제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=2x^2+5x-2$ 에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 의 값은? [2점]

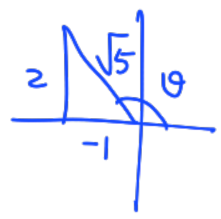
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 4x+5$

$f'(1) = 9$

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 인 θ 에 대하여 $\tan\theta=-2$ 일 때, $\sin(\pi+\theta)$ 의 값은? [3점]

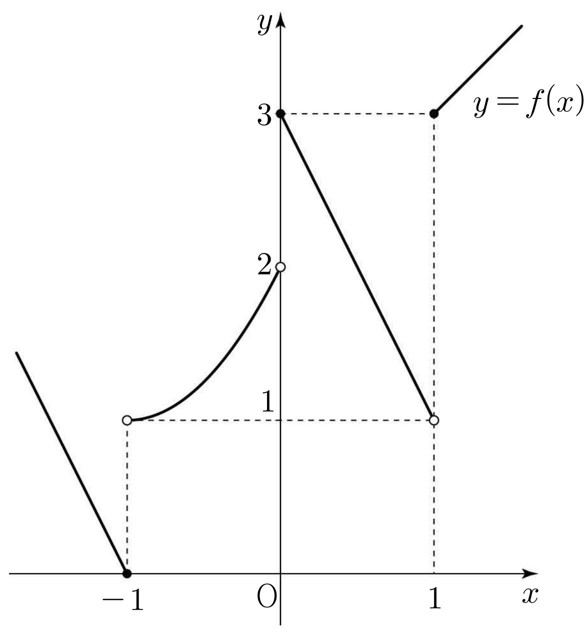
① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+3$

5. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$$

를 만족시킬 때, $\int_1^2 f'(x)dx$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$x=2 \rightarrow f(2)-f(1)=8+16-10=14$

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=4, \quad a_2a_4=1$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$r^2=4, \quad r=2$

$a_2a_4=a_3^2=1, \quad a_3=1$

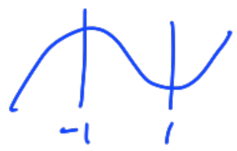
$a_6=1\times r^3=8$

$a_7=1\times r^4=16$) 24

7. 함수 $f(x)=x^3-3x+2a$의 극솟값이 $a+3$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$



$f(1)=2a-2=a+3, \quad a=5$

$f(-1)=-1+3+2a=12$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$x=0 \to \quad f(0)=-1$

$xf'(x)=6x^3-x$

$f'(x)=6x^2-1$

$f(x)=2x^3-x-1$

$f(-1)=-2+1-1=-2$

9. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,\ -\log_2 9)$, $\mathrm{B}(2a,\ \log_2 7)$, $\mathrm{C}(-\log_2 9,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(b,\ \log_8 7)$일 때, 2^{a+3b}의 값은? [4점]

① 63 ② 72 ③ 81 ④ 90 ⑤ 99

$$\begin{cases} 2a-\log_2 9 = 3b \\ -\log_2 9 + \cancel{\log_2 7} + a = 3\log_8 7 = \cancel{\log_2 7} \end{cases}$$

$a=\log_2 9$

$3b=\log_2 9$

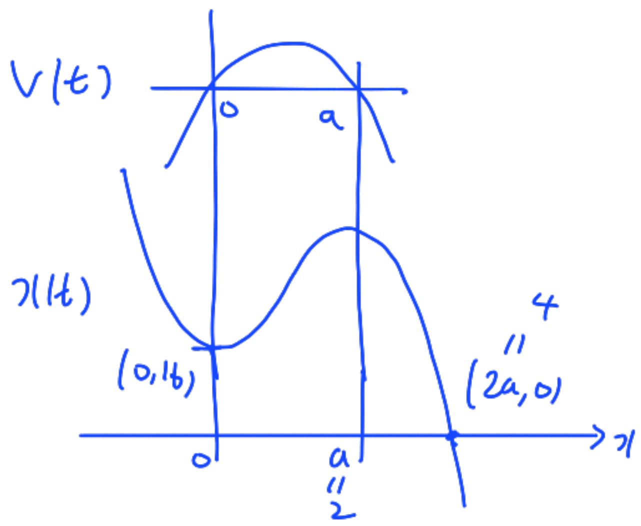
$2^{a+3b}=2^{2\log_2 9}=81$

10. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70



$x(t)=-t^3+\frac{3}{2}at^2+16$

$x(2a)=-2a^3+16=0,\ a=2$

$\int_0^5 |v(t)|dt=\int_0^2 v(t)dt-\int_2^5 v(t)dt$

$=\frac{3}{6}(2)^3-[-t^3+3t^2]_2^5$

$=4-((-50)-4)=58$

11. 공차가 $d\,(0<d<1)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) a_5는 자연수이다.
> (나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_8=\frac{68}{3}$이다.

a_{16}의 값은? [4점]

① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

$S_8 = 4(a_4+a_5) = \frac{68}{3}$

$(a_5-d)+a_5 = \frac{17}{3} = 5+\frac{2}{3}$

$a_5=3,\ d=\frac{1}{3}$

$a_{16} = 3+11d = \frac{20}{3}$

12. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x)=x^3+ax^2+bx$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+16$이다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\int_4^7 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$ ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

$x=4$ 연속 $\to 64+16a+4b = 0+16$

$x=4$ 미분가능 $\to 48+8a+b = b \to a=-6$

$4a+b=-12$, $b=12$

$f(x)=f(x-4)+16$

$\int_4^7 f(x)dx = \int_0^3 (f(x)+16)dx$

$= \int_0^3 (x^3-6x^2+12x)dx + 48$

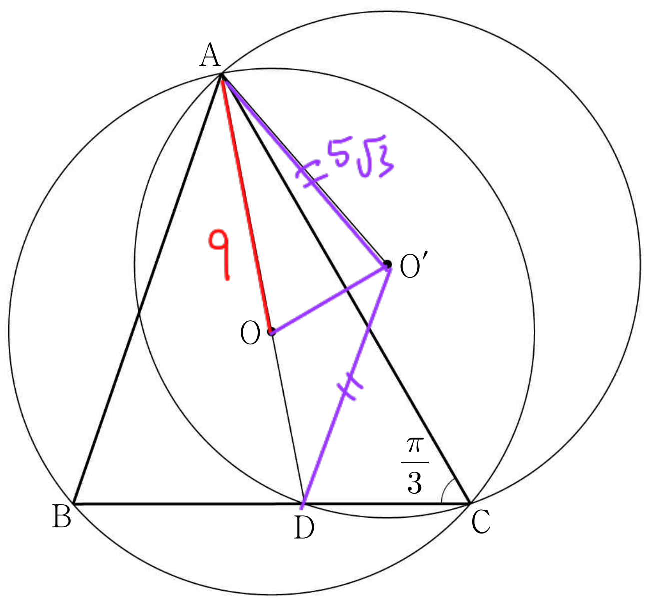
$= \frac{1}{4}\cdot 3^4 - 2\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 48$

$= \frac{81}{4} + 48 = \frac{273}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\quad \sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7},\quad \angle ACB=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O, 직선 AO 가 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. 삼각형 ADC 의 외접원의 중심을 O′ 이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$ 이다. $\overline{OO'}^2$ 의 값은? (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

$\frac{\frac{36}{\sqrt7}}{\sin(\angle BAC)} = 2R_1 = 18,\ R_1 = 9$

$\angle AO'D = \frac{2\pi}{3},\ \therefore \angle DAO' = \frac{\pi}{6}$

$\triangle AOO',\ OO'^2 = 81+75-2\cdot 9\cdot 5\sqrt3\cdot\frac{\sqrt3}{2}$

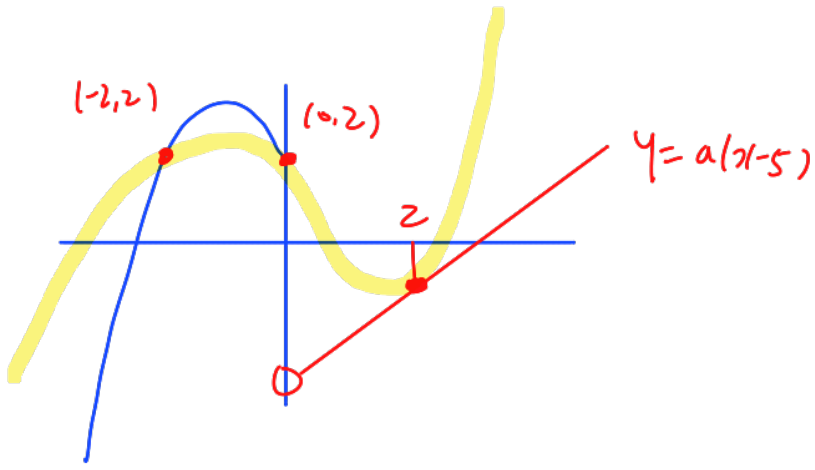
$= 156-135=21$

14. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1)^2+4 & (x\le 0) \\ a(x-5) & (x>0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 -2, 0, 2일 때, $g(2a)$의 값은? [4점]

① 14 ② 18 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30



$g(x) = (x-2)^2(x-k)+a(x-5)$

$g(-2) = 16(-2-k)-7a = 2$

$g(0) = -4k-5a = 2$

$-16k-7a=34$

$-16k-20a=8$

$13a=26,\ a=2,\ k=-3$

$g(x)=(x-2)^2(x+3)+2(x-5)$

$g(2a)=g(4)=28-2=26$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right)\\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

a_n: 음이 아닌 정수

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

64 32 16 8 4 2 1
10 5
24 12 6 3
16 8 4 2 1 0
6 3
4 2 1 0
1 0

$1+4+6+16+24+10+64=125$

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{11}$

$x>6$

$x+9=4x-24$

$x=11$

17. 함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{50}$

$f'(x)=(x^2+x-2)+(x-3)(2x+1)$

$f'(5)=28+2\cdot 11=50$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=45,\quad 2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$$

일 때, a_{15}의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{37}$

$\sum_{1}^{15} a_k = 5$

$5+\sum_{1}^{15} a_k = 42+\sum_{1}^{14} a_k$

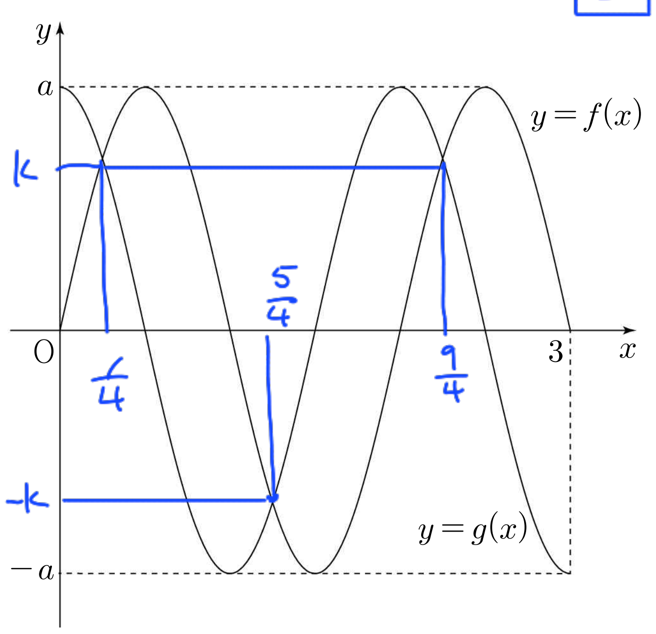
$a_{15}=42-5=37$

19. 양수 a에 대하여 $0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin \pi x,\quad g(x)=a\cos \pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{2}$



$\frac{1}{2}\times 2\times|2k|=2$

$k=1$

$(\frac{1}{4},1)$, $f(\frac{1}{4})=1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}a=1$, $a^2=2$

20. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a\ne 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

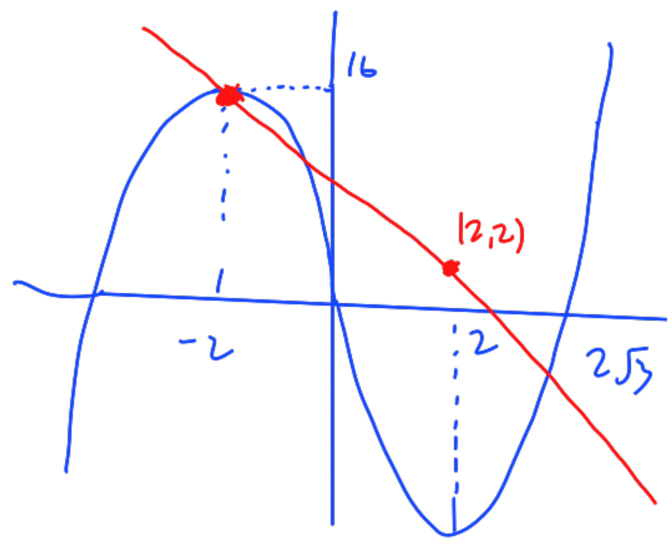
이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오. [4점]

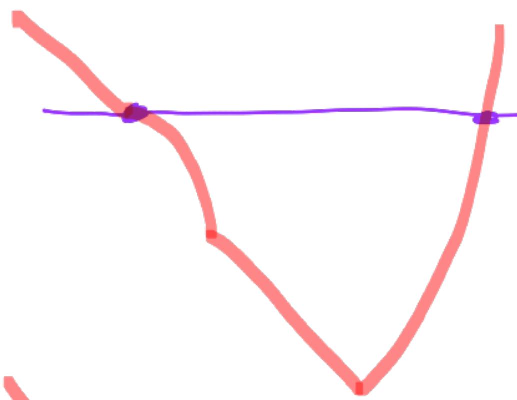
$\boxed{35}$

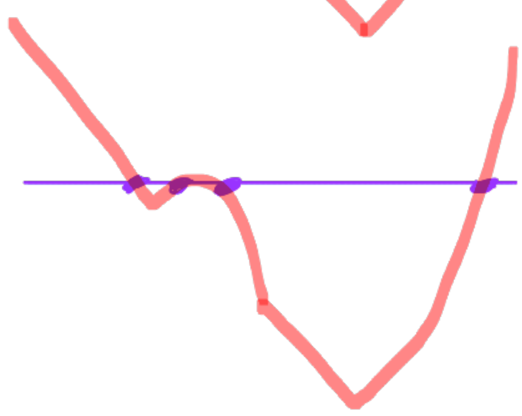
$f(x)=x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$　$(-2,16)$



$(-2,16),(2,2)$

기울기 $a=\frac{-7}{2}$





$M=0$

$m=-\frac{7}{2}$

$10(M-m)=35$

21. $m \le -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

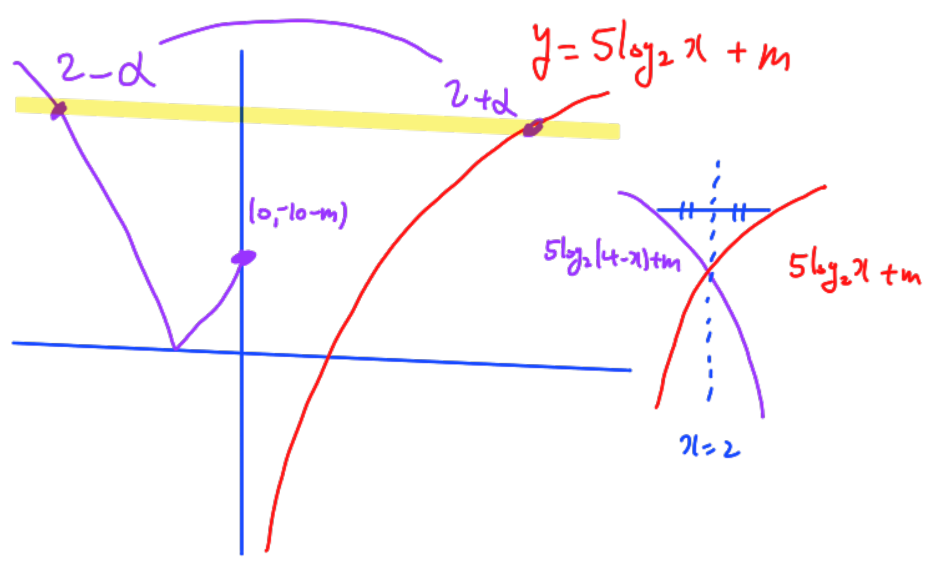
$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

$(0, |10+m|)$ $(0,-10-m)$

이다. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{8}$

$t \ge a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.

합 : 4로 일정

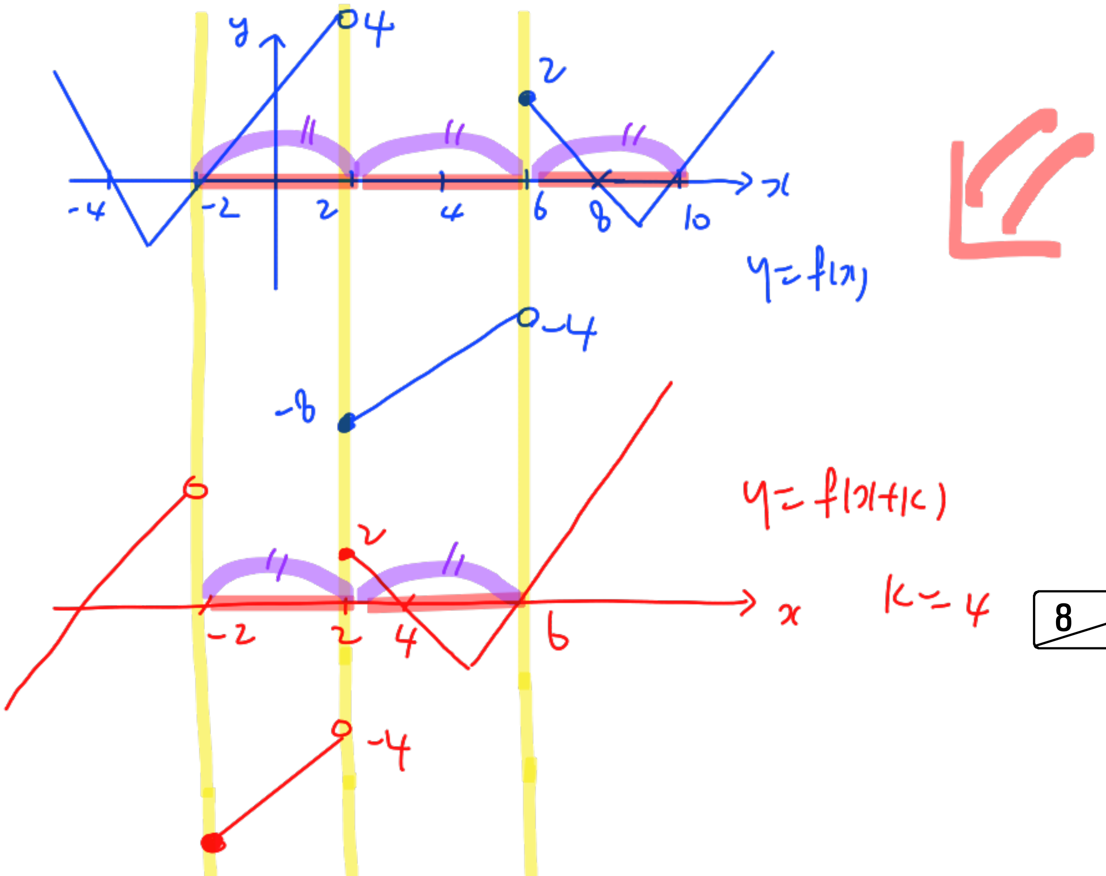


$5\log_2(4-x)+m$ & $5\log_2 x+m$: $x=2$ 대칭

$a<-10-m$ $g(t)$는 일정 X

$a \ge -10-m$ $g(t)=4$ $\therefore -10-m=2$, $m=-12$

$f(m)=f(-12)=|20-12|=8$



22. 두 자연수 a, $b\,(a<b<8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

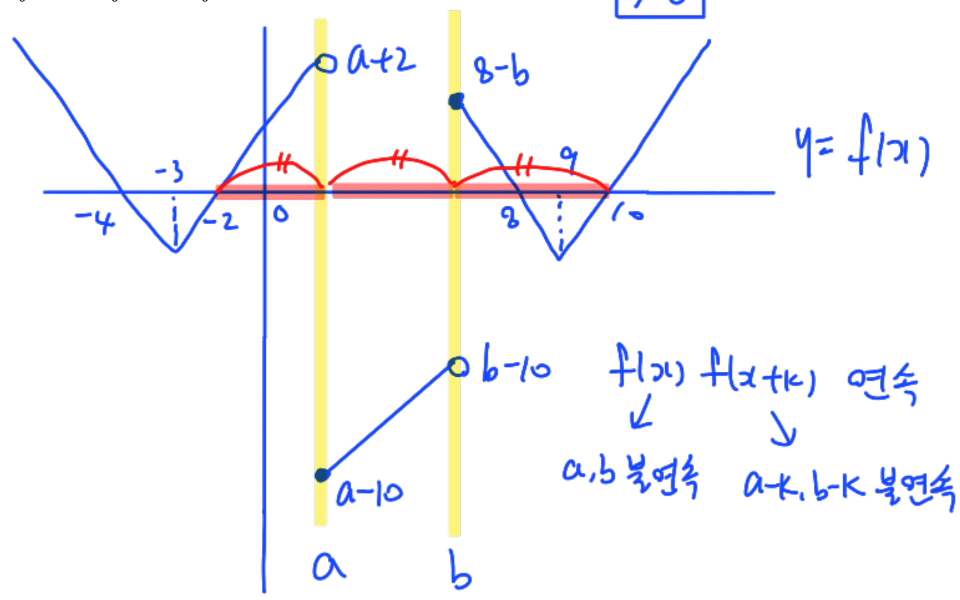
$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<a) \\ x-10 & (a \le x < b) \\ |x-9|-1 & (x \ge b) \end{cases}$$

$(8,-2)$

이다. 함수 $f(x)$와 양수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) $f(k)<0$

$f(a)\times f(b)\times f(k)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{96}$



$x=b$에서 $f(x)$는 불연속 & $f(x+k)$는 연속이므로 $f(b+k)=0$

$\therefore b+k=8$ or 10

i) $b+k=8$ → $x=a$에서 $f(x)$ 불연속, $f(x+k)\neq 0$이므로 $f(x+k)$도 불연속이 되어야 함.

& $x=a-k$에서 $f(x+k)$는 불연속 & $f(x)$는 연속이므로 $f(a-k)=0$

$\therefore a-k=-4$ or -2 평행이동 간격 일치

$\therefore k=a-(-4)=b-a=8-b$ → a b k / 1 6 / 2 8 (×)

or $k=a-(-2)=b-a=8-b$ → a b k / 1 4 / 2 6 / 3 8 (×)

ii) $b+k=10$

$x=a$에서 $f(x)$는 불연속, if) $f(a+k)=0$ ⇒ $8-k=a$, $10-k=b$ ⇒ $k=6$, $a=2$, $b=4$, $a-k=-4$, $b-k=-2$, $f(k)>0$ (×)

⇓

$f(a+k)\neq 0$이므로 $x=a$에서 $f(x+k)$도 불연속

& $x=a-k$에서 $f(x+k)$는 불연속 & $f(x)$는 연속이므로 $f(a-k)=0$

$\therefore a-k=-4$ or -2

* 확인 사항

$k=a-(-4)=b-a=10-b$ → a b k / 1 6 / 2 8 (×)

$k=a-(-2)=b-a=10-b$ → a b k / 1 4 (×) / 2 6 4

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$\therefore f(a)\times f(b)\times f(k)$

$=f(2)\times f(6)\times f(4)=(-8)\times 2\times(-6)=96$

$(a+2)(b-10)=(8-b)(a-10)$

$4(-4)=2(-8)$ (ok)

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$_5C_2 \cdot 2^2 = 40$

24. 두 사건 A, B가 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{13}{24}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{17}{24}$

$$\frac{P(A)\cancel{P(B)}}{P(A^c)\cancel{P(B)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

$P(A) = 2P(A^c)$

$\therefore P(A) = \frac{2}{3}$

25. $0 < a < b$ 인 두 상수 a, b 에 대하여 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	a	b	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	b	1

$\mathrm{E}(X) = \frac{5}{18}$ 일 때, ab 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

$$\begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ a^2+b^2=\frac{5}{18} \end{cases}$$

$(a+b)^2-2ab=\frac{5}{18}$

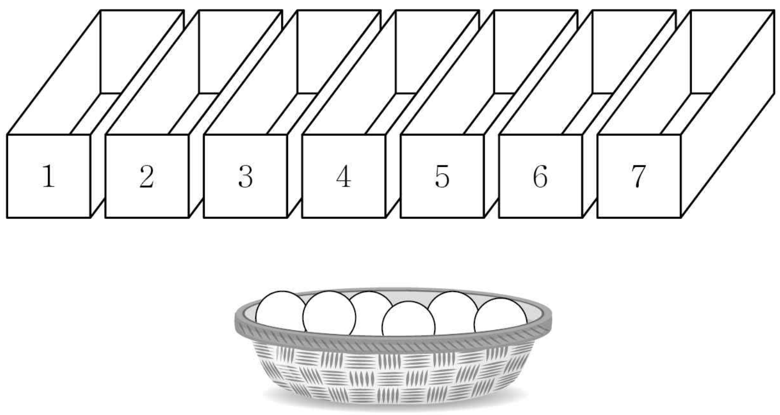
$\frac{4}{9}-2ab=\frac{5}{18}$, $ab=\frac{1}{12}$

26. 공이 3개 이상 들어 있는 바구니와 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적힌 7개의 비어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 $n\,(n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$일 때,
>
> 숫자 n이 적힌 상자에 공이 들어 있지 않으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 n이 적힌 상자에 넣고,
>
> 숫자 n이 적힌 상자에 공이 들어 있으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 7이 적힌 상자에 넣는다.

이 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



$1-(1\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6})=\frac{4}{9}$

27. 세 문자 P, Q, R 중에서 중복을 허락하여 8개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

나열된 8개의 문자 중에서 세 문자 P, Q, R의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때 $1 \le p < q < r$이다.

① 440 ② 448 ③ 456 ④ 464 ⑤ 472

p q r

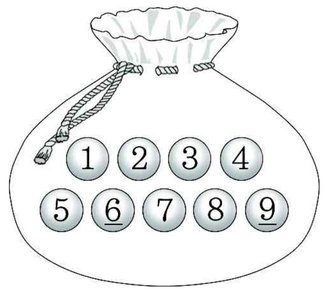
1 2 5 $\frac{8!}{5!2!} = 168$

1 3 4 $\frac{8!}{3!4!} = 280$

448

28. 주머니에 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 4번 꺼내어 나온 공에 적혀 있는 수를 꺼낸 순서대로 a, b, c, d라 하자. $a \times b + c + d$가 홀수일 때, 두 수 a, b가 모두 홀수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{5}{26}$ ② $\frac{3}{13}$ ③ $\frac{7}{26}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{9}{26}$



13579
2468

$(a \times b) + (c+d)$

짝 홀 짝 →

a b
짝 짝 $4 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 2) = 120$
홀 짝 $5 \cdot 4 \cdot (4 \cdot 3) = 240$
짝 홀 240

600

짝 짝 홀 → 〃 600

홀 짝 짝 $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$

홀 홀 홀 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

$\frac{360}{1560} = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}$

단답형

29. 두 양수 m, σ에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m^2+2m+16,\ \sigma^2)$을 따르고, 두 확률변수 X, Y는

$$\mathrm{P}(X \le 0) = \mathrm{P}(Y \le 0)$$

을 만족시킨다. σ의 값이 최소가 되도록 하는 m의 값을 m_1이라 하자. $m = m_1$일 때, 두 확률변수 X, Y에 대하여

$$\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(Y \le k)$$

를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{70}$

$P(Z \le -m) = P\left(Z \le \frac{-m^2-2m-16}{\sigma}\right)$

$\sigma = \frac{m^2+2m+16}{m} = m + \frac{16}{m} + 2 \ge 2\sqrt{16} + 2$

$= 10$

등호는 $m=4$

$\therefore m_1 = 4,\ \sigma = 10 \quad X \sim N(4, 1^2),\ Y \sim N(40, 10^2)$

$P\left(Z \ge \frac{1-4}{1}\right) = P\left(Z \le \frac{k-40}{10}\right)$

$-3 + \frac{k-40}{10} = 0,\ k = 70$

30. 두 집합

$$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\quad Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{198}$

(가) $f(1) \le f(2) \le f(1) + f(3) \le f(1) + f(4)$
(나) $f(1) + f(2)$는 짝수이다.

$f(1)$	$f(2)$	
짝	짝	
홀	홀	
1	1	${}_6H_2 = 21$
1	3	${}_5H_2 = 15$
1	5	${}_3H_2 = 6$
3	3	${}_6H_2 = 21$
3	5	${}_5H_2 = 15$
5	5	${}_6H_2 = 21$
2	2	
2	4	
2	6	
4	4	
4	6	
6	6	

99

99

198

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\ln 5}{3}$ ② $\frac{1}{\ln 5}$ ③ $\frac{2}{3}\ln 5$ ④ $\frac{2}{\ln 5}$ ⑤ $\ln 5$

24. 매개변수 $t\ (t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x = 3t - \frac{1}{t}, \quad y = te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$\frac{(t+1)e^{t-1}}{3+\frac{1}{t^2}}$ $\frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\right\}=6$$

일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \times \frac{4}{\sqrt{n^2+4}+n} = 6$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \times \frac{4n}{\sqrt{n^2+4}+n} = 6$$

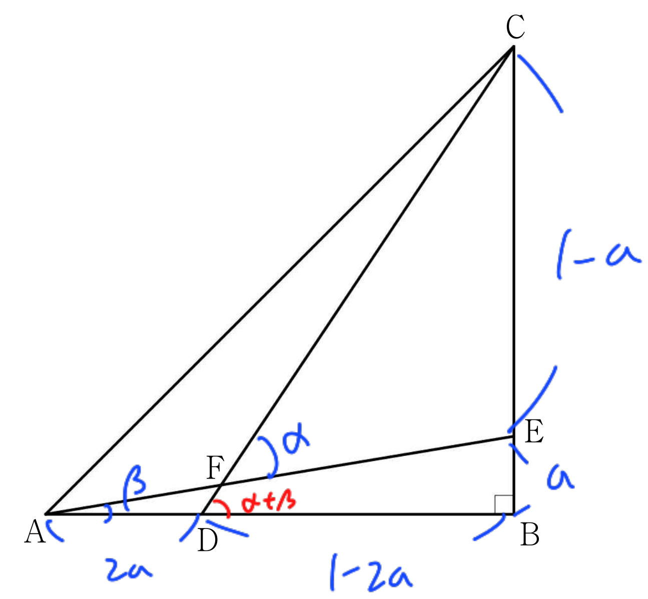
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2a_n}{n^2}+6}{\frac{a_n}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{0+6}{3+0} = 2$$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{AD}=2\overline{BE}\quad(0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 점을 F라 하자. $\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle CDB)$의 값은? (단, $\frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}$) [3점]



① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$$\tan\alpha = \frac{16}{15},\quad \tan\beta = a$$

$$\angle CDB = \alpha+\beta,\quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{1}{1-2a}$$

$$\therefore \frac{\frac{16}{15}+a}{1-\frac{16}{15}a} = \frac{1}{1-2a}$$

$$\frac{16+15a}{15-16a} = \frac{1}{1-2a}$$

$$15-16a = 16-17a-30a^2$$

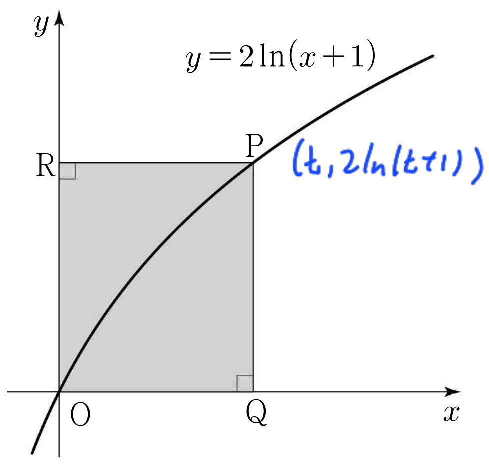
$$30a^2+a-1=0$$

$$(6a-1)(a+1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

27. 양수 t 에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$ 에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이를 $f(t)$ 라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-2+12\ln 2$　② $-1+12\ln 2$　③ $-2+16\ln 2$　④ $-1+16\ln 2$　⑤ $-2+20\ln 2$



$f(t) = 2t\ln(1+t)$

$\int_1^3 2t\ln(1+t)dt$

$t^2\ln(1+t)\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{1+t}dt$　　$\frac{t^2-2t+1}{t} = t-2+\frac{1}{t}$

$= (9\ln4 - \ln2) - \int_2^4 \frac{(t-1)^2}{t}dt$

$= 17\ln2 - \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t|\right]_2^4$

$= 17\ln2 - (\ln4 - (-2+\ln2))$

$= 16\ln2 - 2$

28. 최고차항의 계수가 1 이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 실수 $k\ (k>0)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 는

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k) \\ \dfrac{1}{3} & (x=k) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값이 최대일 때, k 의 값을 α 라 하자.

(가) $h(0)=1$
(나) 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$ 일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{84}$　② $\frac{1}{42}$　③ $\frac{1}{28}$　④ $\frac{1}{21}$　⑤ $\frac{5}{84}$

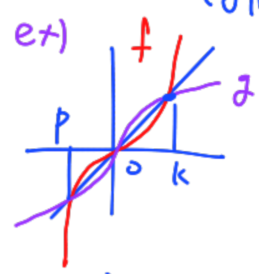
$h(0) = \frac{g(0)-k}{-k} = 1$　$\therefore g(0)=0 \rightarrow f(0)=0$

$h(x)$ 연속 $\Rightarrow \lim_{x\to k} h(x) = h(k)$

$\lim_{x\to k} \frac{g(x)-k}{x-k} = \frac{1}{3} \Rightarrow g(k)=k \rightarrow f(k)=k$

$(g'(k)=\frac{1}{3} \nearrow f'(k)=3$

$f(0)=0,\ f(k)=k$



$f(x) = x(x-k)(x-p)+x = x^3-(p+k)x^2+(pk+1)x$

$f'(x) = 3x^2-2(p+k)x+pk+1,\ f'(k)=k^2-pk+1=3$

$D/4 = p^2+2pk+k^2-3pk-3 \le 0$　　$p = k-\frac{2}{k}$

$p^2-pk+k^2-3 \le 0$

$p(p-k)+k^2-3 = -2+\frac{4}{k^2}+k^2-3 \le 0$

$k^4-5k^2+4 \le 0$　　$1 \le k^2 \le 4$

$f'(0) = pk+1 = k^2-1$ 최대 $\Rightarrow k^2=4,\ k=2=\alpha$　$p=1$

$f(x) = x^3-3x^2+3x$,　$f(3)=9,\ g(9)=3$

$f'(x) = 3x^2-6x+3$

$h(9) = \frac{g(9)-2}{9-2} = \frac{1}{7}$

$g'(9) = \frac{1}{f'(g(9))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{12}$

$2\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{42}$

단답형

29. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$|r|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{12}$

$a_n=r^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$

$\therefore -1<r<0$, $a_{2n-1}>0$, $a_{2n}<0$

$\sum_{1}^{\infty}|a_{3n-1}|=-a_2+a_5-a_8+a_{11}-\cdots=\frac{-r}{1+r^3}$

$\therefore \frac{20r}{1-r^2}+\frac{-21r}{1+r^3}=0$

$21(1-r^2)=20(1+r^3)$, $21-21r^2=20+20r^3$

$20r^3+21r^2-1=0$

$(r+1)(20r^2+r-1)=0$

$(r+1)(5r-1)(4r+1)=0$ $\therefore r=-\frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|(-\frac{1}{4})^{n-1}|+b_n}{(-\frac{1}{4})^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(3(-1)^{n-1}+(-4)^{n-1}b_n\right)$: 수렴

$\lim_{n\to\infty}\left(3(-1)^{n-1}+(-4)^{n-1}b_n\right)=0$

$\therefore b_n=-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, $b_1=-3$

$\therefore (-3)\times\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=12$

30. 상수 $a\,(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln\left(e^{|t|}-a\right)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.
(나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오. [4점]

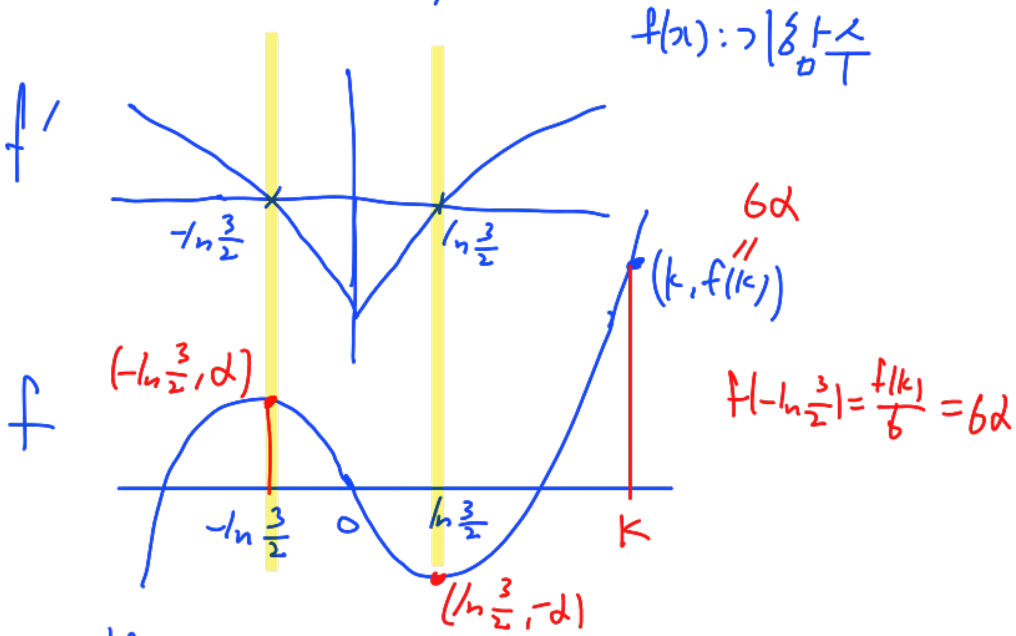
$\boxed{144}$

$f(0)=0$

$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-a\right)$, $f'(\ln\frac{3}{2})=\ln(\frac{3}{2}-a)=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-\frac{1}{2}\right)$, f': 우함수, $f(0)=0$

$f(x)$: 기함수



$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}=\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}=\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^{k}\frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$

$=\left[-\ln|f(x)+f(k)|\right]_0^{\ln\frac{3}{2}}+\left[\ln|f(x)+f(k)|\right]_{\ln\frac{3}{2}}^{k}$

$=-\ln 5\alpha+\ln 6\alpha+\ln 12\alpha-\ln 5\alpha=\ln\frac{72}{25}$

$\therefore 100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=144$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 0)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

24. 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2a^2}=1$ 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 기울기가 -3일 때, a의 값은? (단, a는 양수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\frac{2x}{8}+\frac{ay}{2a^2}=1$

$\left(-\frac{1}{4}\right)2a=-3$

$a=6$

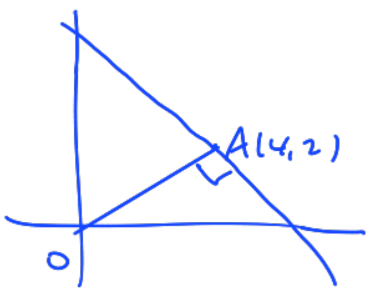
25. 좌표평면 위의 점 A(4, 2)에 대하여

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$



$\vec{n}=(4,2)$

$4(x-4)+2(y-2)=0$

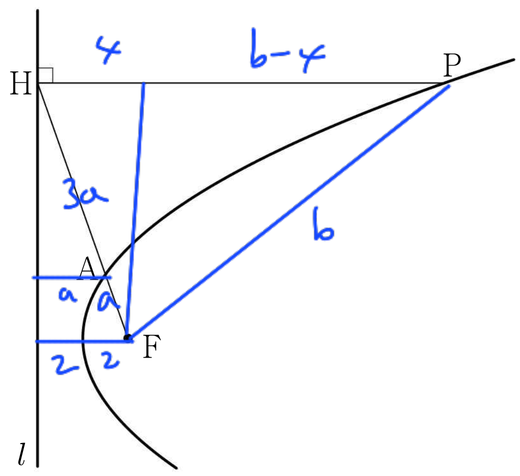
$2x+y-10=0$

$(0,10),\ (5,0)$

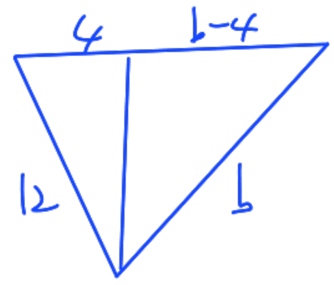
$S=\frac{1}{2}\cdot10\cdot5=25$

26. 점 F를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선이 있다. 이 포물선 위의 한 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 FH가 이 포물선과 만나는 점을 A라 하자. 점 F와 직선 l 사이의 거리가 4이고 $\overline{HA}:\overline{AF}=3:1$일 때, 선분 PH의 길이는? [3점]

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27



$4:4a=1:3$, $a=3$



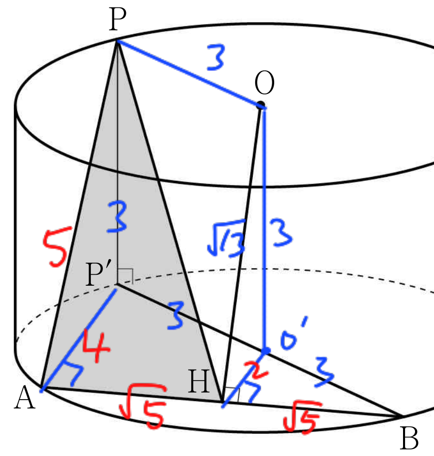
$12^2-4^2=b^2-(b-4)^2$

$128=8a-16$

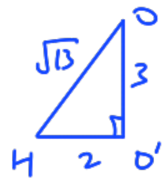
$a=18$

27. 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 3인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 한 밑면의 둘레 위의 한 점 P에서 다른 밑면에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, 점 P를 포함하는 밑면의 중심을 O라 하자. 점 P′을 포함하는 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{BP'}}=6$, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{13}$일 때, 삼각형 PAH의 넓이는? [3점]

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{5}$



$\overline{BP'}=6$ ∴ $\overline{BP'}$: 지름



$HO'=2 \rightarrow AP'=4 \rightarrow PA=5$

$HB=\sqrt{5}$

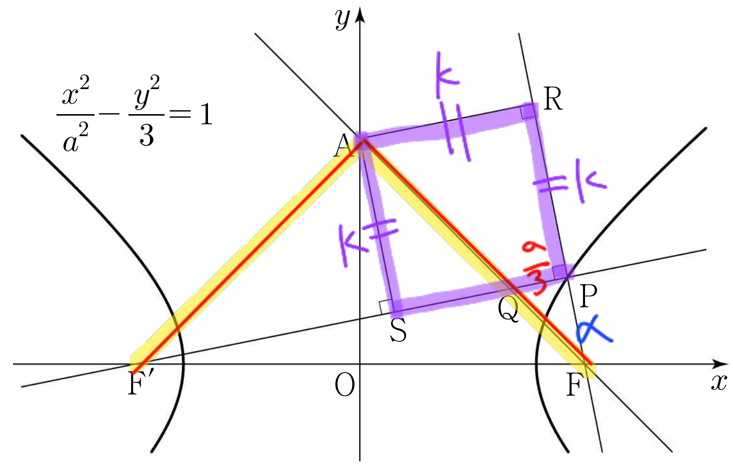
$AB \perp AP'$
$AB \perp PP'$) $AB \perp \square APP'$

∴ $AB \perp AP$

$S=\frac{1}{2}\times 5\times\sqrt{5}=\frac{5}{2}\sqrt{5}$

28. 두 양수 a, c에 대하여 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$이 있다. 두 직선 PF, PF′이 서로 수직이 되도록 하는 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면 위의 점을 P, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{a}{3}$인 선분 PF′ 위의 점을 Q라 하자. 직선 QF와 y축이 만나는 점을 A라 할 때, 점 A에서 두 직선 PF, PF′에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AS}}$일 때, a^2의 값은? [4점]

① $\frac{18}{5}$ ② 4 ③ $\frac{22}{5}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{26}{5}$



$AF'=AF$, $\triangle F'AS \equiv \triangle FAR$ (RHS)

∴ $RF=F'S$

$F'P-PF=2a$, $PF=d \rightarrow F'P=d+2a$

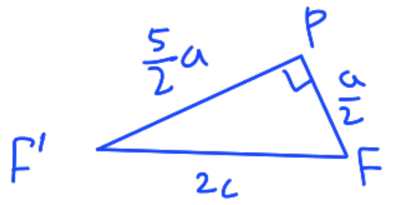
$\left(\begin{array}{l} F'S = d+2a-k \\ FR = d+k \end{array}\right) =$ ∴ $a=k$

$SQ=\frac{2}{3}a$

$\triangle ASQ \sim \triangle FPQ$ 2:1 닮음

∴ $PF=d=\frac{a}{2}$

$F'P=2k+d=\frac{5}{2}a$



$c^2=a^2+3$

$4c^2=\frac{25}{4}a^2+\frac{a^2}{4}=4(a^2+3)$, $\frac{5}{2}a^2=12$

$a^2=\frac{24}{5}$

단답형

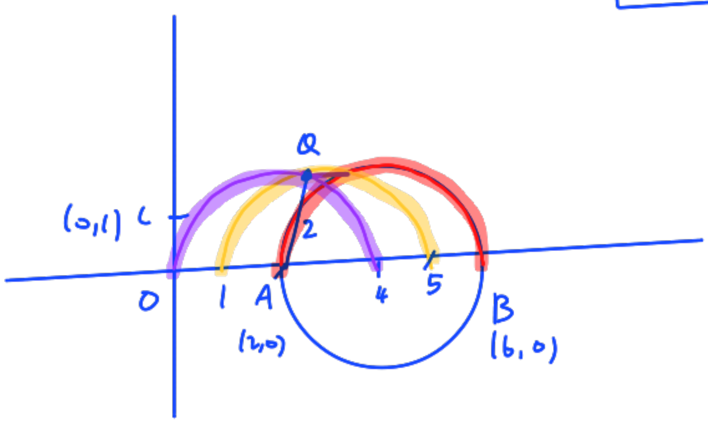
29. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(6, 0), C(0, 1)에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

원

(가) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge 0$
(나) $\overrightarrow{QB}=4\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QA}$

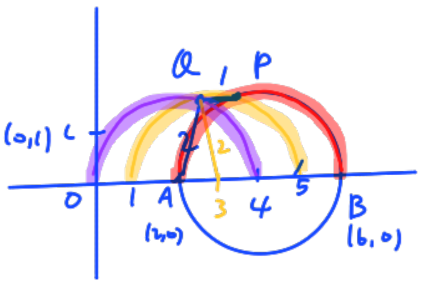
$|\overrightarrow{QA}|=2$일 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=k$이다. $20\times k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, k는 상수이다.) [4점]

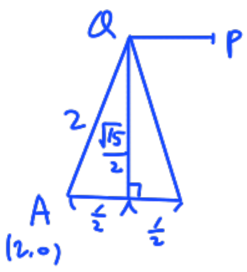
$\boxed{90}$



(가) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge 0 \to \angle COP \le 90^\circ$

(나) $\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{QP}$ $|\overrightarrow{AB}|=4$ $\therefore |\overrightarrow{QP}|=1$





A(2, 0)

Q$\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

P$\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}=\frac{9}{2}=k$

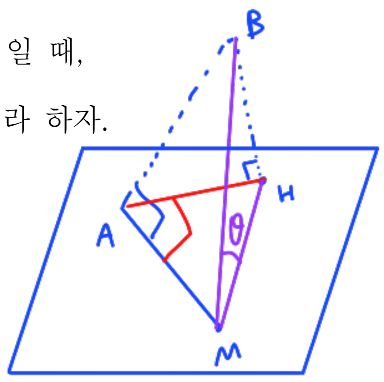
$\therefore 20k=90$

30. 공간에 점 P를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

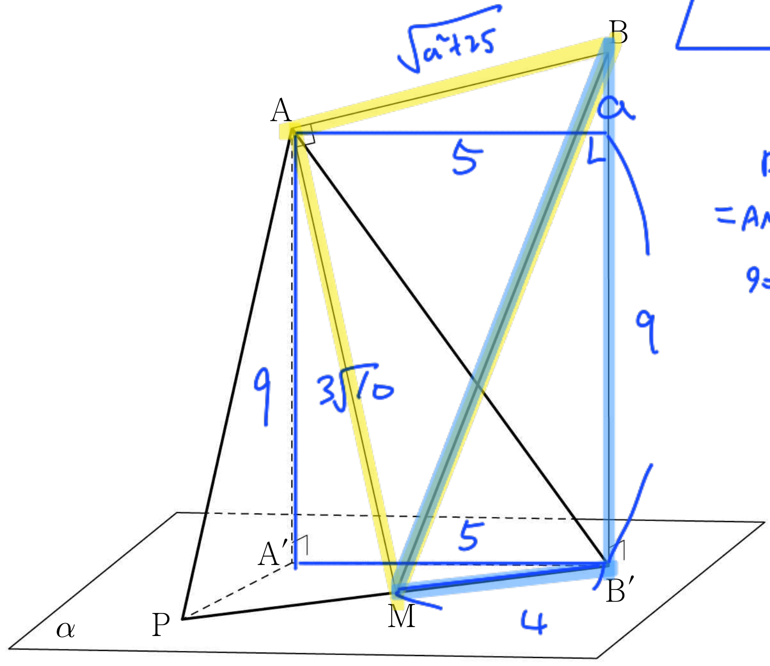
$$\overline{AA'}=9,\quad \overline{A'P}=\overline{A'B'}=5,\quad \overline{PB'}=8$$

이다. 선분 PB′의 중점 M에 대하여 $\angle MAB=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 BM과 평면 APB′이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{111}$

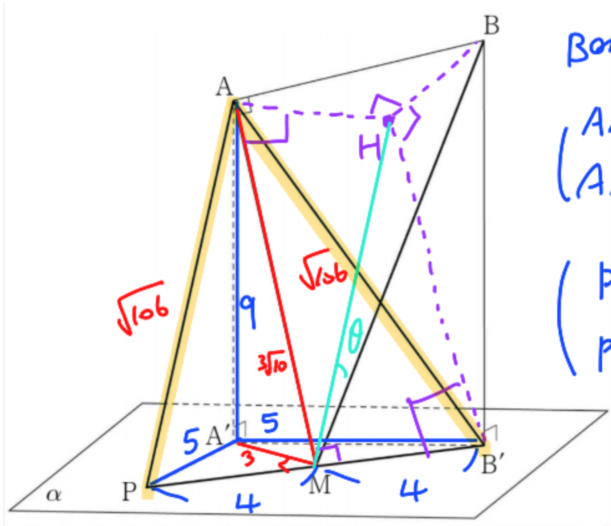


AM ⊥ AH



BM^2
$=AM^2+AB^2=MB'^2+BB'^2$
$90+a^2+25=(a+9)^2+16$
$115=18a+97$
$\therefore a=1$

$BB'=10$
$BM=\sqrt{116}$



B에서 △APB′에 내린 수선의 발: H

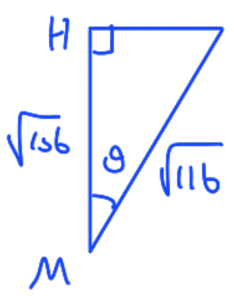
AM ⊥ AB, AM ⊥ BH ⇒ AM ⊥ AH

PB′ ⊥ BB′, PB′ ⊥ BH ⇒ PB′ ⊥ B′H

AMB′H 한 평면 위 네 점

∴ □AMB′H: 직사각형

⇒ HM = AB′ = $\sqrt{106}$



$\cos^2\theta=\frac{106}{116}=\frac{53}{58}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.