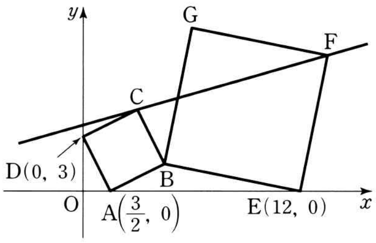
약점보완 테스트 8회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 다음 그림과 같이 두 정사각형 $ABCD$, $BEFG$에서 $A\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $D(0,\ 3)$, $E(12,\ 0)$일 때, 직선 CF의 방정식을 구하여라.



2. 자연수 n에 대하여 부등식 $3^{2k}-(3^n+3^{2n})3^k+3^{3n} \le 1$을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(2019)$의 값은?

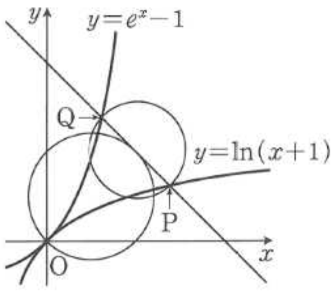
① 2018 ② 2019 ③ 2020
④ 2021 ⑤ 2022

3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
> (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오.

4. 다음 그림과 같이 곡선 $y=\ln(x+1)$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 있다. 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 넓이를 $S(a)$, 원점 O와 선분 PQ의 중점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 넓이를 $T(a)$라 할 때, $\lim_{a\to0+}\frac{4T(a)-S(a)}{\pi a^2}$의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

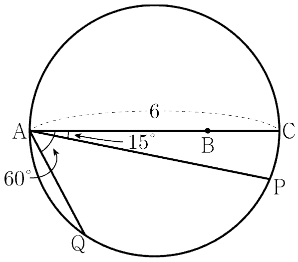


① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

[중산고기출]

5. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AC를 지름으로 하는 원 위에 $\angle\mathrm{CAP}=15°$, $\angle\mathrm{CAQ}=60°$를 만족하는 두 점 P, Q가 있다. 선분 AC위를 움직이는 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 값을 최소가 되도록 하는 점 B의 위치에 점 D가 있을 때, $\overline{\mathrm{AD}}$의 값은?



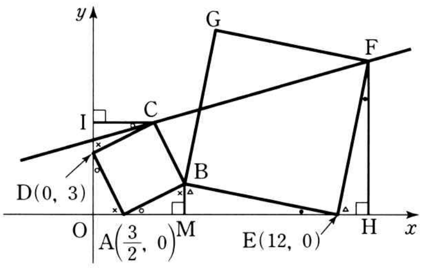
① 4　② $2(1+\sqrt{2})$

③ $2(1+\sqrt{3})$　④ $\frac{3(1+\sqrt{2})}{2}$

⑤ $\frac{3(1+\sqrt{3})}{2}$

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] $y=\frac{2}{7}x+\frac{51}{14}$



위의 그림과 같이 두 점 B, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 M, H, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 I라 하자.

(ⅰ) 두 직각삼각형 OAD, MBA의 빗변의 길이가 같고
$\angle OAD=\angle MBA$이므로 $\triangle OAD\equiv\triangle MBA$ (RHA 합동)
이때, $\overline{OD}=\overline{MA}=3$이므로 점 M의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$
$\overline{OA}=\overline{MB}=\frac{3}{2}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

(ⅱ) 두 직각삼각형 IDC, OAD의 빗변의 길이가 같고
$\angle IDC=\angle OAD$이므로 $\triangle IDC\equiv\triangle OAD$ (RHA 합동)
이때, $\overline{DI}=\overline{AO}=\frac{3}{2}$, $\overline{IC}=\overline{OD}=3$이므로 점 C의 좌표는 $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

(ⅲ) 두 직각삼각형 BME, EHF의 빗변의 길이가 같고
$\angle BEM=\angle EFH$이므로 $\triangle BEM\equiv\triangle EHF$ (RHA 합동)
이때, $\overline{FH}=\overline{EM}=\frac{15}{2}$, $\overline{EH}=\overline{BM}=\frac{3}{2}$이므로 점 F의 좌표는 $\left(\frac{27}{2},\ \frac{15}{2}\right)$

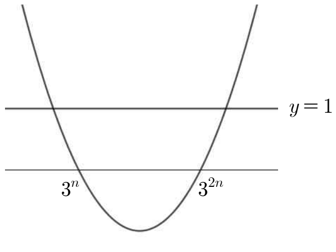
따라서 직선 CF의 방정식은

$$y-\frac{9}{2}=\frac{\frac{15}{2}-\frac{9}{2}}{\frac{27}{2}-3}(x-3)\ \Rightarrow\ \therefore\ y=\frac{2}{7}x+\frac{51}{14}$$

2) [정답] ③

$3^{2k}-\left(3^n+3^{2n}\right)3^k+3^{3n}\le 1$

$\left(3^k-3^n\right)\left(3^k-3^{2n}\right)\le 1$



$3^k=x$로 치환하여 $y=\left(x-3^n\right)\left(x-3^{2n}\right)$, $y=1$의 그래프를 그리면 다음과 같다. $n=2019$일 때, $x=3^{2018}$과 $x=3^{4039}$를 대입해보면 값이 1보다 커짐을 알 수 있으므로,

$3^{2019}\le x\le 3^{4038}$

$3^{2019}\le 3^k\le 3^{4038}$

$2019\le k\le 4038$

따라서 $f(2019)=4038-2019+1=2020$

3) [정답] 243

$f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)$이므로

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$라 하면

$f'(x)-g'(x)=3(x-\alpha)\left(x-\frac{2k+\alpha}{3}\right)\quad\cdots$ ㉠

한편

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$, $f'(\beta)=g'(\beta)$이므로

$f'(x)-g'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{2k+\alpha}{3}=\beta$

$k=\frac{3\beta-\alpha}{2}$

$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)\quad\cdots$ ㉢

$g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$이므로

$g(x)=2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+c$

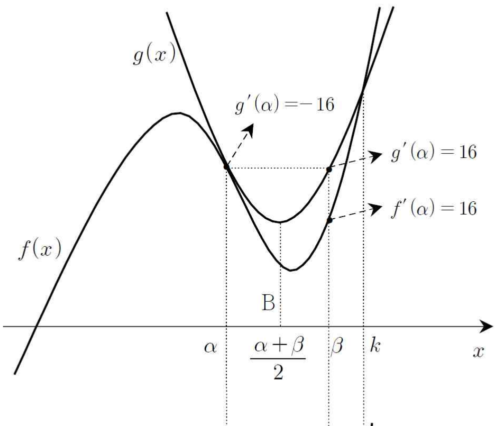
$g'(x)=4\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

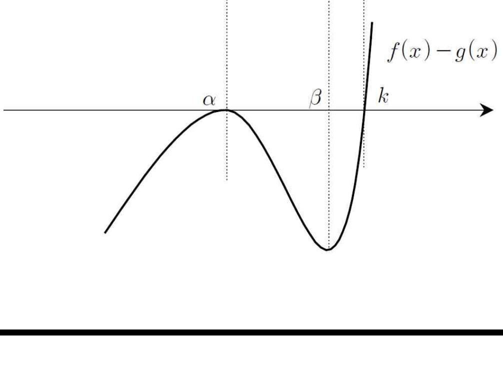
$g'(\beta)=16$에서 $\beta-\alpha=8\quad\cdots$ ㉣

구하는 값은 ㉢, ㉣에 의해

$g(\beta+1)-f(\beta+1)=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$

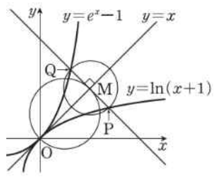
$=243$





4) 답. ⑤

[해설] 두 함수 $y=\ln(x+1)$, $y=e^x-1$은 서로 역함수이므로 두 곡선 $y=\ln(x+1)$, $y=e^x-1$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 두 점 P, Q는 기울기가 -1인 직선 위의 점이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$이므로 점 Q의 좌표는 $(b,\ a)$



선분 PQ의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a+b}{2}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\ \ (\because\ a>b)$$

즉, 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중점은 점 M이고 원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$이므로

$$S(a)=\pi\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right\}^2=\frac{\pi}{2}(a-b)^2$$
$$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\ \ (\because\ a+b>0)$$

즉, 두 점 O, M을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(a+b)$이므로

$$T(a)=\pi\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}(a+b)\right\}^2=\frac{\pi}{8}(a+b)^2$$
$$4T(a)-S(a)=\frac{\pi}{2}(a+b)^2-\frac{\pi}{2}(a-b)^2$$
$$=2\pi ab\ \cdots\ ㉠$$

한편, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 곡선 $y=\ln(x+1)$ 위의 점이므로

$b=\ln(a+1)\ \cdots\ ㉡$

㉠, ㉡에서

$4T(a)-S(a)=2\pi a\ln(a+1)$

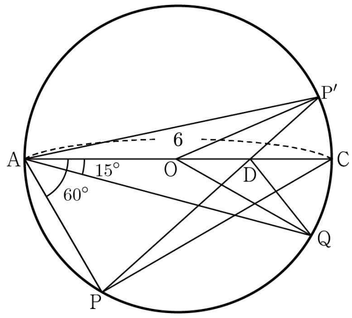
$$\therefore\ \lim_{a\to0+}\frac{4T(a)-S(a)}{\pi a^2}=\lim_{a\to0+}\frac{2\pi a\ln(a+1)}{\pi a^2}$$
$$=2\lim_{a\to0+}\frac{\ln(a+1)}{a}$$
$$=2\times1=2$$

5) [정답] ⑤

그림과 같이 점 P를 선분 AC에 대해 대칭이동시킨 점을 P′이라 하면

$\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{P'B}}+\overline{\mathrm{QB}}\ge\overline{\mathrm{P'Q}}$이므로 점 D는 선분 P′Q와 선분 AC의 교점이다.

이때 $\overline{\mathrm{PP'}}$과 $\overline{\mathrm{AC}}$의 교점을 H라 놓으면 그림은 다음과 같다.



이때 $\angle\mathrm{AP'Q}=\angle\mathrm{ACQ}=30^\circ$이고 $\angle\mathrm{P'DH}=45^\circ$이므로 삼각형 P′DH는 직각 이등변 삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{DH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}$와 $\overline{\mathrm{DH}}$를 각각 구하자.

$\angle\mathrm{P'OH}=30^\circ$이므로 삼각형 OPP′은 정삼각형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PP'}}=3$, $\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{P'H}}=\frac{3}{2}$

삼각형 ACP′과 삼각형 AP′H가 닮음이므로

$\mathrm{AC}:\mathrm{AP'}=\mathrm{AP'}:\mathrm{AH}$,

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\frac{\overline{\mathrm{AP'}}^2}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{6}$$
$$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\cos150^\circ$$
$$=18+9\sqrt{3}$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=3+\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{DH}}=3+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{3(1+\sqrt{3})}{2}$$