제 2 교시

# 수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

4

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5x-2$ 에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 의 값은? [2점]

4

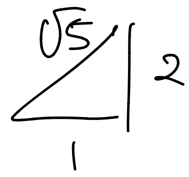
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(1) = 9$

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 인 $\theta$ 에 대하여 $\tan\theta=-2$ 일 때, $\sin(\pi+\theta)$ 의 값은? [3점]

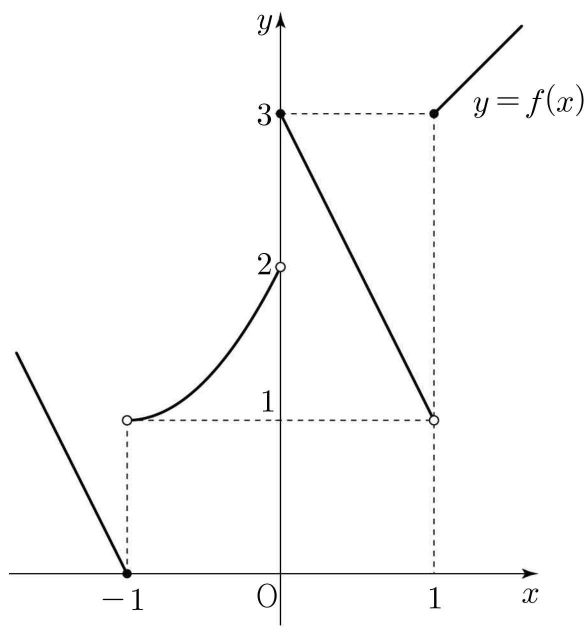
1

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$




$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5

**5.** 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$$

를 만족시킬 때, $\int_1^2 f'(x)dx$의 값은? [3점]

③

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$f(2)-f(1)$

$=8+16-10$

$=14$

**6.** 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=4,\quad a_2a_4=1$$

일 때, $a_6+a_7$의 값은? [3점]

⑤

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$r^2=4 \quad \therefore r=2$

$a^2r^4=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

$a_6=8,\ a_7=16 \quad \therefore 24$

**7.** 함수 $f(x)=x^3-3x+2a$의 극솟값이 $a+3$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, $a$는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

②

$f'(x)=3x^2-3$

$x=1 \to$ 극소

$=-1 \to$ 극대

$f(1)=1-3+2a=a+3 \quad \therefore a=5$

$f(-1)=12$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

①

$x=0$ 대입 $f(0)=-1$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$3ax^3+2bx^2+cx=6x^3-x$

$a=2,\ b=0,\ c=-1$

$f(x)=2x^3-x-1$

$f(-1)=-2$

9. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,\ -\log_2 9)$, $\mathrm{B}(2a,\ \log_2 7)$, $\mathrm{C}(-\log_2 9,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(b,\ \log_8 7)$일 때, $2^{a+3b}$의 값은? [4점]

① 63 ② 72 ③ 81 ④ 90 ⑤ 99

③

$$\begin{cases} 2a-\log_2 9=3b \\ -\log_2 9+\log_2 7+a=3\log_8 7 \end{cases}$$

$a=\log_2 9,\ b=\frac{1}{3}\log_2 9$

$2^{a+3b}=81$

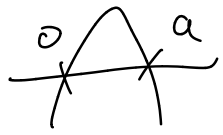
10. 양수 $a$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

②




$x(t)=-t^3+\frac{3}{2}at^2+16$

$-8a^3+6a^3+16=0$

$a^3=8 \quad \therefore a=2$

$\int_0^5 |v(t)|\,dt$

$[-t^3+3t^2]_0^2-[-t^3+3t^2]_2^5$

$-8+12-(-125+75+8-12)$

$4+54=58$

11. 공차가 $d\,(0 < d < 1)$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_5$ 는 자연수이다.
> (나) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을 $S_n$ 이라 할 때, $S_8 = \frac{68}{3}$ 이다.

$a_{16}$ 의 값은? [4점]

5

① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

$a_5 = n = a + 4d$

$a_1 + a_8 = \frac{17}{3}$

$2a + 7d = 2n - d = \frac{17}{3}$

$0 < d < 1$ 이므로 $d = \frac{1}{3}$

$a_5 = 3$

$a_{16} = a_5 + 11d = 3 + \frac{11}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}$

12. 두 상수 $a$, $b$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$ 일 때, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 이다.
> (나) 모든 실수 $x$ 에 대하여 $f(x+4) = f(x) + 16$ 이다.

$\int_4^7 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

4

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$ ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

$f(0) + 16 = f(4)$ , $64 + 16a + 4b = 16$ — ①

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(0) = f'(4)$ , $b = 48 + 8a + b$ — ②

①, ② 연립하면. $\begin{cases} a = -6 \\ b = 12 \end{cases}$

$\int_4^7 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + 3 \times 16$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2\right]_0^3 + 48$

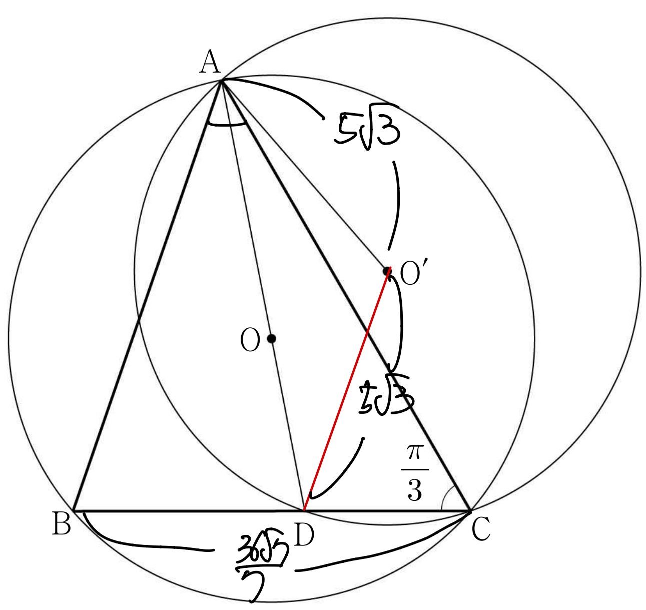
$= \frac{81}{4} - 54 + 54 + 48$

$= \frac{81}{4} + 48 = \boxed{\frac{273}{4}}$

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\quad \sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7},\quad \angle ACB=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O, 직선 AO 가 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. 삼각형 ADC 의 외접원의 중심을 O′ 이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$ 이다. $\overline{OO'}^2$ 의 값은? (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]




1

① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\frac{36\sqrt7}{7}}{\frac{2\sqrt7}{7}} = 18 = 2r \quad \therefore r=9$

$\angle AO'D = \frac{2}{3}\pi$ (원주각), $\angle O'AO = \frac{\pi}{6}$, $\overline{AO}=9$

△AOO′에 코사인법칙

$\overline{OO'}^2 = 81+75-2\times9\times5\sqrt3\times\frac{\sqrt3}{2}$

$= 81+75-135 = 21$

14. 양수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$는

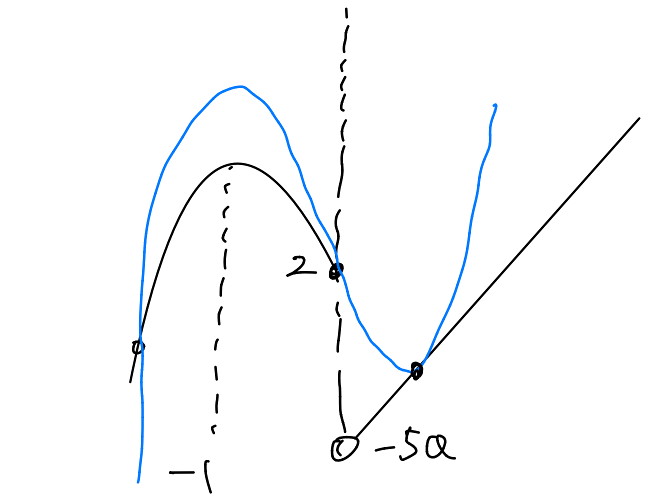
$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1)^2+4 & (x\le 0) \\ a(x-5) & (x>0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 $k$의 값이 $-2$, $0$, $2$일 때, $g(2a)$의 값은? [4점]

4

① 14 ② 18 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30

$f(-2)=g(-2)$, $f(2)=g(2)$, $f(0)=g(0)=2$




$f'(2)=g'(2)$ $\qquad g(x)=x^3+px^2+qx+2$

$g(-2)=-8+4p-2q+2=2$, $4p-2q=8$, $2p=q+4$

$g(2)=8+4p+2q+2=-3a$, $4p+2q=-3a-10$

$g'(2)=12+4p+q=a$, $4p+q=a-12$

$4q=-3a-18$

$3q=a-20$

$13q=-78 \quad q=-6,\ a=2,\ p=-1$

$\therefore g(x)=x^3-x^2-6x+2$

$g(4)=64-16-24+2$

$=26$

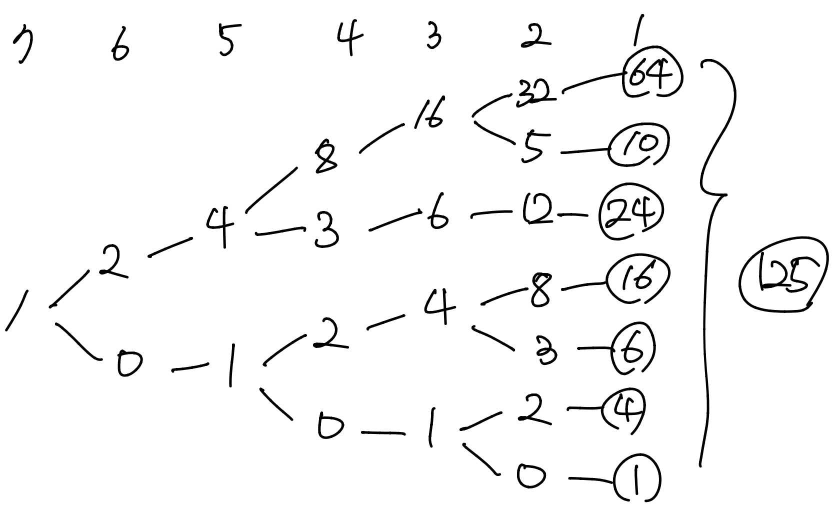
15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right) \\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은? [4점]

2

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140



## 단답형

16. 방정식 $\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$을 만족시키는 실수 $x$의 값을 구하시오. [3점]

$x+9=4x-24$

$x=11$

17. 함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=x^2+x-2+(x-3)(2x+1)$

$f'(5)=25+5-2+22=\boxed{50}$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=45,\quad 2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$$

일 때, $a_{15}$의 값을 구하시오. [3점]

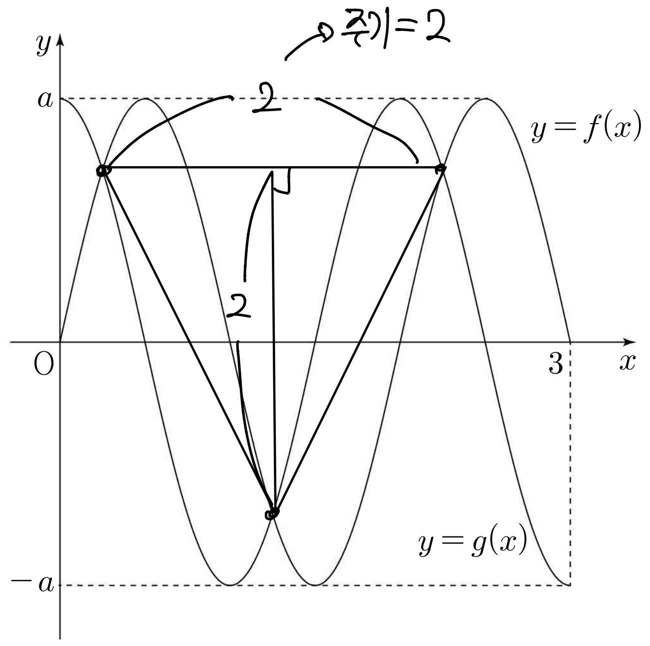
$\sum_{k=1}^{15}a_k=5$

$a_{15}+5=42$ $\therefore$ $\boxed{37}$

19. 양수 $a$에 대하여 $0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin\pi x,\quad g(x)=a\cos\pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, $a^2$의 값을 구하시오. [3점]




$a\sin\pi x=a\cos\pi x$ $\tan\pi x=1$

$x=\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{9}{4},\cdots$

$a\sin\frac{\pi}{4}=1$ $\therefore$ $a=\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

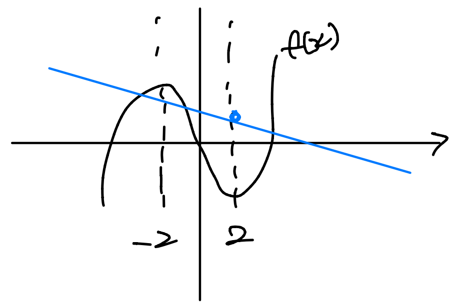
20. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a\neq 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 $a$의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

| |
|---|
| 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 $k$가 존재한다. |

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오. [4점]




$0<a<\infty$ $h(x)=k$ 3개가 최대(x)

$f(-2)=16$ $g(-2)=2-4a$

$2-4a<16$ $a>\frac{7}{2}$

$-\frac{7}{2}<a<0$ $h(x)=k$ 4개

$a<-\frac{7}{2}$ $h(x)=k$ 2개

$\therefore$ $M=0$, $m=-\frac{7}{2}$

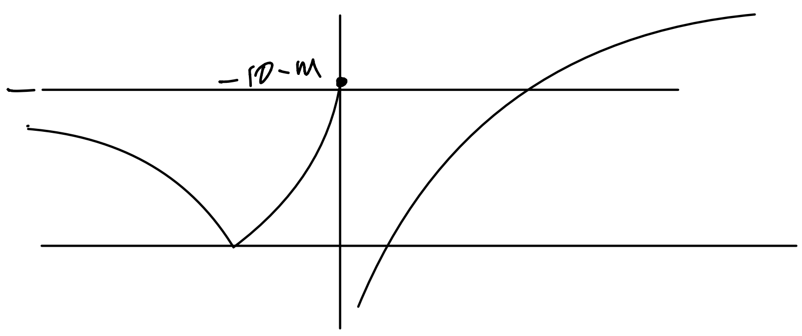
$\boxed{35}$

**21.** $m \le -10$ 인 상수 $m$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} \left|5\log_2(4-x)+m\right| & (x \le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(t>0)$ 에 대하여 $x$ 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 모든 실근의 합을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

> $t \ge a$ 인 모든 실수 $t$ 에 대하여 $g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 양수 $a$ 의 최솟값은 2 이다.




$-10-m=2 \quad \therefore m=-12$

$f(-12)=|20-12|=\boxed{8}$

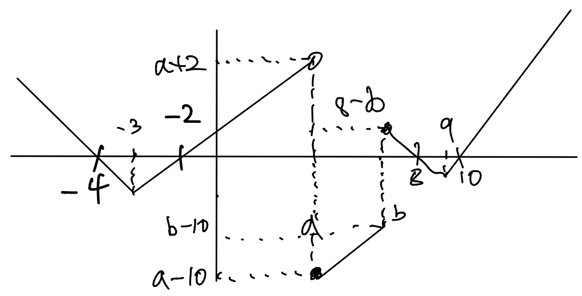
**22.** 두 자연수 $a$, $b\,(a<b<8)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<a) \\ x-10 & (a \le x < b) \\ |x-9|-1 & (x \ge b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 와 양수 $k$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)f(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $f(k)<0$

$f(a)\times f(b)\times f(k)$ 의 값을 구하시오. [4점]




i)

$f(x)$ $f(x+k)$

a 불연 $f(a+k)=0$

b 불연 $f(b+k)=0$

$f(a-k)=0$ a 불연

$f(b-k)=0$ b 불연

$\begin{cases} a+k=8 \\ b+k=10 \\ a-k=-4 \\ b-k=-2 \end{cases}$ $a=2, b=4, k=6$

but $f(k)=2>0$ (x)

ii)

$f(x)$ $f(x+k)$

a 불연 a+k 불연 $a+k=b$ $2k+a=8$ or $10$

b 불연 $f(b+k)=0$ $b+k=8$ or $10$ $a-k=-2$ or $-4$

$f(a-k)=0$ a 불연 $a-k=-2$ or $-4$ $3k=10$ or $14$ or $12$

b-k 불연 b 불연 $b-k=a$ $k=4, a=2, b=6$

$f(k)<0$ (o)

$f(2)\times f(4)\times f(6)$

$=(-8)\times(-6)\times 2$

$=96$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 $x^2$의 계수는? [2점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

(3)

$_5C_2 \times 2^2 = \boxed{40}$

24. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, $A^C$은 $A$의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{13}{24}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{17}{24}$

(4)

$P(A)P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A)=a,\ P(B)=b$

$\{1-P(A)\}P(B) = \frac{1}{4}$

$\frac{1-a}{a} = \frac{1}{2},\ 2-2a=a$

$\therefore a = \boxed{\frac{2}{3}}$

25. $0 < a < b$인 두 상수 $a$, $b$에 대하여 이산확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | $a$ | $b$ | 합계 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{3}$ | $a$ | $b$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{18}$ 일 때, $ab$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

⑤

$a+b=\frac{2}{3}$

$a^2+b^2=\frac{5}{18}$

$\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=ab$

$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}-\frac{5}{18}\right)=\frac{3}{36}=\boxed{\frac{1}{12}}$

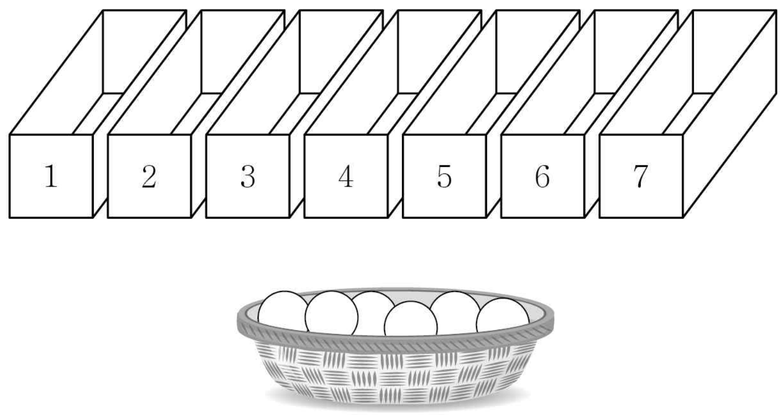
26. 공이 3개 이상 들어 있는 바구니와 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적힌 7개의 비어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 $n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$일 때,
>
> 숫자 $n$이 적힌 상자에 공이 들어 있지 않으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 $n$이 적힌 상자에 넣고,
>
> 숫자 $n$이 적힌 상자에 공이 들어 있으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 7이 적힌 상자에 넣는다.

이 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상일 확률은? [3점]

④

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$




1 − 공의 개수=0 (3번 다 다른 숫자)

$1-\cancel{\frac{6}{6}}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\ 9=\boxed{\frac{4}{9}}$

27. 세 문자 P, Q, R 중에서 중복을 허락하여 8개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> 나열된 8개의 문자 중에서 세 문자 P, Q, R의 개수를 각각 $p$, $q$, $r$이라 할 때 $1 \le p < q < r$이다.

2

① 440 ② 448 ③ 456 ④ 464 ⑤ 472

p q r

1 2 5 → $\frac{8!}{5!2!} = 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$

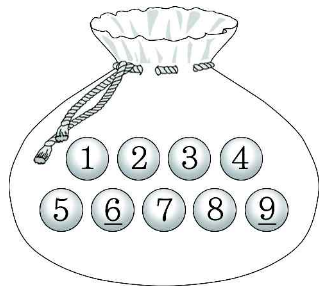
1 3 4 → $\frac{8!}{3!4!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$

$\boxed{448}$

28. 주머니에 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 4번 꺼내어 나온 공에 적혀 있는 수를 꺼낸 순서대로 $a$, $b$, $c$, $d$라 하자. $a \times b + c + d$가 홀수일 때, 두 수 $a$, $b$가 모두 홀수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

2

① $\frac{5}{26}$ ② $\frac{3}{13}$ ③ $\frac{7}{26}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{9}{26}$



a b c d

홀 홀 짝 짝 — $5 \times 4 \times 4 \times 3$

홀 홀 홀 홀 — $5 \times 4 \times 3 \times 2$

홀 짝 < 짝 홀 / 홀 짝

짝 홀 < 짝 홀 / 홀 짝 — $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 4$

짝 짝 < 짝 홀 / 홀 짝 — $4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2$

$$\frac{\cancel{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3} + \cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3} + \cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \cancel{5 \cdot 4 \cdot 4} \cdot 4 \cdot \cancel{3} + \cancel{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}} = \frac{2+1}{2+1+8+2}$$

$= \boxed{\frac{3}{13}}$

단답형

29. 두 양수 $m$, $\sigma$에 대하여 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 확률변수 $Y$는 정규분포 $\mathrm{N}(m^2+2m+16,\ \sigma^2)$을 따르고, 두 확률변수 $X$, $Y$는

$$\mathrm{P}(X \le 0) = \mathrm{P}(Y \le 0)$$

을 만족시킨다. $\sigma$의 값이 최소가 되도록 하는 $m$의 값을 $m_1$이라 하자. $m = m_1$일 때, 두 확률변수 $X$, $Y$에 대하여

$$\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(Y \le k)$$

를 만족시키는 상수 $k$의 값을 구하시오. [4점]

$P(Z \le -m) = P\left(Z \le -\frac{m^2+2m+16}{\sigma}\right)$

$m = \frac{m^2+2m+16}{\sigma}$

$\sigma = m+2+\frac{16}{m} \ge 10 \ (m=4)$

$m_1 = 4,\ \sigma = 10$

$P(Z \ge -3) = P\left(Z \le \frac{k-40}{10}\right)$

$\frac{k-40}{10} = 3$ $\boxed{k=70}$

30. 두 집합

$$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\quad Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1) \le f(2) \le f(1)+f(3) \le f(1)+f(4)$
> (나) $f(1)+f(2)$는 짝수이다.

$f(1)+f(2)$
홀 홀
짝 짝

$f(1)=1$ 1 ${}_6H_2$
3 ${}_5H_2$
5 ${}_3H_2$
3 3 ${}_6H_2$
5 ${}_5H_2$
5 5 ${}_6H_2$
2 2 ${}_6H_2$
4 ${}_5H_2$
6 ${}_3H_2$
4 4 ${}_6H_2$
6 ${}_5H_2$
6 6 ${}_6H_2$

$6\times21+4\times15+2\times6$
$=126+60+12$
$=\boxed{198}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

③

① $\frac{\ln 5}{3}$ ② $\frac{1}{\ln 5}$ ③ $\frac{2}{3}\ln 5$ ④ $\frac{2}{\ln 5}$ ⑤ $\ln 5$

$\frac{2}{3}\ln 5$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x = 3t - \frac{1}{t}, \quad y = te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

①

$dx = 3 + \frac{1}{t^2}$ , $dy = (t+1)e^{t-1}$

$t=1$ $\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\right\}=6$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

(2)

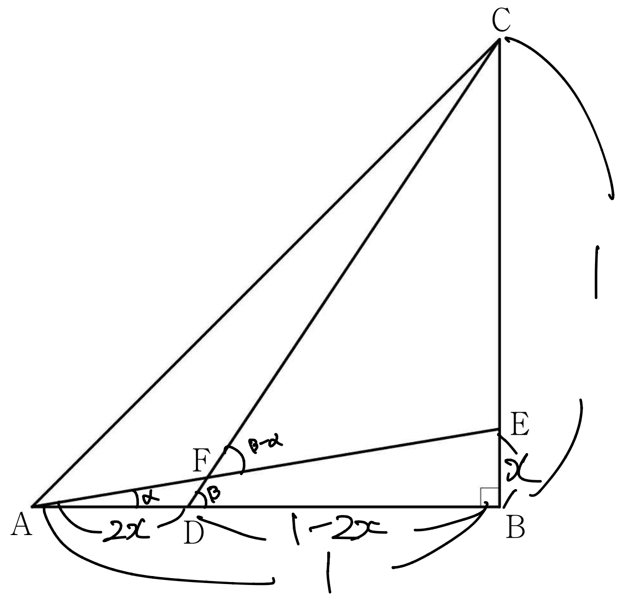
$a_n \fallingdotseq 3n$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{6n+6n^2}{3n^2+5}=\boxed{2}$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{AD}=2\overline{BE}\ \ (0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 점을 F라 하자. $\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle CDB)$의 값은? (단, $\frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}$) [3점]




① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

(4)

$\tan(\angle CFE)=\tan(\angle CDB-\angle EAB)$

$=\dfrac{\frac{1}{1-2x}-x}{1+\frac{x}{1-2x}}$

$=\dfrac{1-x+2x^2}{1-x}=\dfrac{16}{15}$

$15-15x+30x^2=16-16x$

$30x^2+x-1=0$

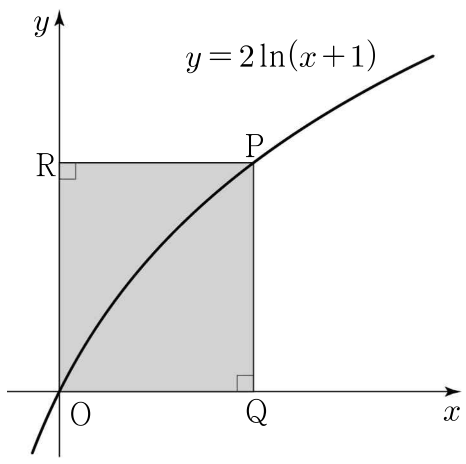
$5 \quad 1$
$6 \quad -1$ $\quad x=\frac{1}{6}$

$\tan(\angle CDB)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{2}}$

27. 양수 $t$에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 $x$축, $y$축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

3

① $-2+12\ln 2$ ② $-1+12\ln 2$ ③ $-2+16\ln 2$
④ $-1+16\ln 2$ ⑤ $-2+20\ln 2$




$f(t)=2t\ln(t+1)$

$\int_1^3 2t\ln(t+1)dt$ $t^2=(t+1)^2-2t-1$
$-2(t+1)+1$

$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3 \frac{t^2}{t+1}dt$

$=18\ln2-\ln2-\int_1^3\left\{(t+1)-2+\frac{1}{t+1}\right\}dt$

$=17\ln2-\left[\frac{1}{2}(t+1)^2-2t+\ln(t+1)\right]_1^3$

$=17\ln2-(8-6+2\ln2-2+2-\ln2)$

$=\boxed{16\ln2-2}$

28. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 $k\,(k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k)\\[2ex] \dfrac{1}{3} & (x=k)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, $k$의 값을 $\alpha$라 하자.

(가) $h(0)=1$
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은? [4점]

2

① $\frac{1}{84}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{28}$ ④ $\frac{1}{21}$ ⑤ $\frac{5}{84}$

$g(0)=0=f(0)$ $g(k)=f(k)=k$

$g'(k)=\frac{1}{3}$ $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ $f'(k)=3$

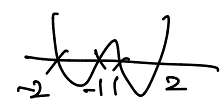
$f(x)=x(x-k)(x-a)+x=x^3-(a+k)x^2+akx+x$

$f'(x)=3x^2-2(a+k)x+ak+1$

$f'(k)=3k^2-2ak-2k^2+ak+1$
$=k^2-ak+1=3 \rightarrow a=k-\frac{2}{k}$

$f'(0)=ak+1=k^2-1$

$f'(x)\geq0 \rightarrow \frac{D}{4}=(a+k)^2-3ak-3$
$=a^2+2ak+k^2-3ak-3$
$=a^2-ak+k^2-3\leq0$
$=\cancel{k^2}-4+\frac{4}{k^2}-\cancel{k^2}+2+k^2-3$
$=k^2+\frac{4}{k^2}-5$




$=k^4-5k^2+4\leq0$
$(k^2-1)(k^2-4)\leq0$
$1\leq k\leq2$

$f'(x)=3x^2-6x+3$

$f'(0)$이 최대이므로 $\alpha=2,\ a=1$ $f(x)=x^3-3x^2+3x$

$h(9)=\frac{g(9)-2}{7}$ $f(x)=9$ $x^3-3x^2+3x-9=0$
$x=3$

$h(9)=\frac{1}{7}$ $g'(9)=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{12}$

$\therefore 2\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{12_6}=\boxed{\frac{1}{42}}$

단답형

29. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

$a_2, a_5, a_8, a_{11}$

$r \quad r^4 \quad r^7 \quad r^{10}$

$a_n = r^{n-1} \ (-1<r<1)$

$a_{2n} = r^{2n-1} \quad a_{3n-1} = r^{3n-2}$

i) $r<0$

$20\times\frac{r}{1-r^2} + 21\times\frac{r^4}{1-r^6} - 21\times\frac{r}{1-r^6} = 0$

$\frac{20r}{1-r^2} + \frac{21r(r^3-1)}{1-r^6} = 0$

$\frac{20}{1-r^2} - \frac{21}{1+r^3} = 0$, $20+20r^3 = 21-21r^2$

$20r^3+21r^2-1=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 20 & 21 & 0 & -1 \\ & & -20 & -1 & 1 \\ \hline & 20 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$(r-1)(20r^2+r-1)$

$4 \quad 1$
$5 \quad -1$

$(r-1)(4r+1)(5r-1)=0$

$\therefore r=-\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3(\frac{1}{4})^n+br^n}{(-\frac{1}{4})^n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\{3\cdot(-1)^n+b(-4r)^n\}=0$

$r=\frac{1}{4}$, $b=-3$

$b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=(-3)\times\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{9}{\frac{3}{4}}=\boxed{12}$

30. 상수 $a\,(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln(e^{|t|}-a)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 $k$는 다음 조건을 만족시킨다.

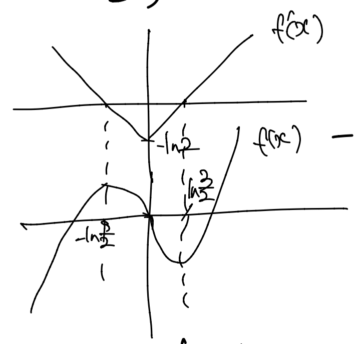
(가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.

(나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x)=\ln(e^{|x|}-a)$

$f'(\ln\frac{3}{2})=\ln(\frac{3}{2}-a)=0$ $\quad a=\frac{1}{2}$




$-\frac{f(k)}{6}=f(\ln\frac{3}{2})$

$\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$

$=-\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^{k}\frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$

$-\left[\ln\{f(x)+f(k)\}\right]_0^{\ln\frac{3}{2}}+\left[\ln\{f(x)+f(k)\}\right]_{\ln\frac{3}{2}}^{k}$

$=-\ln\frac{5}{6}f(k)+\ln f(k)+\ln 2f(k)-\ln\frac{5}{6}f(k)$

$=\ln\frac{2}{\frac{25}{36}}=\ln\frac{72}{25}=p$

$100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=\boxed{144}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 0)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② $2$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2a^2}=1$ 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 기울기가 $-3$일 때, $a$의 값은? (단, $a$는 양수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

25. 좌표평면 위의 점 A(4, 2) 에 대하여

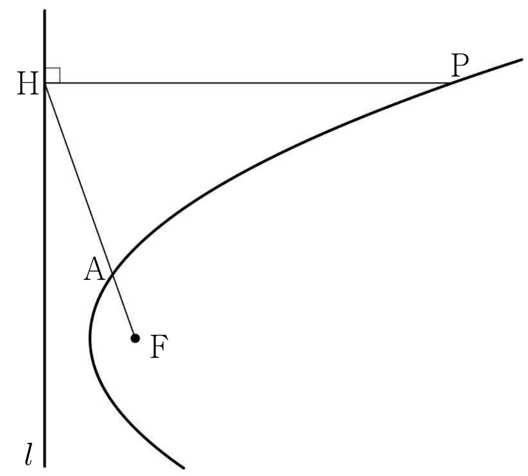
$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, 삼각형 OBC 의 넓이는?
(단, O 는 원점이다.) [3점]

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

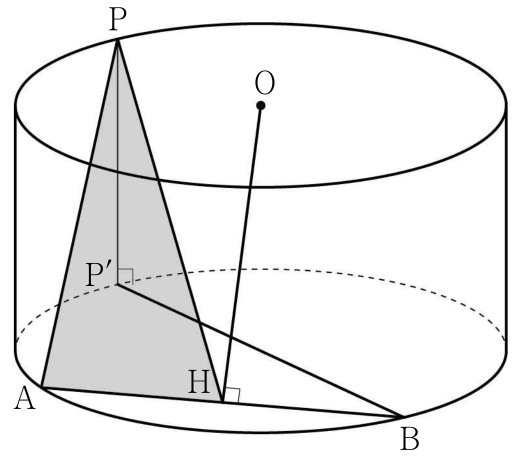
26. 점 F 를 초점으로 하고 직선 $l$ 을 준선으로 하는 포물선이 있다. 이 포물선 위의 한 점 P 에서 준선 $l$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 선분 FH 가 이 포물선과 만나는 점을 A 라 하자. 점 F 와 직선 $l$ 사이의 거리가 4 이고 $\overline{\mathrm{HA}}:\overline{\mathrm{AF}}=3:1$ 일 때, 선분 PH 의 길이는? [3점]

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27



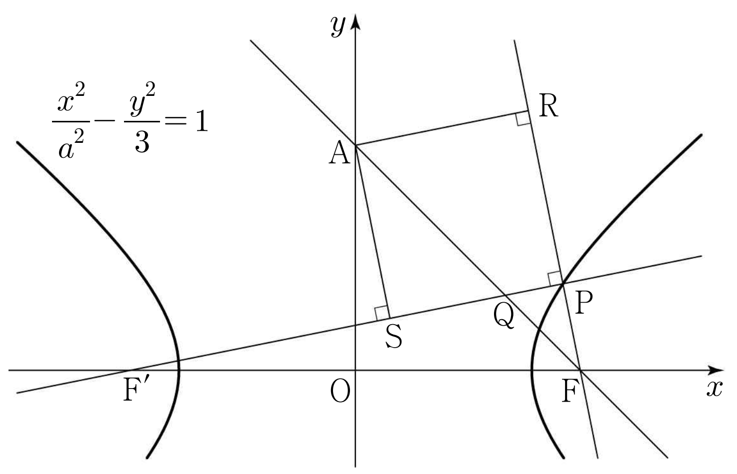
27. 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 3인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 한 밑면의 둘레 위의 한 점 P에서 다른 밑면에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, 점 P를 포함하는 밑면의 중심을 O라 하자. 점 P′을 포함하는 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{BP'}=6$, $\overline{OH}=\sqrt{13}$일 때, 삼각형 PAH의 넓이는? [3점]

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{5}$




28. 두 양수 $a$, $c$에 대하여 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$이 있다. 두 직선 PF, PF′이 서로 수직이 되도록 하는 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면 위의 점을 P, $\overline{PQ}=\frac{a}{3}$인 선분 PF′ 위의 점을 Q라 하자. 직선 QF와 $y$축이 만나는 점을 A라 할 때, 점 A에서 두 직선 PF, PF′에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자. $\overline{AR}=\overline{AS}$일 때, $a^2$의 값은? [4점]

① $\frac{18}{5}$ ② 4 ③ $\frac{22}{5}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{26}{5}$



## 단답형

29. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(6, 0), C(0, 1)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

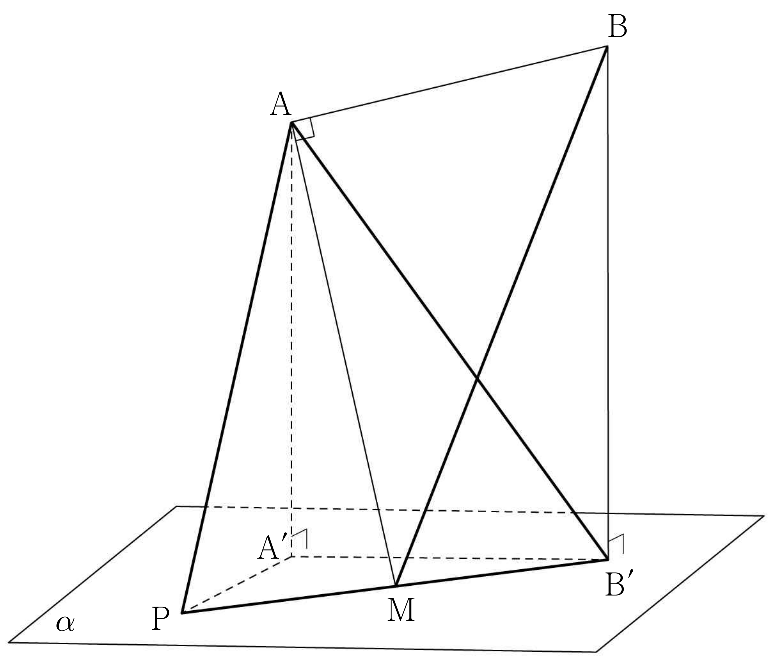
| |
|---|
| (가) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$ |
| (나) $\overrightarrow{QB} = 4\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QA}$ |

$|\overrightarrow{QA}| = 2$일 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = k$이다. $20 \times k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $k$는 상수이다.) [4점]

30. 공간에 점 P를 포함하는 평면 $\alpha$가 있다. 평면 $\alpha$ 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{AA'} = 9,\quad \overline{A'P} = \overline{A'B'} = 5,\quad \overline{PB'} = 8$$

이다. 선분 PB′의 중점 M에 대하여 $\angle MAB = \frac{\pi}{2}$일 때, 직선 BM과 평면 APB′이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하자. $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.