깨단수학 실력진단 테스트

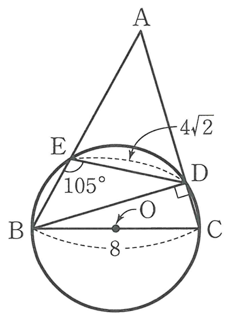
약점보완 테스트 2회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원에 내접하는 두 직사각형 A, B에 대하여 A의 가로, 세로의 길이는 각각 a, b이고, B의 가로, 세로의 길이는 각각 c, d이다. $ad-bc=10$인 관계가 성립할 때, $ac+bd$의 값은?

① $5\sqrt{3}$ ② 10 ③ $10\sqrt{2}$
④ $10\sqrt{3}$ ⑤ 20

2. 다음 그림과 같이 지름이 $\overline{BC}=8$인 원 밖의 점 A에 대하여 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 원이 선분 AB와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{DE}=4\sqrt{2}$, $\angle DEB=105^\circ$일 때, 선분 AE의 길이를 구하시오.
(단, $0<\angle ABC<90^\circ$, $0<\angle ACB<90^\circ$)



3. 방정식 $2\cos^2 x+\sin x-1=k$가 $0\le x<2\pi$에서 서로 다른 네 개의 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

4. 양의 실수 x에 대하여 $x-[x]$, $[x]$, x가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x-[x]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

5. 함수 $f(t)$를 $f(t)=\int_0^1(|e^x-t|+|e^{2x}-t|)dx$ 라고 할 때, $1 \le t \le e$에서 $f(t)$가 최소가 되는 t의 값은?

① 0 ② $e^{\frac{1}{2}}$ ③ $e^{\frac{2}{3}}$

④ $e^{\frac{3}{4}}$ ⑤ e

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) 답 ④

[해설] 원에 내접하는 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름과 같으므로 내접하는 두 직사각형의 대각선의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

$\therefore a^2+b^2=20,\ c^2+d^2=20$

또한, $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)$

$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

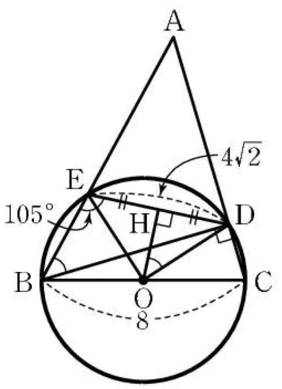
$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=400$이므로

$(ac+bd)^2=400-(ad-bc)^2=400-100=300$

$\therefore ac+bd=10\sqrt{3}$

2) 답 $4\sqrt{3}$

[해설]



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 DE에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{HD}=2\sqrt{2}$, $\overline{OD}=4$ 이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OD}^{\,2}-\overline{HD}^{\,2}}$

$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle ODH$는 $\angle OHD\,90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로

$\angle HOD=45^\circ$

같은 방법으로 $\angle HOE=45^\circ$

즉, $\angle EOD=90^\circ$ 이고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\angle EBD=\frac{1}{2}\angle EOD=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$

$\triangle BDE$에서 $\angle EBD=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30DEg$

$\therefore\ \angle ADE=\angle ADB-\angle EDB=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

또한, $\angle DEB=105^\circ$ 이므로

$\angle AED=180^\circ-\angle DEB=180^\circ-105^\circ=75^\circ$

$\triangle AED$에서 $\angle EAD=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

따라서 $\triangle AED$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{ED}}{\sin 45^\circ}$ 에서 $\dfrac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore\ \overline{AE}=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

3) **정답** $0<k<\dfrac{9}{8}$

$2\cos^2x+\sin x-1=k$에서

$2(1-\sin^2x)+\sin x-1=k$

$2\sin^2x-\sin x-1=-k$ …… ㉠

㉠에서 $\sin x=t(-1\le t\le 1)$로 놓으면

$2t^2-t-1=-k$ …… ㉡

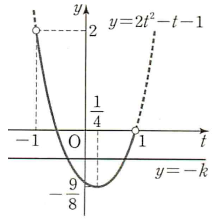
그런데 방정식 ㉡의 근이 $t=\pm1$일 때, 즉 $\sin x=\pm1$이면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 근을 갖게 되므로 방정식 ㉠이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 방정식 ㉡은

$-1<t<1$에서 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

그러므로 그림과 같이

$y=2t^2-t-1=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는



$-\dfrac{9}{8}<-k<0$

따라서 $0<k<\dfrac{9}{8}$

4) 답 ④

①단계	$x=n+a$(n은 양의 정수, $0<a<1$)라 하고, 세수 $x-[x],[x],x$를 n,a로 나타낸다.
②단계	①단계의 결과와 등비중항을 이용하여 $\dfrac{a}{n}$의 값을 구한다.
③단계	$\dfrac{a}{n}$의 값의 범위와 a의 값의 범위를 이용하여 n의 값을 구한 후, $x-[x]$의 값을 구한다.

[해설] x가 양의 실수이므로 $x=n+a$ (n은 양의 정수, $0<a<1$)라 하면

$[x]=n,\ x-[x]=(n+a)-n=a$

이때, 세 수 $x-[x],[x],x$, 즉 $a,n,n+a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $n^2=a(n+a),\ a^2+na-n^2=0$

$\left(\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{a}{n}-1=0\qquad\therefore\dfrac{a}{n}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

그런데 $0<\dfrac{a}{n}<1$이므로 $\dfrac{a}{n}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$이고, $0<a<1$이므로

$n=1$이어야 한다.

$\therefore a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x-[x]=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

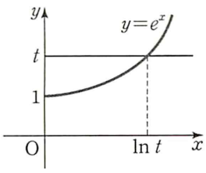
> [blacklabel 특강 - 풀이첨삭]
> $n=0$이면 $[x]=0$이므로 $x-[x],[x],x$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다는 조건에 모순이다. 마찬가지로 $a=0$이면 $x-[x]=0,[x]=x$이므로 $0,x,x$는 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

5) **정답** ③

$0\le x\le 1$이므로 $1\le e^x\le e$이고 $1\le e^{2x}\le e^2$

$1\le t\le e$ 이므로

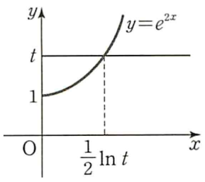
4



$$\int_0^1 |e^x-t|dx = -\int_0^{\ln t}(e^x-t)dx + \int_{\ln t}^1 (e^x-t)dx$$

$$= -\left[e^x-tx\right]_0^{\ln t} + \left[e^x-tx\right]_{\ln t}^1$$

$$= 2t\ln t - 3t + e + 1$$



$$\int_0^1 |e^{2x}-t|dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\ln t}(e^{2x}-t)dx + \int_{\frac{1}{2}\ln t}^1 (e^{2x}-t)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}e^{2x}-tx\right]_0^{\frac{1}{2}\ln t} + \left[\frac{1}{2}e^{2x}-tx\right]_{\frac{1}{2}\ln t}^1$$

$$= t\ln t - 2t + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

따라서

$$f(t) = \int_0^1 (|e^x-t| + |e^{2x}-t|)dx$$

$$= 3t\ln t - 5t + \frac{1}{2}e^2 + e + \frac{3}{2}$$

이므로 $f'(t) = 3\ln t - 2$

$f'(t) = 0$에서 $3\ln t - 2 = 0$

$\ln t = \frac{2}{3}$, $t = e^{\frac{2}{3}}$

$1 \le t \le e$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	e
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	극소	↗	

따라서 $f(t)$는 $t = e^{\frac{2}{3}}$일 때 극소이며 최소이다.