대입하면 $f(1)=\dfrac{4+k}{4}$이다. 그런데, $x=-1$을 대입하면 k의 값에 따라 $f(-1)$의 값이 존재하지 않을 수도 있는데,

$$n\text{이 짝수이면 }\frac{-5(-1)^n+9(-1)+k}{(-1)^{n+2}+3}=\frac{k-14}{4},$$
$$n\text{이 홀수이면 }\frac{-5(-1)^n+9(-1)+k}{(-1)^{n+2}+3}=\frac{k-4}{2}$$

이기 때문이다. 다시 말해, $f(-1)$의 값이 존재하려면

$$\frac{k-14}{4}=\frac{k-4}{2}$$

에서 $k=-6$이어야 한다. 따라서,

$$f'(0)=3,\quad f(1)=\frac{4+k}{4}=-\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to1+}f'(x)=10$$

에서 구하는 값은 $\dfrac{25}{2}$이다.

26. [미적/3점] ◈◇◇ [합답형]

(해제의 급소 ①) 합답형에서 힌트 주워먹기

> 문제에서 ㄴ과 ㄷ을 보면 "우리 둘이 연관성 있어요"라고 부르짖고 있다. 합답형 문제에서 선지 간 연관성이 보이면 활용할 방안을 모색하는 것이 당연지사.

(해제의 급소 ②) 어어... 왜 다 거짓이지?

> ㄴ과 ㄷ 모두 거짓인 상황이 일어나도 본인의 풀이 과정이 정확했다면 흔들리지 않을 것이다.

[ㄱ. (참)] 주어진 함수를 미분해 보면,

$$f'(x)=-e^{-x}\cos 2x+e^{-x}(-2\sin 2x)$$
$$=e^{-x}(-\cos 2x-2\sin 2x)$$

이다. 따라서 $f'(0)=-1$임이 당연하다.

[ㄴ. (거짓)] 이계도함수를 구해 보면,

$$f''(x)=e^{-x}(-3\cos 2x+4\sin 2x)$$

이다. 따라서 주어진 식의 좌변은

$$5f(x)+2f'(x)=e^{-x}(3\cos 2x-4\sin 2x)$$
$$=-f''(x)$$

이므로, 우변과 다르다.

[ㄷ. (거짓)] ㄴ에서 구한 식 $5f(x)+2f'(x)=-f''(x)$의 양변을 적분해 보면, $5F(x)+2f(x)=-f'(x)+C$ (C는 적분상수)를 얻는다. $x=0$을 대입하면

$$5F(0)+2f(0)=-f'(0)+C$$
$$\Rightarrow\ 5+2=1+C\quad\Rightarrow\ C=6$$

을 얻는다. 따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{5F(x)+2f(x)\}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{6-f'(x)\}\,dx$$
$$=[6x-f(x)]_0^{\pi/4}=\frac{3}{2}\pi-1$$

이므로, ㄷ은 거짓이다.

27. [미적/3점] ◆◈◇ [계산]

〔해제의 급소 ①〕 힘세고 강한 계산력

> 함수 f(x)가 복잡하지만, 이러한 함수의 미분도 빠르고 정확하게 할 수 있어야 한다.

〔해제의 급소 ②〕 접하는 두 그래프

> 두 그래프 y=f(x)와 y=g(x)가 서로 접할 때는 함숫값이 같고 미분계수가 같다는 연립방정식을 세운다.

주어진 함수 $f(x)$를 미분하기 위하여 $\dfrac{x}{x^2+1}e^x$ 및 $\dfrac{1}{x^2+1}e^x$를 먼저 미분해 보자.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x^2+1}e^x\right)' &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)'e^x + \frac{x}{x^2+1}e^x \\ &= \left(\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}\right)e^x \\ &= \frac{x^3-x^2+x+1}{(x^2+1)^2}e^x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)' &= \left(\frac{1}{x^2+1}\right)'e^x + \frac{1}{x^2+1}e^x \\ &= \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}\right)e^x \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}e^x\end{aligned}$$

이므로, 함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x) = \frac{3(x^3-x^2+x+1)-k(x-1)^2}{(x^2+1)^2}e^x$$

임을 알 수 있고, 방정식 $f'(x)=0$을 정리하면 삼차방정식

$$3(x^3-x^2+x+1) = k(x-1)^2 \quad \cdots \quad (*)$$

을 얻을 수 있다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖도록 하는 실수 α의 값이 하나뿐이려면, 삼차방정식 $(*)$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않으면 된다. $k>0$일 때, 좌변의 삼차함수와 우변의 이차함수의 그래프를 그려 보면, 두 그래프가 어떤 점 $x=t$에서 접하도록 하는 k의 값을 K라 할 때 $k \le K$이면 된다.

두 그래프가 $x=t$에서 접할 때, 연립방정식

$$\begin{cases} 3(t^3-t^2+t+1) = K(t-1)^2 \\ 3(3t^2-2t+1) = 2K(t-1) \end{cases}$$

을 얻을 수 있고, 두 번째 식에서 $K=\dfrac{3(3t^2-2t+1)}{2(t-1)}$이므로 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$\begin{aligned}&2(t^3-t^2+t+1) = (3t^2-2t+1)(t-1) \\ \Rightarrow\ &2t^3-2t^2+2t+2 = 3t^3-5t^2+3t-1 \\ \Rightarrow\ &t^3-3t^2+t-3=0 \qquad \Rightarrow\ (t-3)(t^2+1)=0\end{aligned}$$

에서 $t=3$이다. 이때 $K=\dfrac{33}{2}$으로 구할 수 있다. $k \le \dfrac{33}{2}$이면 되므로, 자연수 k의 최댓값은 16이다.

28. [미적/4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 함수의 그래프 그리기

> 함수의 그래프를 그릴 때 웬만큼 복잡한 함수가 아닌 이상 이계도까지 구하는 것은 미적러의 기본소양.

〔해제의 급소 ③〕 함수로 주어지지 않은 식의 최대·최소

> 함수가 명시적으로 주어지지 않아도 식에 있는 문자를 하나로 통일하여 최대·최소를 구할 수 있어야 한다.

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는

$$f'(x) = a\times\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = a\times\frac{-\ln x+4}{4x\sqrt{x}}$$

이다. 따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=e^2$에서 극값을, $x=e^4$에서 변곡점을 가지므로, 그래프를 알아서 잘 그릴 수 있을 것이다.

이제 함수 $g(x)$를 해석해 보자. 우선, 곡선 $y=f(2b-x)$는 곡선 $y=f(x)$를 $x=b$에 대하여 대칭이동한 것이고, 곡선 $y=2f(b)-f(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 $y=f(b)$에 대하여 대칭이동한 것이다. 따라서 주어진 곡선 $y=g(x)$는 점 $(b, f(b))$에 대하여 점대칭이고, 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

한편 주어진 집합을 A라 하면, 평균값 정리에 의해 A의 각 원소는 $g'(c)$의 형태로 나타낼 수 있다. 이때, b의 값에 따라 A가 취하는 형태가 다르다.

(i) $b>e^4$, 즉 b가 변곡점보다 오른쪽에 있는 경우

이때 A는 열린구간 $(g'(b), 0)$과 같다. 즉, $g'(b)=-1$에서 $f'(b)=-g'(b)=1$이어야 한다. 따라서

$$a\times\frac{\ln b-2}{2\sqrt{b}} = 1 \quad \Rightarrow\ a = \frac{2\sqrt{b}}{\ln b-2}$$

와 같이 a를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

(ii) $e^2 \le b \le e^4$, 즉 b가 극값과 변곡점 사이에 있는 경우

이때 A는 열린구간 $(g'(e^4), 0)$과 같다. $g'(e^{-4})=-1$에서 $f'(e^4)=-g'(e^4)=1$이어야 한다. 따라서

$$a\times\frac{\ln e^4-2}{2\sqrt{e^4}} = 1 \quad \Rightarrow\ a = e^2$$

으로 구할 수 있다.

(iii) $b<e^2$, 즉 b가 극값보다 왼쪽에 있는 경우

이때 $g'(b)>0$이므로 문제의 조건에 어긋난다. 따라서 이 경우는 버린다.

(i)~(iii)에 의하여 $\dfrac{\ln b-5}{a}$를 b에 대한 식으로 나타내면

$$\frac{\ln b-5}{a} = \begin{cases} \dfrac{\ln b-5}{e^2} & (e^2 \le b \le e^4) \\ \dfrac{(\ln b-2)(\ln b-5)}{2\sqrt{b}} & (b>e^4) \end{cases}$$

와 같다. 이것을 함수 $h(b)$라 놓자. $e^2 \le b \le e^4$에서 함수 $h(b)$의 최솟값은 $-\dfrac{3}{e^2}$이고 최댓값은 $-\dfrac{1}{e^2}$임이 당연하다. 한편, $b>e^4$에서 함수 $h(b)$를 미분하면

$$h'(b) = -\frac{(\ln b)^2-11\ln b+24}{4b\sqrt{b}} = -\frac{(\ln b-3)(\ln b-8)}{4b\sqrt{b}}$$

이므로 함수 $h(b)$는 $b=e^8$에서 극댓값 $\dfrac{9}{e^4}$를 갖는다. 따라서 함수 $h(b)$의 최솟값은 $m=-\dfrac{3}{e^2}$이고 최댓값은 $M=\dfrac{9}{e^4}$이므로 $M\times m = -\dfrac{27}{e^6}$을 얻는다.

29. [미적/4점] ◆◆◇ [과정] [계산] [함정]

〔해제의 급소 ①〕 과정형 문제에 대한 이해

공통 11번에서와 같은 내용.

〔해제의 급소 ②〕 치환적분에 대한 이해

사실 이 문제에서 치환적분에 대하여 직접적으로 물어보고 있지는 않다. 하지만, 문제에서 무엇을 하고 있는지를 이해하려면 치환적분의 방법에 익숙해야 할 것이다.

〔해제의 급소 ③〕 문제 꼼꼼히 읽기

빈칸 (다)에 들어갈 것은 정적분의 값이 아니라, 주어진 영역의 둘레의 길이이다. 문제에서 무엇을 물어보는지 꼼꼼히 읽는 자세가 필요하다.

(가)를 구하는 것은 단순하다. $t=2x+\sqrt{9+4x^2}$이므로,

$$t-2x=\sqrt{9+4x^2} \quad \Rightarrow (t-2x)^2=9+4x^2$$
$$\Rightarrow t^2-4tx+4x^2=9+4x^2 \quad \Rightarrow 4tx=t^2-9$$

에서 $x=\frac{1}{4}\times\frac{t^2-9}{t}$이다. 따라서 (가)는 $\frac{t^2-9}{t}$이다.

이제 (나)를 구하려면 $\frac{dx}{dt}$를 알아야 한다. $x=\frac{t^2-9}{4t}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{9}{t^2}\right)$로 구할 수 있으므로,

$$(t-2x)\times\frac{dx}{dt}=\left(t-2\times\frac{t^2-9}{4t}\right)\times\frac{1}{4}\left(1+\frac{9}{t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(t+\frac{9}{t}\right)\left(1+\frac{9}{t^2}\right)=\frac{1}{8}\left(t+\frac{18}{t}+\frac{81}{t^3}\right)$$

이다. 따라서 (나)는 $t+\frac{18}{t}+\frac{81}{t^3}$이다.

이제 (다)를 구하려면, 우선 적분의 값을 구해야 한다. 치환적분에 의하여

$$\frac{1}{3}\int_0^2\sqrt{9+4x^2}\,dx=\frac{1}{3}\int_3^9\left(\sqrt{9+4x^2}\times\frac{dx}{dt}\right)dt$$
$$=\frac{1}{24}\int_3^9\left(t+\frac{18}{t}+\frac{81}{t^3}\right)dt$$

인데, 이때

$$\int_3^9\left(t+\frac{18}{t}+\frac{81}{t^3}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+18\ln t-\frac{81}{2t^2}\right]_3^9$$
$$=\left(\frac{81}{2}+18\ln 9-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{9}{2}+18\ln 3-\frac{9}{2}\right)=40+18\ln 3$$

으로 구할 수 있으므로, 정적분 $(*)$의 값은 $\frac{20+9\ln 3}{12}$이다.
한편, 주어진 영역의 둘레의 길이는 정적분 $(*)$의 값을 두 배 한 후에 4를 더하면 되므로, (다)를 구하면

$$2\times\frac{20+9\ln 3}{12}+4=\frac{22}{3}+\frac{3}{2}\ln 3$$

이 된다.

위에 의하여 $f(t)=\frac{t^2-9}{t}$, $g(t)=t+\frac{18}{t}+\frac{81}{t^3}$이고 $a=\frac{22}{3}+\frac{3}{2}\ln 3$이므로,

$$f(3\sqrt{3})=2\sqrt{3}, \quad g(3\sqrt{3})=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

에서 구하는 값은

$$2\sqrt{3}\times\frac{16\sqrt{3}}{3}+12\left(\frac{22}{3}+\frac{3}{2}\ln 3\right)=120+18\ln 3$$

이다. $p+q=120+18=138$.

30. [미적/4점] ◆◆◆ [최고난도]

〔해제의 급소 ①〕 삼각형의 넓이의 최대

삼각형의 넓이가 최대가 될 때는 꼭짓점에서의 접선이 밑변과 평행할 때이다.

〔해제의 급소 ②〕 음함수의 미분

복잡하게 생긴 음함수라도 척척 미분해낼 수 있어야 한다.

우선 편의를 위하여 $0<t<\pi$인 경우부터 고려하자. 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면, 점 P에서 곡선 $y=\sin x$의 접선의 기울기가 직선 OA의 기울기와 같아야 한다. 따라서 점 P의 x좌표를 $p\ (0<p<t)$라 두면,

$$\cos p=\frac{\sin t}{t} \quad \cdots (*)$$

가 성립해야 한다. (이러한 p가 존재한다는 것은 평균값 정리로부터 얻을 수 있다.) 한편, 직선 OA의 방정식은 $y=\frac{\sin t}{t}x$ 이고, 이를 정리하면 $(\sin t)x-ty=0$이다. 따라서, 점 P와 직선 OA 사이의 거리는 $\frac{|(\sin t)\times p-t\times\sin p|}{\sqrt{t^2+\sin^2 t}}$이며, 선분 OA의 길이는 $\sqrt{t^2+\sin^2 t}$이므로,

$$S(t)=\frac{|p\sin t-t\sin p|}{2}$$

이다. 이때 $\frac{\sin p}{p}\geq\frac{\sin t}{t}$이므로(참고해설) $t\sin p\geq p\sin t$이고,

$$S(t)=\frac{t\sin p-p\sin t}{2}$$

로 쓸 수 있다.

이제 $S(t)$를 미분해 보자.

$$S'(t)=\frac{1}{2}\left(\sin p+t\times\frac{dp}{dt}\cos p-\frac{dp}{dt}\sin t-p\cos t\right)$$

인데, 여기에서 $t\cos p=\sin t$이므로,

$$S'(t)=\frac{1}{2}(\sin p-p\cos t)$$

로 구할 수 있다. $S'(1)$의 값을 구해 보면, $t=1$일 때 $\cos p=\sin 1$이므로 $p=\frac{\pi}{2}-1$이며 $\sin p=\cos 1$이다. 따라서

$$S'(1)=\frac{1}{2}\left(\cos 1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos 1\right)=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos 1$$

로 구할 수 있다.

한편, $\pi<t<2\pi$에서도 $(*)$이 성립해야 하는 것은 마찬가지이지만, $(*)$을 만족시키는 p의 값이 두 개 나올 수도 있다. 하지만, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P는 여전히 $0<p<\pi$에서만 나올 수 있다. 따라서 p는 $0<t<2\pi$에서 연속인 함수이며, $\lim_{t\to 2\pi-}p=\frac{\pi}{2}$이다.

그런데 $2\pi<t<3\pi$에서는 $(*)$을 만족시키는 p의 값 중 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되도록 하는 것은 p가 $\pi<p<2\pi$에서 나올 때이다. 따라서 $\lim_{t\to 2\pi+}p=\frac{3\pi}{2}$임을 알 수 있고, $\lim_{t\to 2\pi}S'(t)$의 값은 존재하지 않는다.

마찬가지의 이유로 $\lim_{t\to 3\pi}S'(t)$의 값 또한 존재하지 않고, $k=3\pi$임을 알 수 있다. 따라서 $S(k)=\frac{1}{2}\times 3\pi\times 1=\frac{3\pi}{2}$이므로, 구하는 값은 $1-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}=1+\frac{5}{4}\pi$이며, $120(p+q)=270$.

선택과목 해설 [기하]

(14쪽에서 16쪽까지)

23. [기하/2점] ◇◇◇

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$이다. 따라서 $a=6$, $b=3$, $c=9$이므로 사면체 OABC의 부피는 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times6\times9=27$.

24. [기하/3점] ◇◇◇

주어진 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이는 $4\sqrt{2}$, 긴 변의 길이는 8이어야 한다. 만약 $\angle FPF'$가 직각이면, 점 P가 타원의 꼭짓점이 되므로 불가능하다. 따라서 $\overline{FP}$, $\overline{F'P}$ 중 하나가 빗변이어야 하고, 나머지 하나는 짧은 변일 것이므로, $\overline{FP}+\overline{F'P}=4\sqrt{2}+8$이어야 한다. 타원의 정의에 의하여 타원의 장축의 길이는 $4\sqrt{2}+8$.

25. [기하/3점] ◇◇◇

(해제의 급소) 개념 공부

> 개념을 배울 때 등장했던 용어를 까먹지 말 것.

직선 $\frac{3-x}{2}=\frac{2y-7}{3}$을 정리하면 $3(x-3)+2(2y-7)=0$, $3x+4y-23=0$이므로, 법선벡터는 $(3, 4)$이다. 따라서 점 P의 위치벡터는 이 법선벡터와 나란하게 $(3a, 4a)$로 놓을 수 있는데, 이것이 단위벡터(크기가 1)이므로, $|5a|=1$에서 $a=\pm\frac{1}{5}$이다.

이때 점 $A(-1, 0)$과의 거리가 최소이려면 $a=-\frac{1}{5}$이어야 한다.

즉, $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$이므로 $\overrightarrow{AP}$의 크기의 최솟값은

$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

26. [기하/3점] ◈◇◇ [함정]

(해제의 급소) 그 놈은 그냥 미끼를 던져본 것이고 ...

> 함정이다! 두 직선이 이루는 각이 주어지면, 그것이 직각이 아닌 이상 두 직선이 '실질적으로' 이루는 각의 종류는 두 가지이다. 항상 그림을 그릴 때는 '이 그림 한 가지만 있는지'를 확인하기 바란다.

쌍곡선의 중심이 $(0, 1)$이고, 주축은 y축과 나란하므로, 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=-1$로 놓을 수 있다. (단, a, b는 양수) 또한, 쌍곡선의 한 초점과 중심 사이의 거리가 2이므로 $a^2+b^2=4$여야 한다.

한편, 쌍곡선의 두 점근선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이려면, 두 점근선의 기울기가 $\pm\sqrt{3}$이거나 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이어야 한다. 다시 말해, $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$이거나 $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이어야 한다. 각각의 경우 (a, b)는 $(\sqrt{3}, 1)$ 및 $(1, \sqrt{3})$이 나온다.

따라서 쌍곡선의 방정식으로 가능한 것은 $\frac{x^2}{3}-(y-1)^2=-1$ 또는 $x^2-\frac{(y-1)^2}{3}=-1$이고, $(k, 4)$를 대입하면 첫 번째 식에서는 $k=\pm\sqrt{24}$, 두 번째 식에서는 $k=\pm\sqrt{2}$를 얻으므로, k의 값으로 가능한 모든 실수의 곱은 $(-24)\times(-2)=48$이다.

27. [기하/3점] ◆◈◇

(해제의 급소 ①) 벡터를 이용하여 나타낸 직선의 방정식

> 점 P와 Q에 대한 벡터 방정식을 곧이곧대로 풀려고 하면 문제풀이에 대한 직관이 생기지 않는다. 벡터로 표현된 방정식을 직선으로 해석하는 능력이 필요하다.

(해제의 급소 ②) 포물선의 성질

> FP와 FQ의 길이의 곱을 구하는 과정에서, 점과 점 사이의 거리 공식으로 풀려고 하면 굉장히 계산이 길어지고, 숫자도 커진다. 여기에서 포물선의 성질을 쓰는 것을 잊지 말아야 한다.

(해제의 급소 ③) 근과 계수의 관계

> 마지막 계산에서 점 P와 Q의 좌표를 그대로 구하려 하면 매우 더럽게 나온다. 근과 계수의 관계를 이용하는 방법이 있다는 사실을 항상 머릿속에 박아넣고 있어야 한다.

우선 포물선의 초점 F의 좌표를 $(1, 0)$으로 구할 수 있다. 이제 좌표평면 위의 어떤 점 $X(x, y)$가

$$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{AF}=-2$$

를 만족시킨다는 것이 무슨 의미인지 알아 보자. $\overrightarrow{AF}=(-1, -2)$이고 $\overrightarrow{OX}=(x, y)$이므로 위 방정식을 다시 쓰면

$$-x-2y=-2 \quad \Rightarrow x+2y-2=0$$

이다. 다시 말해, 두 점 P, Q는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점인 동시에 포물선 위의 점이므로, 포물선 $y^2=4x$와 $x+2y-2=0$의 두 교점이라고 할 수도 있다.

따라서, $y^2=4x$와 $x+2y-2=0$을 연립하여 풀어본다. $y=-\frac{1}{2}x+1$을 대입하면,

$$\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2=4x \quad \Rightarrow \frac{1}{4}x^2-x+1=4x$$
$$\Rightarrow x^2-20x+4=0$$

을 얻는다. 이 방정식의 두 실근을 α, β라 두면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=20$, $\alpha\beta=4$이다. 한편, $\overline{FP}$, $\overline{FQ}$는 점 P, Q에서 준선까지의 거리와 같으므로 $1+\alpha$, $1+\beta$로도 나타낼 수 있다. 즉, 구하는 값은

$$(1+\alpha)(1+\beta)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=20+4+1=25.$$

28. [기하/4점] ◆◆◈ [고난도]

〔해제의 급소 ①〕 정사영과 넓이

> 정사영한 넓이, 원래의 넓이, 두 평면 사이의 각, 이렇게 세 값 중 둘을 알면 나머지 하나를 알 수 있다.

〔해제의 급소 ②〕 두 평면 사이의 각

> 두 평면 사이의 각을 구할 때는 두 평면과 모두 수직인 평면에서 생각하는 것이 한 방법이다. 다른 방법으로는 한 평면의 점에서 다른 평면 및 교선으로 각각 수선의 발을 내리는 것이 있다.

〔해제의 급소 ③〕 공간도형에서 계산할 때는 평면을 본다

> 공간도형에서 실제로 길이나 넓이를 계산할 때는 공간에서 생각하는 것이 아니라 적절한 평면으로 자른 모습을 생각하는 것이 요령이다.

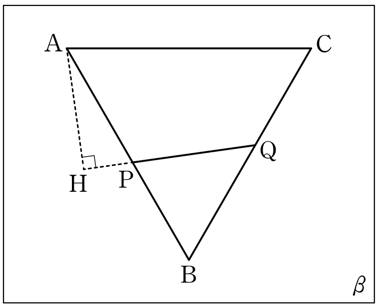
세 점 D, P, Q를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 ABC를 평면 β라 하자. 평면 α는 삼각기둥의 다른 모서리와도 만나야 할 텐데, $\overline{\mathrm{CF}}$에서 만날지 $\overline{\mathrm{EF}}$에서 만날지가 분명하지 않다.

여기서 $\overline{\mathrm{AP}}\times\sin(\angle\mathrm{BPQ})=2$라는 조건을 살펴 보자. sin은 항상 1보다 작으므로 $\overline{\mathrm{AP}}>2$라는 사실을 얻을 수 있다. 따라서, $\overline{\mathrm{BP}}<2$여야 하고, $\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{BQ}}=4$에서 $\overline{\mathrm{BQ}}>2$여야 한다. 다시 말해, $\overline{\mathrm{BP}}<\overline{\mathrm{BQ}}$인 셈이다.

만약 평면 α가 $\overline{\mathrm{EF}}$와 점 X에서 만난다면, 두 삼각형 BPQ와 EDX는 닮음인데, $\overline{\mathrm{DE}}>\overline{\mathrm{EX}}$이므로 위 문단에 모순이다. 따라서 평면 α는 $\overline{\mathrm{CF}}$와 만나야 한다. 이 점을 X라 놓자.

사각형 DPQX를 평면 β에 정사영하면 사각형 APQC가 된다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$이고, 삼각형 BPQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로, 사각형 APQC의 넓이는 $4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$으로 구할 수 있다.

이제 평면 α와 평면 β가 이루는 각 θ를 알아야 답을 구할 수 있다. 두 평면의 교선은 직선 PQ이므로, 점 A에서 직선 PQ에 수선의 발을 내려 H라 하자. 이때 평면 β의 모습은 다음과 같다.

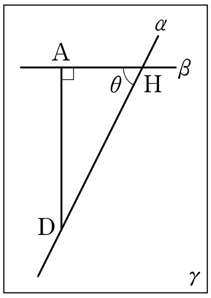


위 그림에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\sin(\angle\mathrm{APH})$여야 하는데, 맞꼭지각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{APH}=\angle\mathrm{BPQ}$이므로, 주어진 조건에 의하여

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\sin(\angle\mathrm{BPQ})=2$$

로 구할 수 있다.

한편, 삼수선의 정리에 의하여 세 점 A, D, H를 지나는 평면 γ는 두 평면 α, β와 모두 수직이고(참고해설), 평면 γ로 두 평면 α, β를 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.



이 그림에서 $\overline{\mathrm{DH}}=2\sqrt{5}$로 구할 수 있으므로, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다. 사각형 DPQX의 넓이를 S라 두면 이를 정사영한 사각형 APQC의 넓이는 $S\cos\theta=3\sqrt{3}$이므로, $S=3\sqrt{15}$.

29. [기하/4점] ◆◆◇

〔해제의 급소 ①〕 구와 평면이 만나서 생기는 원

> 구와 평면이 만나는 상황에서는 이를 평면으로 잘라 원과 직선이 만나는 그림을 그린다. 이때 현의 길이가 교원의 지름의 길이.

〔해제의 급소 ②〕 접선과 접점

> 원에 접하는 직선이 있을 때는 반드시 접점과 중심을 연결한다.

두 구 S_1과 S_2의 방정식을 정리하면,

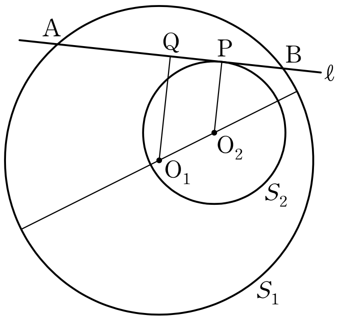
$$S_1:\ (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=150,$$
$$S_2:\ (x+3)^2+y^2+(z-2)^2=28$$

을 얻는다. 즉, S_1은 중심이 $(1,\ -2,\ 0)$이고 반지름이 $5\sqrt{6}$인 구, S_2는 중심이 $(-3,\ 0,\ 2)$이고 반지름이 $2\sqrt{7}$인 구이다. 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{4^2+2^2+2^2}=2\sqrt{6}$$

이므로, 구 S_2가 구 S_1의 내부에 있다.

두 구의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하고, 점 P에서 구 S_2와 접하는 평면을 α라 하자. 세 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, P를 지나는 평면을 β라 할 때, 두 평면 α, β의 교선을 ℓ이라 하자. 교선 ℓ이 구 S_1과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 점 $\mathrm{O_1}$에서 α에 내린 수선의 발을 Q라 하면, 평면 β에서의 상황은 그림과 같다.



평면 α가 구 S_1과 만나서 이루는 원의 넓이가 87π이므로, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{87}$, 즉 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{87}$이다. S_1의 반지름의 길이는 $5\sqrt{6}$이므로

$$\overline{\mathrm{O_1Q}}=\sqrt{(5\sqrt{6})^2-(\sqrt{87})^2}=3\sqrt{7}$$

이다. 점 $\mathrm{O_2}$에서 직선 $\mathrm{O_1Q}$에 내린 수선의 발을 R이라 하면, $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{O_2P}}=2\sqrt{7}$이므로 $\overline{\mathrm{O_1R}}=\sqrt{7}$임을 알 수 있다. 삼각형 $\mathrm{O_1O_2R}$에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{\mathrm{O_2R}}=\sqrt{17}$이다.

한편, 점 P에서 직선 $\mathrm{O_1O_2}$에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\angle\mathrm{PO_2H}=\angle\mathrm{O_1O_2R}$이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{O_2P}}\times\sin(\angle\mathrm{PO_2H})=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{119}}{\sqrt{6}}$$

이다. 따라서 점 P의 자취는 반지름이 $\overline{\mathrm{PH}}$인 원임을 알 수 있고, 자취의 길이는 $2\times\overline{\mathrm{PH}}\times\pi$이다. 즉,

$$6k^2=6\times\left(4\times\frac{119}{6}\right)=476.$$

30. [기하/4점] ◆◆◆ [최고난도]

〔해제의 급소 ①〕 이차곡선의 기하적 정의

> 타원은 초점으로부터의 거리의 합이 같은 점의 집합, 쌍곡선은 초점으로부터의 거리의 차가 같은 점의 집합이다. 이를 이용하면 주어진 조건이 쌍곡선에 대한 이야기를 하고 있음을 알 수 있다.

〔해제의 급소 ②〕 이차곡선의 접선의 방정식

> 접선의 방정식을 구하는 공식은 접점을 아는 경우와 기울기를 아는 경우로 나뉜다. 둘 다 기억하고 있어야 하는 것이 당연하다.

〔해제의 급소 ③〕 내적의 최대·최소

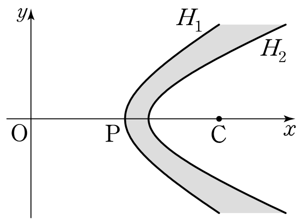
> 내적의 최대·최소는 한쪽 벡터를 다른 쪽 벡터에 평행한 방향 및 수직인 방향으로 분해하여 해결한다.

점 B가 $(-4,0)$에, 점 C가 $(4,0)$에 오도록 좌표평면을 잡으면, $\mathrm{A}(-4,2)$, $\mathrm{P}(2,0)$이다. 좌표평면 위의 점 X 및 양수 k에 대하여, $\overline{\mathrm{BX}}-\overline{\mathrm{CX}}=k$인 점 X의 자취는 주축의 길이가 k인 쌍곡선의 오른쪽 부분이므로, 그 방정식은

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}k^2}-\frac{y^2}{16-\frac{1}{4}k^2}=1\ (x>0)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 쌍곡선은 k의 값이 커지면 더 오른쪽으로 이동한다는 것도 알 수 있다.

선분 PQ 위를 움직이는 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{BX}}-\overline{\mathrm{CX}}$의 최솟값이 4이므로, 선분 PQ는 $H_1:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1\ (x>0)$을 포함한 오른쪽에 있어야 하며, 쌍곡선과 적어도 한 번은 닿아야 한다. 또한, $\overline{\mathrm{BX}}-\overline{\mathrm{CX}}$의 최댓값이 5이므로, 선분 PQ는 쌍곡선 $H_2:\frac{4x^2}{25}-\frac{4y^2}{39}=1\ (x>0)$을 포함한 왼쪽에 있어야 하며, 쌍곡선과 적어도 한 번은 닿아야 한다. 따라서, 선분 PQ는 오른쪽 그림에서 색칠한 영역에 완전히 속해야 한다.



이제 점 Q가 어디에 있어야 하는지 구해보자. 점 Q에 주어진 조건이 x축에 대칭이므로 점 Q의 y좌표가 음이 아닌 경우를 고려하자. 우선 점 Q가 쌍곡선 H_2 위에 있는 경우에는, 선분 PQ가 중간에서 H_2와 다시 만나서는 안 된다. 즉, Q가 x축 위에 있을 때부터 선분 PQ가 H_2와 접할 때까지가 가능하다.

한편, 점 Q가 쌍곡선 H_2 위에 있지 않다면, 선분 PQ가 쌍곡선 H_2와 접해야 한다. 따라서 점 P에서 쌍곡선 H_2에 그은 접선의 방정식을 구해 보자. 접선의 기울기가 m이라 할 때, 그 방정식은 $y=mx-\sqrt{\frac{25}{4}m^2-\frac{39}{4}}$이고, 이것이 점 $\mathrm{P}(2,0)$을 지나므로

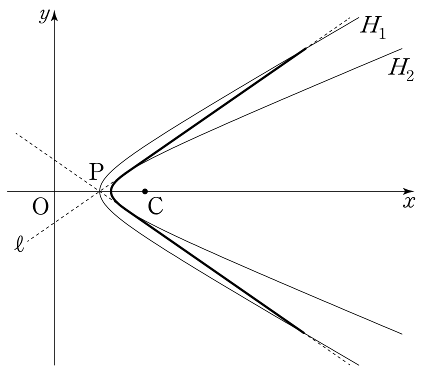
$$\sqrt{\frac{25}{4}m^2-\frac{39}{4}}=2m \quad \Rightarrow\ m^2=\frac{13}{3}$$

에서 $m=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$이다. Q의 y좌표가 음이 아닌 경우만을 고려하므로, 접선의 방정식을 $\ell: y=\sqrt{\frac{13}{3}}(x-2)$로 구할 수 있고, 점 Q는 직선 ℓ 위에 있어야 한다.

하지만, 점 Q가 H_1의 왼쪽으로 넘어가서는 안 된다. 따라서 직선 ℓ과 쌍곡선 H_1의 교점을 구해 보면,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{12}\times\frac{13}{3}(x-2)^2=1$$
$$\Rightarrow\ 9x^2-13(x-2)^2=36 \quad \Rightarrow\ (x-2)(x-11)=0$$

따라서, 점 Q의 x좌표는 11 이하여야 하고, 점 Q의 자취는 다음과 같다.



이제 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자. 우선, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$에 평행한 성분과 수직인 성분으로 분해해 본다. 점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발 R에 대하여, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$로 분해할 수 있으므로,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AR}}$$

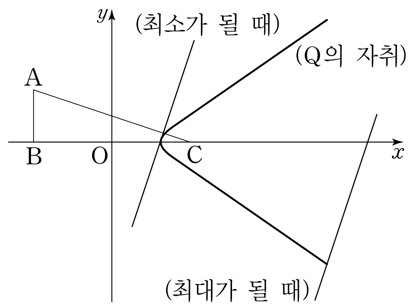
로 쓸 수 있다.

최솟값의 경우, 점 R이 점 A와 가장 가까워야 한다. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(8,\ -2)$이므로, 점 Q에서 H_2의 접선의 기울기가 4여야 한다(참고해설). 따라서 접선의 방정식은 $y=4x-\frac{19}{2}$로 구할 수 있다. 이를 간단히 하면 $8x-2y-19=0$으로 쓸 수 있다. 이때 $\overline{\mathrm{AR}}$의 길이는 점 A에서 직선 $8x-2y-19=0$까지의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{AR}}=\frac{|8\times(-4)-2\times2-19|}{\sqrt{8^2+2^2}}=\frac{55}{2\sqrt{17}}$$

이고 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최솟값은 55이다.

한편, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 최댓값을 가질 때는 $\overline{\mathrm{AR}}$이 최대가 되어야 한다. 이때 점 Q의 x좌표는 11일 것이고, H_1 (또는 ℓ)에 대입하면 y좌표는 $\pm3\sqrt{39}$인데, 아래 그림과 같이 점 Q가 $(11,\ -3\sqrt{39})$일 때 $\overline{\mathrm{AR}}$이 최대가 된다.



따라서 이때 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(8,\ -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(15,\ -2-3\sqrt{39})$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=8\times15+(-2)\times(-2-3\sqrt{39})\\&=124+6\sqrt{39}\end{aligned}$$

로 구할 수 있다.

위 과정에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최솟값은 55, 최댓값은 $124+6\sqrt{39}$이므로, 그 합은 $179+6\sqrt{39}$이다. 따라서 $p+q=179+6=185$.

참고 해설

참고 해설은 본문 해설에 넣기 애매한 부연 설명을 따로 모아놓은 해설입니다.

2. (2쪽)

본문에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1-h)}{(1-2h)-(1-h)}=f'(1)$$

이라고 한 이유는, 미분계수를

$$\lim_{a,\,b\to x}\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(x)$$

로도 정의할 수 있기 때문이다. 교과서적인 방법으로 풀려면,

$$(\text{준식})=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$$

로 쓴 다음,

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=(-2)\times\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{(1-2h)-1},$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=(-1)\times\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{(1-h)-1}$$

과 같이 변형하여 각각 $-2f'(1)$, $-f'(1)$로 구한 후

$$(\text{준식})=-2f'(1)-(-f'(1))=-f'(1)$$

로 동일하게 구할 수 있다.

7. (2쪽)

임의의 각 θ에 대하여, $\sin(270°-\theta)$는

$$\sin(270°-\theta)=-\sin(90°-\theta)=-\cos\theta$$

로 변형할 수 있다. 그래서

$$\sin(\angle\mathrm{AOB})=\sin(270°-\angle\mathrm{BOC})=-\cos(\angle\mathrm{BOC})$$

가 된 것.

9. (2쪽)

두 그래프가 점대칭이라는 사실은 쉽게 눈으로 확인할 수 있지만, 여기서 수학적으로 어떻게 $\alpha+\beta=6$임을 확신할 수 있는 것일까? 주어진 두 그래프가 α $(0<\alpha<3)$에서 만난다고 하자. 이때

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=k(x-3)^3$$

으로 놓으면

$$f(6-\alpha)=\tan\frac{\pi(6-\alpha)}{6}=-\tan\frac{\pi\alpha}{6}=-f(\alpha),$$
$$g(6-\alpha)=k(6-\alpha-3)^3=-k(\alpha-3)^3=-g(\alpha)$$

이다. (사실상 이것이 점대칭의 뜻이다.) 그런데 $f(\alpha)=g(\alpha)$이므로 $f(6-\alpha)=g(6-\alpha)$여야 한다. 다시 말해, $6-\alpha$는 $f(x)=g(x)$의 다른 한 근이다. 따라서 $\beta=6-\alpha$여야 하고, $\alpha+\beta=6$을 얻는다.

12. (3쪽)

$g(p)=3$이고 $g'(p)=0$일 때 $g(t)$의 식을 쉽게 쓰려면 나머지정리 및 인수정리를 이용하면 된다. 우선, 나머지정리에 의하여

$$g(t)=(t-p)Q(t)+3$$

이라 쓸 수 있는데, 양변을 미분하면

$$g'(t)=Q(t)+(t-p)Q'(t)$$

에서 $t=p$를 대입하면 $Q(p)=g'(p)=0$이다. $Q(t)$는 이차식이므로 인수정리에 의하여 $Q(t)=(t-p)(t-q)$와 같이 쓸 수 있고,

$$g(t)=(t-p)^2(t-q)+3$$

을 얻는다.

20. (6쪽)

$k^2>n$일 때 부등식 $(2^x-k)^2>k^2-n$이 성립하지 않도록 하는 유리수 x가 존재한다는 것을 어떻게 알 수 있을까? 언뜻 보면 교육과정 외의 내용 같아 보이지만 고등학교 수학으로 충분히 보일 수 있다.

$k^2>n$이면 $k^2-n=m$은 양수이고, $(2^x-k)^2\le m$인 유리수 x가 존재한다는 것을 보이면 된다. 부등식 $(2^x-k)^2\le m$을 직접 풀어 보면

$$|2^x-k|\le\sqrt{m}\quad\Rightarrow k-\sqrt{m}\le 2^x\le k+\sqrt{m}$$
$$\Rightarrow \log_2(k-\sqrt{m})\le x\le\log_2(k+\sqrt{m})$$

을 얻는다.

이때 중학교에서 배운 유리수와 실수의 성질을 기억해야 한다. 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다. 따라서, $\log_2(k-\sqrt{m})$과 $\log_2(k+\sqrt{m})$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있으며, 이러한 유리수 중 하나를 골라 x라 두면 부등식 $(2^x-k)^2\le m$이 성립하는 것이다.

〔 미적분 〕

30. (13쪽)

점 P는 직선 OA보다 위쪽에 있으므로, 직선 OP의 기울기가 직선 OA의 기울기보다 크다. 이것을 부등식으로 나타낸 것이

$$\frac{\sin p}{p} \geq \frac{\sin t}{t}$$

이다.

〔 기하 〕

28. (15쪽)

점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발이 A이고, 점 A에서 직선 PQ에 내린 수선의 발이 H이므로, 삼수선의 정리에 의하여 직선 DH와 직선 PQ는 서로 수직이다.

즉, 평면 γ 위에 있는 두 직선 AH 및 DH가 직선 PQ와 모두 수직이다. 그런데 직선 PQ는 평면 α 위에도 있으면서 평면 β 위에도 있으므로 평면 γ는 두 평면 α, β와 모두 수직이다.

물론, 실전에서는 이러한 엄밀한 과정이 없이도 두 평면에 수직이라는 사실을 곧장 눈치챌 수 있어야 한다.

30. (16쪽)

점 Q에서 접선의 기울기가 4가 된다면 최소가 될 것은 쉽게 확인할 수 있을 텐데, 접선의 기울기가 4가 될 수 있는지에 대해서는 설명하지 않았다. (점 Q의 자취는 쌍곡선 전체가 아니라 쌍곡선의 일부와 두 선분으로 이루어져 있다!)

이는 직선 ℓ의 기울기로 판단할 수 있는데, 우선 직선 ℓ이 쌍곡선 H_2와 접하는 점을 T라 놓자. 직선 ℓ의 기울기는 $\sqrt{\frac{13}{3}}$으로, 4보다 한참 작다. 다시 말해, 쌍곡선 H_2에서 접선의 기울기가 4가 되는 점 T$'$의 x좌표는 T의 x좌표보다 작다. 즉, 점 T$'$는 Q의 자취 위에 있는 점이므로 Q $=$ T$'$인 것이 가능하다.

빠른 정답

혹시 모를 스포일러를 방지하기 위해
빠른 정답을 뒤편으로 옮겼습니다.

1	③	2	③	3	①	4	⑤	5	②
6	③	7	④	8	⑤	9	③	10	②
11	①	12	①	13	③	14	⑤	15	③
16	47	17	108	18	50	19	43	20	430
21	212	22	416	〔 공 통 〕					

〔 확률과 통계 〕				23	③	24	②	25	④
26	②	27	④	28	③	29	765	30	196

〔 미 적 분 〕				23	③	24	①	25	②
26	①	27	②	28	③	29	138	30	270

〔 기 하 〕				23	④	24	③	25	③
26	⑤	27	④	28	④	29	476	30	185

[뒷면]

의도적으로 비워놓은 페이지입니다.