CIRCUIT.G

시즌.1

대성마이맥에서 역작이라고 강대X를 판매하는데...

서킷은 강매하면서 기하는 없더군요...

기하러들에게 조금이라도 도움이 되고자 만들었습니다.

문제는 평가원, 교육청, 사관 등등의 기출문제,
역대 EBS 모의고사와, 수특, 수완에서 문제를 뽑아내서
정리했을 뿐입니다.

때문에 문제 퀄리티가 그렇게 좋지 못하며,
해설 또한 EBS해설이기 때문에 그리 좋지는 않습니다..

그럼에도 불구하고 공통과목 연습과 함께
선택과목 또한 신경 써야 하기에 분명 도움이 될 것입니다.

난이도는 27~30번에 맞게 가져왔지만
문제가 문제이다 보니...
체감 난도는 조금 더 낮아질 거라 생각합니다.

시간 날 때마다 시즌에 맞춰
4회, 4회, 8회, 8회로 나눌 예정이니
서킷 공통과목을 풀고 바로 이어서 푸시면 됩니다.

그리고 문제 검토를 꼼꼼하게 못해서
다른 회차에 문제가 겹칠 수도 있어요 ㅠ

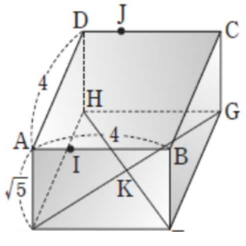
도움이 되길 바랍니다...

기하러 파이팅...!

-검열-

수학 영역(기하)

1. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=\sqrt{5}$인 직육면체 ABCD-EFGH에서 선분 AB와 선분 DC를 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 I, J라 하고, 선분 EG와 선분 FH의 교점을 K라 하자. 평면 IKJ와 평면 BKC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. [문제]

좌표평면에서 두 점 $A(1, 0)$, $B(1, 1)$에 대하여 두 점 P, Q가

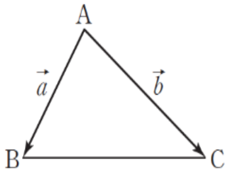
$$|\overrightarrow{OP}|=1,\quad |\overrightarrow{BQ}|=3,\quad \overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QP})=0$$

을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}$의 값은?
(단, O는 원점이고, $|\overrightarrow{AP}|>0$이다.)

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{18}{5}$

수학 영역(기하)

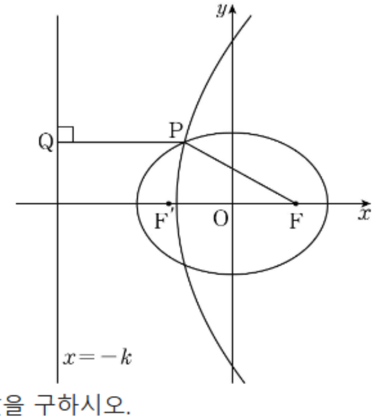
3. 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$라 하자. 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 2 : 1로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\vec{AP}+\vec{AQ}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m-n$의 값은?



① -4　② $-\frac{11}{3}$　③ $-\frac{10}{3}$　④ -3　⑤ $-\frac{8}{3}$

4. 그림과 같이 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k\,(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle F'FP)=\frac{7}{8}$
(나) $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$



$c+k$의 값을 구하시오.

2025학년도 대성마이맥 **CIRCUIT G 2**회 문제지

수학 영역(기하)

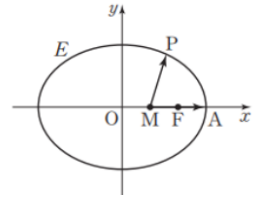
1. 포물선 $y^2 = 8x$의 초점을 F라 하자. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 포물선 $y^2 = 8x$의 교점을 P_n, 직선 $y=n$과 y축의 교점을 Q_n, $a_n = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① $\frac{465}{4}$ ② $\frac{233}{2}$ ③ $\frac{467}{4}$ ④ 117 ⑤ $\frac{469}{4}$

2. 그림과 같이 타원 E : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$의 한 초점 F에 대하여 선분 OF의 중점을 M이라 하고, 타원 E 의 장축의 한 끝점을 A라 하자. 타원 E 위를 움직이는 점 P에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MP}}$

를 만족시키는 점 Q가 나타내는 도형을 D라 할 때, 두 도형 E, D가 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, 두 점 F, A의 x좌표는 양수이고, O는 원점이다.)



① $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{3}$

수학 영역(기하)

3. 두 점 F, F′ 을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 위의 점 A 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AF}} < \overline{\mathrm{AF'}}$
(나) 선분 AF 의 수직이등분선은 점 F′ 을 지난다.

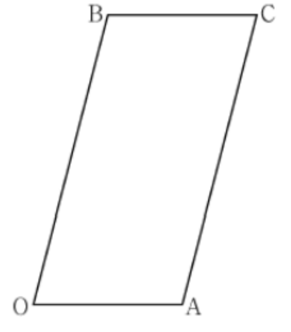
선분 AF 의 중점 M 에 대하여 직선 MF′ 과 쌍곡선의 교점 중 점 A 에 가까운 점을 B 라 할 때, 삼각형 BFM 의 둘레의 길이는 k 이다. k^2 의 값을 구하시오.

4. [문제]

좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB 에 대하여 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

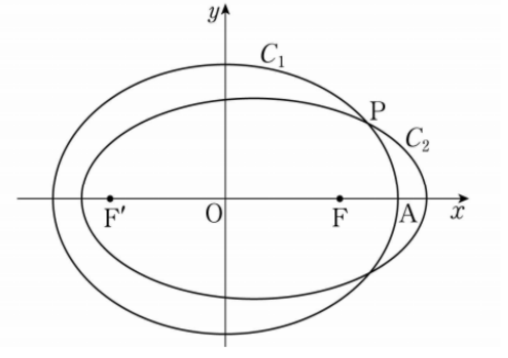
점 O 를 중심으로 하고 점 A 를 지나는 원 위를 움직이는 점 X 에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.)



2025학년도 대성마이맥 **CIRCUIT G 3**회 문제지

수학 영역(기하)

1. 장축의 길이가 6 이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$ 인 타원을 C_1 이라 하자. 장축의 길이가 6 이고 두 초점이 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ 인 타원을 C_2 라 하자. 두 타원 C_1 과 C_2 가 만나는 점 중 제1 사분면에 있는 점 P 에 대하여 $\cos(\angle\mathrm{AFP})=\dfrac{3}{8}$ 일 때, 삼각형 PFA 의 둘레의 길이는?



① $\dfrac{11}{6}$ ② $\dfrac{11}{5}$ ③ $\dfrac{11}{4}$ ④ $\dfrac{11}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{2}$

2. 좌표공간에서 세 양수 a, b, c에 대하여 중심이 A$(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구 S가 x축 위의 점 B에서 접한다. 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OA가 xy평면과 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

(나) 직선 OA와 직선 BH가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

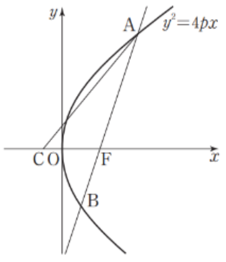
$\overline{\mathrm{OB}}=4$ 일 때, r의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{3}$
② $\sqrt{14}$
③ 4
④ $3\sqrt{2}$
⑤ $2\sqrt{5}$

3. 그림과 같이 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p>0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선이 포물선 $y^2=4px$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, x좌표가 음수인 x축 위의 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AF}}=2\,\overline{\mathrm{BF}}=2\,\overline{\mathrm{CF}}$
> (나) $\overline{\mathrm{AB}}=9$

선분 AC의 길이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.)



① $\sqrt{51}$
② $\sqrt{53}$
③ $\sqrt{55}$
④ $\sqrt{57}$
⑤ $\sqrt{59}$

4. 서로 평행한 두 직선 l_1, l_2가 있다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 d이다. 직선 l_2 위의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$이고, 직선 l_1 위의 점 C, 직선 l_2 위의 점 D에 대하여 $|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 최솟값은 12이다. $|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 값이 최소일 때의 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 크기를 k라 할 때, $d\times k$의 값은? (단, d는 $d\leq 5$인 상수이다.)

[4점]

① $16\sqrt{7}$
② $32\sqrt{2}$
③ 48
④ $16\sqrt{10}$
⑤ $16\sqrt{11}$

2025학년도 대성마이맥 CIRCUIT G 4회 문제지

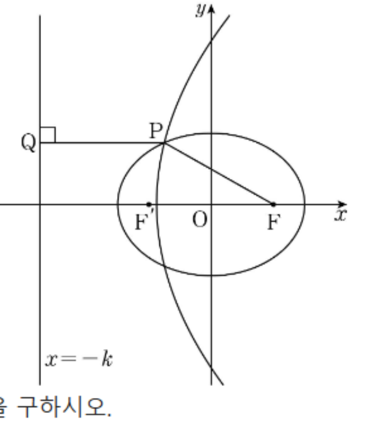
수학 영역(기하)

1. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 2), B(1, -1), C(2, 0)에 대하여 점 P가 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\vec{0}$를 만족시킬 때, 벡터 $\overrightarrow{AP}$의 모든 성분의 합은?

① $-\frac{13}{3}$ ② $-\frac{11}{3}$ ③ -3 ④ $-\frac{7}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

2. 그림과 같이 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12 인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k\,(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle F'FP)=\frac{7}{8}$
(나) $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$



$c+k$의 값을 구하시오.

수학 영역(기하)

3. 평면 위의 등변사다리꼴 ABCD에 대하여 같은 평면 위에 있는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

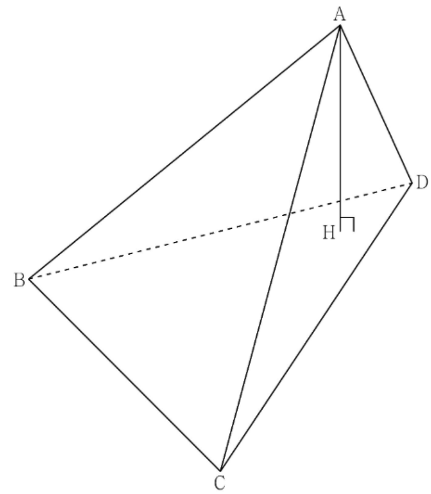
> (가) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$
>
> (나) $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 16일 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값을 구하시오. (단, $\angle B=\angle C$이다.)

4. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

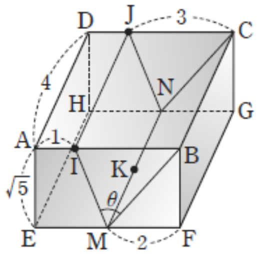
> (가) $\angle\mathrm{AEH}=\angle\mathrm{DAH}$
>
> (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{\mathrm{DE}}=4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



CIRCUIT.1

1번 문제 해설



선분 EF의 중점을 M, 선분 HG의 중점을 N이라 하면 평면 IKJ와 평면 BKC의 교선은 직선 MN이고 $\bar{IM}\perp\bar{MN}$, $\bar{BM}\perp\bar{MN}$이므로 θ는 두 직선 IM, MB가 이루는 예각의 크기와 같다.

이때 $\bar{IM}=\bar{IE}=\sqrt{\bar{AE}^2+\bar{AI}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$,

$\bar{BM}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$, $\bar{BI}=3$

즉, 삼각형 BIM은 $\bar{BI}=\bar{BM}$인 이등변삼각형이므로 $\theta=\angle\mathrm{IMB}$

$$\cos(\angle\mathrm{IMB})=\frac{\frac{1}{2}\bar{IM}}{\bar{BM}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

2번 문제 해설

출제의도 : 벡터를 이용하여 나타낸 도형과 주어진 조건을 만족하는 도형 위의 점으로 이루어진 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left|\vec{OP}\right|=1$에서 점 P는 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

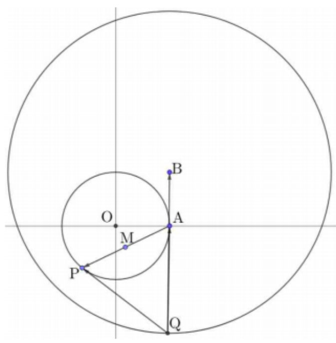
$\left|\vec{BQ}\right|=3$에서 점 Q는 점 B를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

선분 AP의 중점을 M이라고 하면

$\vec{AP}\cdot(\vec{QA}+\vec{QP})=\vec{AP}\cdot 2\,\vec{QM}=0$

그러므로 $\triangle\mathrm{QMP}\equiv\triangle\mathrm{QMA}$이므로 $|\vec{QP}|$의 최솟값은 $\bar{AQ}$의 최솟값 2와 같고 이때 Q의 좌표는 $(1,\ -2)$이다. 즉,

$\vec{BQ}=(0,-3)$



점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

M의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b}{2}\right)$이고

$\vec{\mathrm{AP}} \cdot \vec{\mathrm{QM}} = 0$이므로

$\vec{\mathrm{AP}} \cdot \vec{\mathrm{QM}} = (a-1,\ b) \cdot \left(\frac{a+1}{2} - 1,\ \frac{b}{2} + 2\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{(a-1)^2 + b(b+4)\right\} = 0 \ \cdots$ ㉠

$|\vec{\mathrm{OP}}| = 1$이므로 $a^2 + b^2 = 1 \ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$-2a + 4b + 2 = 0, a = 2b + 1 \ \cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2b+1)^2 + b^2 - 1 = 0$

$b(5b+4) = 0$

$b = 0$ 또는 $b = -\frac{4}{5}$

$|\vec{\mathrm{AP}}| > 0$이므로 $b = -\frac{4}{5}$

($\because$ $b = 0$이면 $|\vec{\mathrm{AP}}| = 0$)

㉢에서 $a = 2b + 1 = -\frac{3}{5}$

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$이므로

$\vec{\mathrm{AP}} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

따라서

$\vec{\mathrm{AP}} \cdot \vec{\mathrm{BQ}} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) \cdot (0, -3)$

$= -\frac{8}{5} \times 0 + \left(-\frac{4}{5}\right) \times (-3)$

$= \frac{12}{5}$

정답 ③

3번 문제 해설

점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\vec{AP} = \frac{2\vec{AC} + \vec{AB}}{2+1}$

$= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

점 Q는 선분 BC를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$\vec{AQ} = \frac{2\vec{AC} - \vec{AB}}{2-1}$

$= 2\vec{b} - \vec{a}$

$\vec{AP} + \vec{AQ} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) + \left(2\vec{b} - \vec{a}\right)$

$= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{8}{3}\vec{b}$

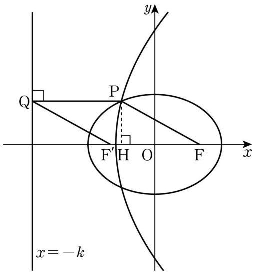
따라서 $m = -\frac{2}{3}, n = \frac{8}{3}$이므로

$m - n = -\frac{10}{3}$

4번 문제 해설

{출제의도}

포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F 가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\bar{FP} = \bar{PQ}$ 이다.

조건 (나)의 $\bar{FP} - \bar{F'Q} = \bar{PQ} - \bar{FF'}$에서

$\bar{F'Q} = \bar{FF'}$

두 직선 FF', PQ 가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 에서

$\angle PQF = \angle F'FQ$

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle QFP = \angle PQF = \angle F'FQ = \angle F'QF$

이고, 선분 FQ 는 공통이므로

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 서로 합동이다.

즉 $\bar{FP} = \bar{PQ} = \bar{F'Q} = \bar{FF'}$

장축의 길이가 12 이고 $\bar{FP} = \bar{FF'} = 2c$ 이므로

$\bar{PF'} = 12 - 2c$

삼각형 PFF' 에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2 = (2c)^2 + (2c)^2 - 2 \times (2c)^2 \times \cos(\angle F'FP$

$c^2 - 16c + 48 = 0$

$(c-4)(c-12) = 0$

장축의 길이가 12 이므로 $c < 6$ 에서 $c = 4$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\bar{FP} = 8$ 에서

$\bar{FH} = \bar{FP} \times \cos(\angle F'FP) = 7$

$\bar{FH} = 7$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $4 - 7 = -3$ 이고

$\bar{PQ} = \bar{FP} = 8$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $-k + 8$ 이므로

$-3 = -k + 8$, 즉 $k = 11$

따라서 $c + k = 15$

CIRCUIT.2

1번 문제 해설

포물선 $y^2 = 8x$의 초점의 좌표는 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -2$이다.

직선 $y = n$이 포물선 $y^2 = 8x$와 만나는 점의 좌표가

$\mathrm{P}_n\left(\frac{\mathrm{n}^2}{8}, \mathrm{n}\right)$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} + 2$이므로

$a_n = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

$= 2\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} + 2$

$$= 2 \times \frac{n^2}{8} + 2$$

$$= \frac{n^2}{4} + 2$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{n^2}{4} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times 10$$

$$= \frac{465}{4}$$

2번 문제 해설

타원 E의 초점 F의 x좌표를 $c\ (c > 0)$이라 하면

$c^2 = 9 - 5 = 4$이므로 $c = 2$이고, 선분 OF의 중점 M의 좌표는 (1, 0)이다.

또 타원 E의 장축의 한 끝점 A의 좌표는 (3, 0)이다.

한편,

$\vec{\mathrm{MA}} + \vec{\mathrm{MP}} = (\vec{\mathrm{OA}} - \vec{\mathrm{OM}}) + (\vec{\mathrm{OP}} - \vec{\mathrm{OM}})$

$= \vec{\mathrm{OP}} + \vec{\mathrm{OA}} - 2\vec{\mathrm{OM}}$ ...... ㉠

이고, $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{MF}} = \overline{\mathrm{FA}} = 1$이므로

$-2\vec{\mathrm{OM}} = 2\vec{\mathrm{MO}} = \vec{\mathrm{FO}} = \vec{\mathrm{AM}}$

이때

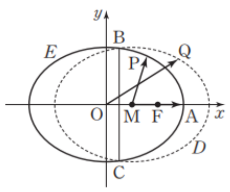
$\vec{\mathrm{OA}} - 2\vec{\mathrm{OM}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AM}} = \vec{\mathrm{OM}}$ ...... ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서

$\vec{\mathrm{MA}} + \vec{\mathrm{MP}} = \vec{\mathrm{OP}} + \vec{\mathrm{OM}}$

그러므로 $\vec{\mathrm{OQ}} = \vec{\mathrm{MA}} + \vec{\mathrm{MP}}$, 즉 $\vec{\mathrm{OQ}} = \vec{\mathrm{OP}} + \vec{\mathrm{OM}}$이다.

이때 점 P는 타원 E 위를 움직이므로 점 Q가 나타내는 도형 D는 타원 E를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 타원이고, 두 타원 E, D는 선분 OM의 수직이등분선에 대하여 서로 대칭이다.



즉, 두 타원 E, D의 교점을 B, C라 하면 두 점 B, C의 x좌표는 모두

$\frac{1}{2}$이다.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\frac{\frac{1}{4}}{9}+\frac{y^2}{5}=1, y^2=5\times\left(1-\frac{1}{36}\right)=\frac{175}{36}$$

이므로 $y=\pm\frac{5\sqrt{7}}{6}$

따라서 두 점 B, C의 y좌표는 각각 $\frac{5\sqrt{7}}{6}, -\frac{5\sqrt{7}}{6}$이므로

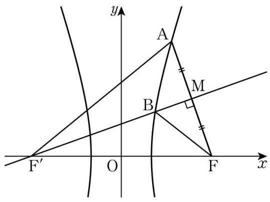
두 교점 B, C 사이의 거리는

$$2\times\frac{5\sqrt{7}}{6}=\frac{5\sqrt{7}}{3}$$

3번 문제 해설

{출제의도}

쌍곡선의 성질을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 의 두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}\,(6,\ \ 0), \mathrm{F'}\,(-6,\ \ 0)$ 이라 하자.

점 $\mathrm{F'}$ 이 선분 AF 의 수직이등분선 위의 점이므로
두 직각삼각형 $\mathrm{AF'M}, \mathrm{FF'M}$ 이 합동이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=12$
점 A 가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=4$ 에서 $\overline{\mathrm{AF}}=8$
점 M 은 선분 AF 의 중점이므로
$\overline{\mathrm{AM}}=4$
직각삼각형 $\mathrm{AF'M}$에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{MF'}}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$
점 B 가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}-4$ 이고
$\overline{\mathrm{BM}}=8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}}$ 이므로
삼각형 BFM 의 둘레의 길이는
$$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FM}}+\overline{\mathrm{BM}}=\left(\overline{\mathrm{BF'}}-4\right)+4+\left(8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}}\right)$$
$$=8\sqrt{2}$$
따라서 $k=8\sqrt{2}$ 이므로 $k^2=128$

4번 문제 해설

출제의도 : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.
조건 (나)에서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

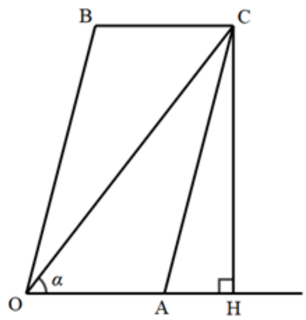
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-1=2$

이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

(i) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA=\alpha$라 하자.



$\angle CAH=\angle AOB$에서

$\cos(\angle CAH)=\cos(\angle AOB)=\frac{1}{4}$

이므로

$\overline{AH}=\overline{AC}\times\cos(\angle CAH)$

$=\overline{OB}\times\frac{1}{4}$

$=2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편,

$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$

$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\quad=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$

$=2+8+2=12$

이므로

$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$

그러므로

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\alpha$

$=|\overrightarrow{OP}|\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{OP}|=3$

이므로

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향이면

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=3|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{OX}|$

이므로

$M=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(ii) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|$

$=|\overrightarrow{OP}|\times2\sqrt{3}=3$

이므로

$|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=3|\overrightarrow{OP}|-|\overrightarrow{OX}|$

이므로

$m=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여

$M\times m=4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right)$

$=6\sqrt{6}-8$

이므로

$a^2+b^2=6^2+(-8)^2$

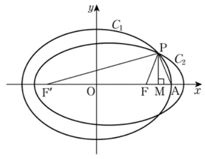
$=100$

정답 100

CIRCUIT.3

1번 문제 해설

[출제의도] 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



두 타원 C_1 , C_2 의 장축의 길이가 같으므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{PA}+\overline{\mathrm{PF'}}$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{PA}$

삼각형 PFA가 이등변삼각형이므로

선분 FA의 중점을 M이라 하면

$\angle\mathrm{PMF}=90^\circ$

$\cos(\angle\mathrm{AFP})=\dfrac{\overline{\mathrm{FM}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\dfrac{3}{8}$에서

$\overline{\mathrm{FM}}=3k(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=8k$

타원 C_1 의 장축의 길이가 6이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=6-8k$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{OA}}-2\overline{\mathrm{FM}}=3-6k$이므로

$\overline{\mathrm{F'M}}=\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{FM}}=2\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FM}}$

$=2(3-6k)+3k=6-9k$

직각삼각형 $\mathrm{PF'M}$에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{F'M}}^2$이고

직각삼각형 PFM에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{FM}^2$이므로

$(6-8k)^2-(6-9k)^2=(8k)^2-(3k)^2$

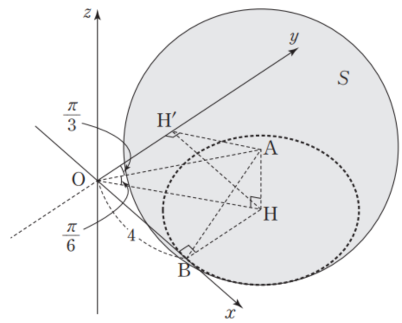
$k(12-17k)=55k^2,\ 12k(6k-1)=0$

$k>0$이므로 $k=\dfrac{1}{6}$

따라서 삼각형 PFA 의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{FA}}=8k+8k+6k=22k=\dfrac{11}{3}$

2번 문제 해설



구 S가 x축에 접하고, $\overline{\mathrm{OB}}=4$ 이므로 $a=4$이고

$r=\sqrt{b^2+c^2}$ …… ㉠

직선 OA가 xy평면과 이루는 각은 ∠AOH이고, 조건 (가)에 의하여

$\angle\mathrm{AOH}=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=k$라 하면

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{OA}}\ \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{k}{2}$

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OA}}\ \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}k$

점 H에서 y축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}'} \perp \overline{\mathrm{AH}'}$이고,
두 직선 OA, BH가 이루는 각의 크기는 두 직선 OA, OH'이 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 조건 (나)에 의하여 $\angle\mathrm{AOH}' = \dfrac{\pi}{3}$이므로

직각삼각형 OAH'에서

$\overline{\mathrm{OH}'} = \overline{\mathrm{OA}}\ \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{k}{2}$

즉, $\overline{\mathrm{BH}} \equiv \dfrac{k}{2}$

직각삼각형 OBH에서 $\overline{\mathrm{OH}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2$
이므로

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2 = 4^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

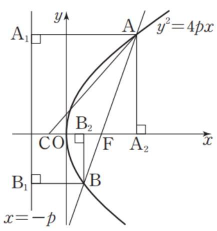
$k^2 = 32$
$k > 0$이므로
$k = 4\sqrt{2}$
따라서 $b = \overline{\mathrm{BH}} = 2\sqrt{2},\ c = \overline{\mathrm{AH}} = 2\sqrt{2}$이므로 ㉠에서
$r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}$
$= \sqrt{16} = 4$

3번 문제 해설

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AF}} : \overline{\mathrm{BF}} = 2 : 1, \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CF}} = 3 : 1$이므로
조건 (나)에서

$\overline{\mathrm{CF}} = \dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}} = 3 \cdots\cdots$ ㉠

점 C의 x좌표를 $c\,(c < 0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{CF}} = p - c, \overline{\mathrm{AF}} = 2\overline{CF} = 2p - 2c$
두 점 A, B에서 포물선의 준선
$x = -p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$이라 하고, 두 점 A, B에서 x축에
내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2$라 하자.
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AA}_1} = \overline{\mathrm{AF}} = 2p - 2c$
$\overline{\mathrm{BB}_1} = \overline{\mathrm{BF}} = p - c$



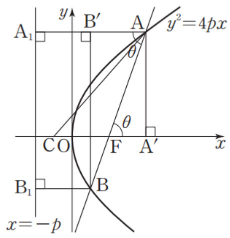
점 F$(p, 0)$과 준선 $x = -p$ 사이의 거리가 $2p$이므로
$\overline{\mathrm{AF}_2} = \overline{\mathrm{AA}_1} - 2p = (2p - 2c) - 2p = -2c$
$\overline{\mathrm{BF}_2} = 2p - \overline{\mathrm{BB}_1} = 2p - (p - c) = p + c$
이때 $\overline{\mathrm{AF}} : \overline{\mathrm{BF}} = 2 : 1$이므로 두 삼각형 AFA_2, BFB_2는 닮음비가
2 : 1인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{\mathrm{AF}_2} : \overline{\mathrm{BF}_2} = 2 : 1$이므로
$-2c : (p+c) = 2 : 1$
$2p + 2c = -2c, p = -2c$
㉠에서 $\overline{\mathrm{CF}} = p - c = -3c = 3$이므로 $c = -1$
$\overline{\mathrm{AF}} = 6$, $\overline{\mathrm{A_2F}} = -2c = 2$
$\overline{\mathrm{AA_2}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2 - \overline{\mathrm{A_2F}}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{CA_2}} = \overline{\mathrm{CF}} + \overline{\mathrm{FA_2}}$=3+2=5
따라서 직각삼각형 ACA_2에서
$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AA_2}}^2 - \overline{\mathrm{CA_2}}^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{57}$

{다른 풀이}
조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AF}} : \overline{\mathrm{BF}} = 2 : 1$, $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CF}} = 3 : 1$이므로
조건 (나)에서

$$\overline{\mathrm{CF}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}} = 3$$

두 점 A, B에서 포물선의 준선
$x = -p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_1}, \mathrm{B_1}$, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발
을 A$'$, 점 B에서 선분 $\mathrm{AA_1}$에 내린 수선의 발을 B$'$이라 하자.



포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{BB_1}} = \overline{\mathrm{A_1B'}} = 3$,
$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AA_1}} = 6$이므로
$\overline{\mathrm{AB'}} = \overline{\mathrm{AA_1}} - \overline{\mathrm{A_1B'}} = 3$
$\angle\mathrm{BAB'} = \theta$라 하면

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{AB'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

삼각형 AFA$'$에서 $\angle$AFA$'$=θ이므로

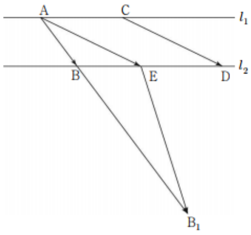
$$\overline{\mathrm{FA'}} = \overline{\mathrm{AF}}\cos\theta = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$\overline{\mathrm{AA'}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2 - \overline{\mathrm{A_2F}}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$
삼각형 AA$'$C에서
$\overline{\mathrm{CA'}} = \overline{\mathrm{CF}} + \overline{\mathrm{FA'}}$=3+2=5이므로
$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AA_2}}^2 - \overline{\mathrm{CA_2}}^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{57}$

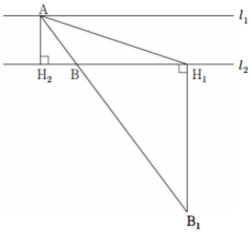
4번 문제 해설

[출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

점 A를 시점으로 하는 벡터 $4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점을
$\mathrm{B_1}$이라 하자.
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 시점이 A가 되도록 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$를
평행이동시킨 벡터의 종점을 E라 하면
$4\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB_1}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{EB_1}}$



점 B_1에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면
점 E가 점 H_1일 때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{EB}_1}\right|$의 값은 최소이다.
$\left|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$의 최솟값이 12이므로 $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{H}_1}=12$
점 A에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.



삼각형 $\mathrm{AH}_2\mathrm{B}$, $\mathrm{B}_1\mathrm{H}_1\mathrm{B}$는 서로 닮음이고
$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BB}_1}=15$이므로 닮음비는 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AH}_2}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{H}_1}=4$이므로 $d=4$

$\overline{\mathrm{BH}_2}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}_2}^2}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BH}_1}=3\overline{\mathrm{BH}_2}=9$
$\overline{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2}=\overline{\mathrm{BH}_1}+\overline{\mathrm{BH}_2}=12$
그러므로
$k=\overline{\mathrm{AH}_1}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}_2}^2+\overline{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2}^2}$
$=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$
따라서 $d\times k=16\sqrt{10}$

CIRCUIT.4

1번 문제 해설

원점 O에 대하여

$\vec{AC} + \vec{PA} + 2\vec{PB}$
$= (\vec{OC} - \vec{OA}) + (\vec{OA} - \vec{OP}) + 2(\vec{OB} - \vec{OP})$
$= 2\vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OP}$
$= \vec{0}$

이므로

$3\vec{OP} = 2\vec{OB} + \vec{OC}$
$\quad = 2(1, -1) + (2, 0)$
$\quad = (4, -2)$

따라서 $\vec{OP} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

$$= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (3, 2)$$

$$= \left(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

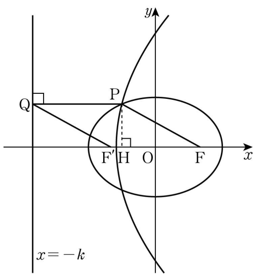
이므로 벡터 $\vec{AP}$의 모든 성분의 합은

$$-\frac{5}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{13}{3}$$

2번 문제 해설

{출제의도}

포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F 가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 이다.

조건 (나)의 $\overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$에서
$\overline{F'Q} = \overline{FF'}$
두 직선 FF', PQ 가 서로 평행하므로
두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 에서
$\angle PQF = \angle F'FQ$
두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 모두 이등변삼각형이므로
$\angle QFP = \angle PQF = \angle F'FQ = \angle F'QF$
이고, 선분 FQ 는 공통이므로
두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 서로 합동이다.
즉 $\overline{FP} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'}$
장축의 길이가 12 이고 $\overline{FP} = \overline{FF'} = 2c$ 이므로
$\overline{PF'} = 12 - 2c$
삼각형 PFF' 에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2 = (2c)^2 + (2c)^2 - 2 \times (2c)^2 \times \cos(\angle F'FP$
$c^2 - 16c + 48 = 0$
$(c-4)(c-12) = 0$
장축의 길이가 12 이므로 $c < 6$ 에서 $c = 4$
점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
$\bar{FP} = 8$ 에서
$\bar{FH} = \bar{FP} \times \cos(\angle F'FP) = 7$
$\bar{FH} = 7$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $4 - 7 = -3$ 이고
$\bar{PQ} = \bar{FP} = 8$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $-k+8$ 이므로
$-3 = -k + 8$, 즉 $k = 11$
따라서 $c + k = 15$

3번 문제 해설

조건 ㈎에서

$$\vec{0} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$
$$= -\overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AP}$$

이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}{2}$$

선분 BC의 중점을 M, 선분 AD의 중점을 N이라 하면

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

이므로 ㉠에서

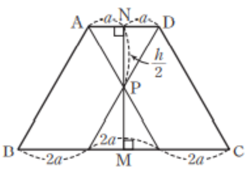
$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}}{2}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}}{2}$$

이고, 사각형 ABCD가 등변사다리꼴이므로

$\overline{AD} \perp \overline{MN}$, $\overline{BC} \perp \overline{MN}$

이다. $\overline{AD} = 2a$라 하고 사다리꼴 ABCD의 높이를 h라 하면 등변사다리꼴 ABCD는 다음 그림과 같다.



$\overline{BC} = 6a$이고 등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}(2a + 6a)h = 4ah = 16,\ ah = 4$$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = a^2 + \frac{h^2}{4} \geq 2 \times \frac{ah}{2} = 4$$

이므로 $|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값은 2이다.

답 2

4번 문제 해설

{출제의도} 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $\angle CED = 90^\circ$ 이므로 두 직선 BC, DE 는 서로 수직이다.
삼수선의 정리에 의하여
$\bar{AH} \perp$ (평면 BCD), $\bar{HE} \perp \bar{BC}$ 이므로 $\bar{AE} \perp \bar{BC}$
즉 직선 BC 와 평면 AED 는 서로 수직이므로
두 직선 BC, AD 도 서로 수직이다. $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH 는 닮음이므로
$\angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{EAH} + \angle\mathrm{HAD} = 90^\circ$
그러므로 두 직선 AD, AE 는 서로 수직이다. $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 직선 AD 는 평면 ABC 와 서로 수직이다.
정삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{AE}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 점 E 는 선분 BC 의 중점
이다. 즉 $\overline{\mathrm{AE}} = 2\sqrt{3}$
직각삼각형 AED 에서

$$\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{\overline{\mathrm{DE}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2} = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

직각삼각형 AED 에서 $\overline{\mathrm{AE}} \times \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{DE}}$ 이므로
$2\sqrt{3} \times 2 = \overline{\mathrm{AH}} \times 4$, $\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{3}$
직각삼각형 AHD 에서

$$\overline{\mathrm{DH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

삼각형 AHD 의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

두 평면 ABD, AHD 가 이루는 예각의 크기를 θ 라
하면 $\theta = \angle\mathrm{BAE} = 30^\circ$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$$

따라서 $p = 4$, $q = 3$ 이므로 $p + q = 4 + 3 = 7$