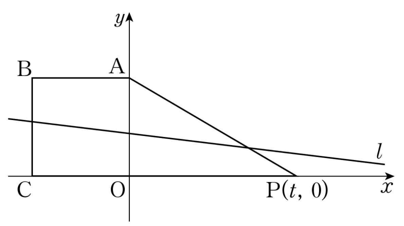
약점보완 테스트 12회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 두 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{-x^2+10x-16}$의 그래프에 동시에 접하는 직선을 l이라 하고, 두 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $\sqrt{19}$ ⑤ $\sqrt{21}$

2. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\,0)$, $\mathrm{A}(0,\,2)$, $\mathrm{B}(-2,\,2)$, $\mathrm{C}(-2,\,0)$과 점 $\mathrm{P}(t,\,0)\,(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)$의 값은?



① $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$

3. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0\le x<2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0,\ 2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? [2017년 교육청]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

5. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 $0,\ 1,\ p,\ 2,\ q$이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < p < 2 < q$)

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] ⑤

$y=\sqrt{1-x^2}$의 양변을 제곱하면

$y^2=1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$

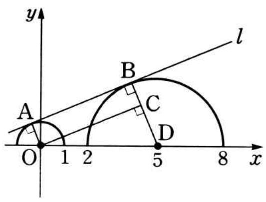
즉 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 중심이 $(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 1인 원에서 $y\geq 0$인 부분이다.

또한 $y=\sqrt{-x^2+10x-16}$의 양변을 제곱하면

$y^2=-x^2+10x-16 \Rightarrow (x-5)^2+y^2=9\ (y\geq 0)$

즉 함수 $y=\sqrt{-x^2+10x-16}$의 그래프는 중심이 $(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 1인 원에서 $y\geq 0$인 부분이다.

따라서 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $D(5,\ 0)$이라 하고 원점 O에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 C라 하면



$\overline{CD}=\overline{BD}-\overline{BC}=3-1=2$

직각삼각형 OCD에서

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{OC}=\sqrt{21}$

2) [정답] ②

도형의 성질을 이용하여 함수의 극한 문제를 해결한다.

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 점 $(-1,\ 1)$을 지난다. 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+1)+1$, 즉 $y=mx+m+1$

직선 l과 y축이 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(0,\ m+1)$

직선 l과 선분 AP가 만나는 점을 E라 하자.

직선 AP의 방정식이 $y=-\dfrac{2}{t}x+2$이므로

$mx+m+1=-\dfrac{2}{t}x+2$에서 $x=\dfrac{(1-m)t}{mt+2}$

그러므로 점 E의 x좌표는 $\dfrac{(1-m)t}{mt+2}$이다.

삼각형 ADE의 넓이가 삼각형 AOP의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times(1-m)\times\dfrac{(1-m)t}{mt+2}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times t\right)$

$t\neq 0$이므로 $(1-m)^2=mt+2$

$m^2-(2+t)m-1=0$

$m=\dfrac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2-4\times(-1)}}{2}$

$=\dfrac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

직선 l의 y절편이 $m+1$이고 $0<m+1<2$이므로

$f(t)=m+1=\dfrac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

따라서 $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

3) 정답 ①

$a=-1$이면 $0\leq x<2$에서 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$이므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

그런데 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 모순이다. 즉, $a\neq -1$이다.

$f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{2(x-a)(x+1)-(x-a)^2}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$

(ⅰ) $a<-a-2$, 즉 $a<-1$일 때,

$x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-a-2$에서 극솟값을 갖는다.

또한, $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)<0$, $\lim\limits_{x\to 2-}f'(x)>0$이고 함수 $f(x)$는 주기가 2이므로 $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)>0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $0<-a-2<2$에서 $2<-a<4$

$\therefore\ 4<a<-2$

그런데 a는 정수이므로 $a=-3$

(ⅱ) $a>-a-2$, 즉 $a>-1$일 때,

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수

$f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

또한, (ⅰ)과 마찬가지로 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)<0$,

$\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $0<a<2$이고, a는 정수이므로 $a=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -3 또는 1이므로 그 곱은 $-3\times 1=-3$

4) [정답] ①

최고차항의 계수가 1인 삼차함수를 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

(가)에서 $g(x)=\dfrac{x(x+3)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$) …… ㉠

그런데, $g(x)$는 실수 전체에서 연속인 함수이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

(나)에서 $g(0)=1$이므로

$g(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{f(x)}=1$

그런데, (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 하므로

$\therefore\ f(0)=0$ …… ㉢

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 ㉢을 대입하면

$\therefore\ c=0$

준 식에 대입하면

$f(x)=x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$

㉠에 대입하여 정리하면

$g(x)=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}$ …… ㉣

(나)에서 $g(0)=1$이므로 ㉣에서 $\dfrac{3}{b}=1$

$\therefore\ b=3$

㉣에 대입하면 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$

그런데 조건에서 $g(x)$가 실수 전체에서 연속이기 위해 (분모) $=x^2+ax+3\neq 0$이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 판별식 $D<0$이어야 하므로

$D=a^2-12<0$

$\therefore\ -\sqrt{12}<a<\sqrt{12}$ …… ㉤

그런데 $f(1)$은 자연수 즉, $f(1)=1+a+3=a+4$가 자연수이므로 ㉤의 범위를 만족하는 정수 a는

$a=-3,\ -2,\ \cdots,\ 3$

㉣에서 $x=2$을 대입하면 $g(2)=\dfrac{5}{4+2a+3}=\dfrac{5}{2a+7}$

$g(2)$가 최소가 되려면 분모가 최대이므로 $a=3$일 때, 최솟값 $\dfrac{5}{2\times3+7}=\dfrac{5}{13}$을 갖는다.

5) [정답] 40

$(f\circ f)(x)=x$을 만족하기 위해서는

ⅰ) 모든 x에 대하여 $f(x)=x$이거나

ⅱ) $f(p)=q,\ f(q)=p$가 되어야 한다.

ⅰ)의 경우 $f(1)=1,\ f(2)=2$가 되면 $f(x)$는

증가함수가 되어 $f'(1)<0,\ f'(2)<0$인 조건에 만족하지 않는다.

ⅱ)의 경우 $f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(0)=0$와

$f'(0)-f'(1)=6$을 만족해야 한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx^2+c$이고

$f(1)=a+b+c+d=2$ … ①

$f(2)=8a+4b+2c+d=1$ … ②

$f(0)=d=0$ … ③

$f'(0)-f'(1)=c-3a-2b-c=6$ … ④

①, ②, ③, ④를 연립하면 $a=1,\ b=-\dfrac{9}{2},\ c=\dfrac{11}{2}$이므로

$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{11}{2}x$을 얻는다. 따라서 $f(5)=40$이다.