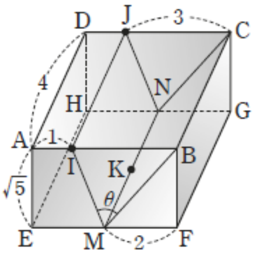
CIRCUIT.1

1번 문제 해설



선분 EF의 중점을 M, 선분 HG의 중점을 N이라 하면 평면 IKJ와 평면 BKC의 교선은 직선 MN이고 $\overline{\mathrm{IM}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$이므로 θ는 두 직선 IM, MB가 이루는 예각의 크기와 같다.

이때 $\overline{\mathrm{IM}}=\overline{\mathrm{IE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{AI}}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$,

$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$, $\overline{\mathrm{BI}}=3$

즉, 삼각형 BIM은 $\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BM}}$인 이등변삼각형이므로 $\theta=\angle\mathrm{IMB}$

$$\cos(\angle\mathrm{IMB})=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{IM}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

2번 문제 해설

출제의도 : 벡터를 이용하여 나타낸 도형과 주어진 조건을 만족하는 도형 위의 점으로 이루어진 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=1$에서 점 P는 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

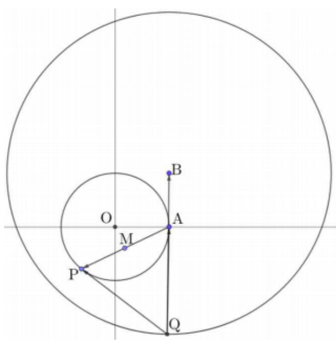
$\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|=3$에서 점 Q는 점 B를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

선분 AP의 중점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}})=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot 2\,\overrightarrow{\mathrm{QM}}=0$

그러므로 $\triangle\mathrm{QMP}\equiv\triangle\mathrm{QMA}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AQ}}$의 최솟값 2와 같고 이때 Q의 좌표는 $(1,\ -2)$이다. 즉,

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\ =\ (0\,,\,-3)$



점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

M의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b}{2}\right)$이고

$\vec{\mathrm{AP}} \cdot \vec{\mathrm{QM}} = 0$이므로

$\vec{\mathrm{AP}} \cdot \vec{\mathrm{QM}} = (a-1,\ b) \cdot \left(\frac{a+1}{2} - 1,\ \frac{b}{2} + 2\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{(a-1)^2 + b(b+4)\right\} = 0 \cdots$ ㉠

$|\vec{\mathrm{OP}}| = 1$이므로 $a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$-2a + 4b + 2 = 0, a = 2b + 1 \cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2b+1)^2 + b^2 - 1 = 0$

$b(5b+4) = 0$

$b = 0$ 또는 $b = -\frac{4}{5}$

$|\vec{\mathrm{AP}}| > 0$이므로 $b = -\frac{4}{5}$

($\because$ $b = 0$이면 $|\vec{\mathrm{AP}}| = 0$)

㉢에서 $a = 2b + 1 = -\frac{3}{5}$

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$이므로

$\vec{\mathrm{AP}} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

따라서

$\vec{\mathrm{AP}} \cdot \vec{\mathrm{BQ}} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) \cdot (0, -3)$

$= -\frac{8}{5} \times 0 + \left(-\frac{4}{5}\right) \times (-3)$

$= \frac{12}{5}$

정답 ③

3번 문제 해설

점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\vec{AP} = \frac{2\vec{AC} + \vec{AB}}{2+1}$

$= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

점 Q는 선분 BC를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$\vec{AQ} = \frac{2\vec{AC} - \vec{AB}}{2-1}$

$= 2\vec{b} - \vec{a}$

$\vec{AP} + \vec{AQ} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) + \left(2\vec{b} - \vec{a}\right)$

$$= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{8}{3}\vec{b}$$

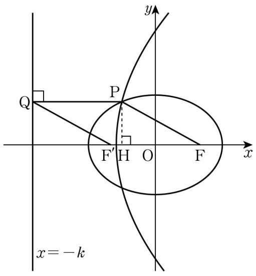
따라서 $m = -\frac{2}{3}, n = \frac{8}{3}$ 이므로

$$m - n = -\frac{10}{3}$$

4번 문제 해설

{출제의도}

포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F 가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 이다.

조건 (나)의 $\overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$ 에서

$\overline{F'Q} = \overline{FF'}$

두 직선 FF', PQ 가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 에서

$\angle PQF = \angle F'FQ$

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle QFP = \angle PQF = \angle F'FQ = \angle F'QF$

이고, 선분 FQ 는 공통이므로

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 서로 합동이다.

즉 $\overline{FP} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'}$

장축의 길이가 12 이고 $\overline{FP} = \overline{FF'} = 2c$ 이므로

$\overline{PF'} = 12 - 2c$

삼각형 PFF' 에서 코사인법칙에 의하여

$(12 - 2c)^2 = (2c)^2 + (2c)^2 - 2 \times (2c)^2 \times \cos(\angle F'FP$

$c^2 - 16c + 48 = 0$

$(c - 4)(c - 12) = 0$

장축의 길이가 12 이므로 $c < 6$ 에서 $c = 4$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{FP} = 8$ 에서

$\overline{FH} = \overline{FP} \times \cos(\angle F'FP) = 7$

$\overline{FH} = 7$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $4 - 7 = -3$ 이고

$\overline{PQ} = \overline{FP} = 8$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $-k + 8$ 이므로

$-3 = -k + 8$, 즉 $k = 11$

따라서 $c + k = 15$

CIRCUIT.2

1번 문제 해설

포물선 $y^2 = 8x$의 초점의 좌표는 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -2$이다.

직선 $y = n$이 포물선 $y^2 = 8x$와 만나는 점의 좌표가

$\mathrm{P}_n\left(\frac{\mathrm{n}^2}{8}, \mathrm{n}\right)$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}+2$이므로

$a_n = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

$= 2\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} + 2$

$$= 2 \times \frac{n^2}{8} + 2$$

$$= \frac{n^2}{4} + 2$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{n^2}{4} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times 10$$

$$= \frac{465}{4}$$

2번 문제 해설

타원 E의 초점 F의 x좌표를 $c\,(c > 0)$이라 하면
$c^2 = 9 - 5 = 4$이므로 $c = 2$이고, 선분 OF의 중점 M의 좌표는 (1, 0)이다.
또 타원 E의 장축의 한 끝점 A의 좌표는 (3, 0)이다.
한편,

$\vec{\mathrm{MA}} + \vec{\mathrm{MP}} = (\vec{\mathrm{OA}} - \vec{\mathrm{OM}}) + (\vec{\mathrm{OP}} - \vec{\mathrm{OM}})$

$= \vec{\mathrm{OP}} + \vec{\mathrm{OA}} - 2\vec{\mathrm{OM}}$ …… ㉠

이고, $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{MF}} = \overline{\mathrm{FA}} = 1$이므로

$-2\vec{\mathrm{OM}} = 2\vec{\mathrm{MO}} = \vec{\mathrm{FO}} = \vec{\mathrm{AM}}$

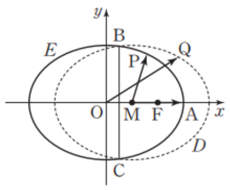
이때

$\vec{\mathrm{OA}} - 2\vec{\mathrm{OM}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AM}} = \vec{\mathrm{OM}}$ …… ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서

$\vec{\mathrm{MA}} + \vec{\mathrm{MP}} = \vec{\mathrm{OP}} + \vec{\mathrm{OM}}$

그러므로 $\vec{\mathrm{OQ}} = \vec{\mathrm{MA}} + \vec{\mathrm{MP}}$, 즉 $\vec{\mathrm{OQ}} = \vec{\mathrm{OP}} + \vec{\mathrm{OM}}$이다.
이때 점 P는 타원 E 위를 움직이므로 점 Q가 나타내는 도형 D는 타원 E를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 타원이고, 두 타원 E, D는 선분 OM의 수직이등분선에 대하여 서로 대칭이다.



즉, 두 타원 E, D의 교점을 B, C라 하면 두 점 B, C의 x좌표는 모두

$\frac{1}{2}$이다.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{\frac{1}{4}}{9}+\frac{y^2}{5}=1, y^2=5\times\left(1-\frac{1}{36}\right)=\frac{175}{36}$

이므로 $y=\pm\frac{5\sqrt{7}}{6}$

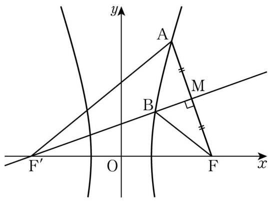
따라서 두 점 B, C의 y좌표는 각각 $\frac{5\sqrt{7}}{6}, -\frac{5\sqrt{7}}{6}$이므로

두 교점 B, C 사이의 거리는

$2\times\frac{5\sqrt{7}}{6}=\frac{5\sqrt{7}}{3}$

3번 문제 해설

{출제의도}
쌍곡선의 성질을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 의 두 초점의 좌표를
$\mathrm{F}\,(6,\ \ 0), \mathrm{F}'\,(-6,\ \ 0)$ 이라 하자.

점 F' 이 선분 AF 의 수직이등분선 위의 점이므로
두 직각삼각형 $\mathrm{AF'M}, \mathrm{FF'M}$ 이 합동이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=12$
점 A 가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=4$ 에서 $\overline{\mathrm{AF}}=8$
점 M 은 선분 AF 의 중점이므로
$\overline{\mathrm{AM}}=4$
직각삼각형 $\mathrm{AF'M}$에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{MF'}}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$
점 B 가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}-4$ 이고
$\overline{\mathrm{BM}}=8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}}$ 이므로
삼각형 BFM 의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FM}}+\overline{\mathrm{BM}}=\left(\overline{\mathrm{BF'}}-4\right)+4+\left(8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}}\right)$
$=8\sqrt{2}$
따라서 $k=8\sqrt{2}$ 이므로 $k^2=128$

4번 문제 해설

출제의도 : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA}$

$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$

$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$

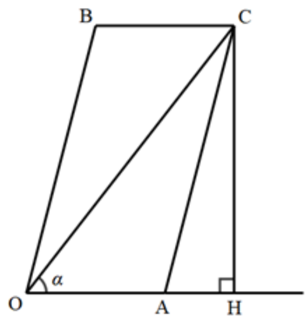
$= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - 1 = 2$

이므로

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$

(i) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA = \alpha$라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$에서

$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$

이므로

$\overline{AH} = \overline{AC} \times \cos(\angle CAH)$

$= \overline{OB} \times \frac{1}{4}$

$= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

한편,

$|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2$

$= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \quad = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$

$= 2 + 8 + 2 = 12$

이므로

$|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$

그러므로

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\alpha$

$= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{OP}| = 3$

이므로

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향이면

$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OX}|$

이므로

$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(ii) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|$

$= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3$

이므로

$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OX}|$

이므로

$m = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여

$M \times m = 4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right)$

$= 6\sqrt{6} - 8$

이므로

$a^2 + b^2 = 6^2 + (-8)^2$

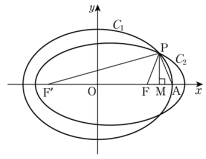
$= 100$

정답 100

CIRCUIT.3

1번 문제 해설

[출제의도] 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



두 타원 C_1 , C_2 의 장축의 길이가 같으므로
$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = \overline{PA} + \overline{\mathrm{PF'}}$
$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{PA}$
삼각형 PFA가 이등변삼각형이므로
선분 FA의 중점을 M이라 하면
$\angle\mathrm{PMF} = 90^\circ$

$\cos(\angle\mathrm{AFP}) = \dfrac{\overline{\mathrm{FM}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = \dfrac{3}{8}$에서

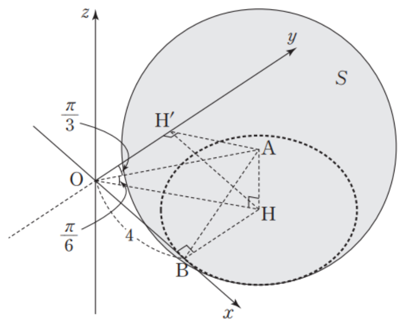
$\overline{\mathrm{FM}} = 3k(k > 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}} = 8k$
타원 C_1 의 장축의 길이가 6이므로
$\overline{\mathrm{PF'}} = 6 - 8k$
$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{FA}} = \overline{\mathrm{OA}} - 2\overline{\mathrm{FM}} = 3 - 6k$이므로
$\overline{\mathrm{F'M}} = \overline{\mathrm{F'F}} + \overline{\mathrm{FM}} = 2\overline{\mathrm{OF}} + \overline{\mathrm{FM}}$
$= 2(3 - 6k) + 3k = 6 - 9k$
직각삼각형 $\mathrm{PF'M}$에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{PF'}}^2 - \overline{\mathrm{F'M}}^2$이고
직각삼각형 PFM에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{FM}^2$이므로
$(6 - 8k)^2 - (6 - 9k)^2 = (8k)^2 - (3k)^2$
$k(12 - 17k) = 55k^2, 12k(6k - 1) = 0$

$k > 0$이므로 $k = \dfrac{1}{6}$

따라서 삼각형 PFA 의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{FA}} = 8k + 8k + 6k = 22k = \dfrac{11}{3}$

2번 문제 해설



구 S가 x축에 접하고, $\overline{\mathrm{OB}} = 4$ 이므로 $a = 4$이고
$r = \sqrt{b^2 + c^2}$ ...... ㉠

직선 OA가 xy평면과 이루는 각은 ∠AOH이고, 조건 (가)에 의하여

$\angle\mathrm{AOH} = \dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}} = k$라 하면

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{OA}}\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{k}{2}$$

$$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OA}}\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

점 H에서 y축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}'} \perp \overline{\mathrm{AH}'}$이고,
두 직선 OA, BH가 이루는 각의 크기는 두 직선 OA, OH'이 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 조건 (나)에 의하여 $\angle\mathrm{AOH}' = \frac{\pi}{3}$이므로

직각삼각형 OAH'에서

$$\overline{\mathrm{OH}'} = \overline{\mathrm{OA}}\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{k}{2}$$

즉, $\overline{\mathrm{BH}} \equiv \frac{k}{2}$

직각삼각형 OBH에서 $\overline{\mathrm{OH}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2$
이므로

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2 = 4^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

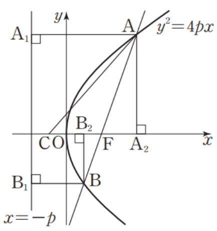
$k^2 = 32$
$k > 0$이므로
$k = 4\sqrt{2}$
따라서 $b = \overline{\mathrm{BH}} = 2\sqrt{2},\ c = \overline{\mathrm{AH}} = 2\sqrt{2}$이므로 ㉠에서
$r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}$
$= \sqrt{16} = 4$

3번 문제 해설

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AF}} : \overline{\mathrm{BF}} = 2 : 1, \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CF}} = 3 : 1$이므로
조건 (나)에서

$$\overline{\mathrm{CF}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}} = 3 \cdots\cdots ㉠$$

점 C의 x좌표를 $c\,(c < 0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{CF}} = p - c, \overline{\mathrm{AF}} = 2\overline{CF} = 2p - 2c$
두 점 A, B에서 포물선의 준선
$x = -p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$이라 하고, 두 점 A, B에서 x축에
내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2$라 하자.
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AA}_1} = \overline{\mathrm{AF}} = 2p - 2c$
$\overline{\mathrm{BB}_1} = \overline{\mathrm{BF}} = p - c$



점 F(p, 0)과 준선 $x = -p$ 사이의 거리가 $2p$이므로
$\overline{\mathrm{AF}_2} = \overline{\mathrm{AA}_1} - 2p = (2p - 2c) - 2p = -2c$
$\overline{\mathrm{BF}_2} = 2p - \overline{\mathrm{BB}_1} = 2p - (p - c) = p + c$
이때 $\overline{\mathrm{AF}} : \overline{\mathrm{BF}} = 2 : 1$이므로 두 삼각형 $\mathrm{AFA}_2,\ \mathrm{BFB}_2$는 닮음비가
2 : 1인 닮은 도형이다.

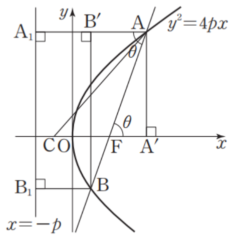
즉, $\overline{\mathrm{AF}_2}:\overline{\mathrm{BF}_2}=2:1$이므로
$-2c:(p+c)=2:1$
$2p+2c=-2c, p=-2c$
㉠에서 $\overline{\mathrm{CF}}=p-c=-3c=3$이므로 $c=-1$
$\overline{\mathrm{AF}}=6$, $\overline{\mathrm{A_2F}}=-2c=2$
$\overline{\mathrm{AA}_2}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{A_2F}}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{CA}_2}=\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{FA}_2}$=3+2=5
따라서 직각삼각형 ACA_2에서
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA}_2}^2-\overline{\mathrm{CA}_2}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+5^2}=\sqrt{57}$

{다른 풀이}

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=2:1$, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CF}}=3:1$이므로
조건 (나)에서

$$\overline{\mathrm{CF}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}=3$$

두 점 A, B에서 포물선의 준선
$x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발
을 A′, 점 B에서 선분 AA_1에 내린 수선의 발을 B′이라 하자.



포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BB}_1}=\overline{\mathrm{A_1B'}}=3$,
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AA}_1}=6$이므로
$\overline{\mathrm{AB'}}=\overline{\mathrm{AA}_1}-\overline{\mathrm{A_1B'}}=3$
$\angle\mathrm{BAB'}=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AB'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

삼각형 AFA′에서 ∠AFA′=θ이므로

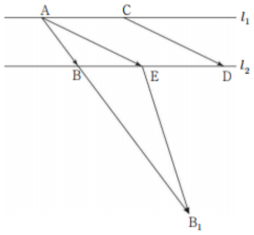
$$\overline{\mathrm{FA'}}=\overline{\mathrm{AF}}\cos\theta=6\times\frac{1}{3}=2$$

$\overline{\mathrm{AA'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{A_2F}}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$
삼각형 AA′C에서
$\overline{\mathrm{CA'}}=\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{FA'}}$=3+2=5이므로
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA}_2}^2-\overline{\mathrm{CA}_2}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+5^2}=\sqrt{57}$

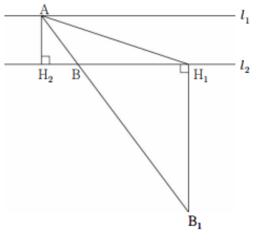
4번 문제 해설

[출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

점 A를 시점으로 하는 벡터 $4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점을
B_1이라 하자.
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 시점이 A가 되도록 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$를
평행이동시킨 벡터의 종점을 E라 하면
$4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}_1}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}_1}$



점 $\mathrm{B_1}$에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면
점 E가 점 $\mathrm{H_1}$일 때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{EB_1}}\right|$의 값은 최소이다.
$\left|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$의 최솟값이 12이므로 $\overline{\mathrm{B_1H_1}}=12$
점 A에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자.



삼각형 $\mathrm{AH_2B}$, $\mathrm{B_1H_1B}$는 서로 닮음이고
$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BB_1}}=15$이므로 닮음비는 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{B_1H_1}}=4$이므로 $d=4$

$\overline{\mathrm{BH_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH_2}}^2}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BH_1}}=3\overline{\mathrm{BH_2}}=9$
$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{BH_1}}+\overline{\mathrm{BH_2}}=12$
그러므로
$k=\overline{\mathrm{AH_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH_2}}^2+\overline{\mathrm{H_1H_2}}^2}$
$=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$
따라서 $d\times k=16\sqrt{10}$

CIRCUIT.4

1번 문제 해설

원점 O에 대하여

$$\vec{AC} + \vec{PA} + 2\vec{PB}$$
$$= (\vec{OC} - \vec{OA}) + (\vec{OA} - \vec{OP}) + 2(\vec{OB} - \vec{OP})$$
$$= 2\vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OP}$$
$$= \vec{0}$$

이므로

$$3\vec{OP} = 2\vec{OB} + \vec{OC}$$
$$= 2(1, -1) + (2, 0)$$
$$= (4, -2)$$

따라서 $\vec{OP} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$
$$= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (3, 2)$$
$$= \left(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

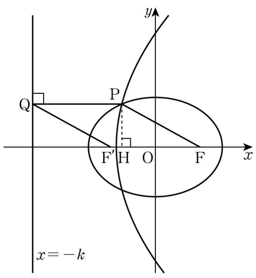
이므로 벡터 $\vec{AP}$의 모든 성분의 합은

$$-\frac{5}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{13}{3}$$

2번 문제 해설

{출제의도}

포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F 가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP} = \overline{PQ}$
이다.

조건 (나)의 $\overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$에서

$\overline{F'Q} = \overline{FF'}$

두 직선 FF', PQ 가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 에서

$\angle PQF = \angle F'FQ$

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle QFP = \angle PQF = \angle F'FQ = \angle F'QF$

이고, 선분 FQ 는 공통이므로

두 삼각형 PQF, $F'FQ$ 는 서로 합동이다.

즉 $\overline{FP} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'}$

장축의 길이가 12 이고 $\overline{FP} = \overline{FF'} = 2c$ 이므로

$\overline{PF'} = 12 - 2c$

삼각형 PFF' 에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2=(2c)^2+(2c)^2-2\times(2c)^2\times\cos(\angle F'FP$
$c^2-16c+48=0$
$(c-4)(c-12)=0$
장축의 길이가 12 이므로 $c<6$ 에서 $c=4$
점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
$\overline{FP}=8$ 에서
$\overline{FH}=\overline{FP}\times\cos(\angle F'FP)=7$
$\overline{FH}=7$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $4-7=-3$ 이고
$\overline{PQ}=\overline{FP}=8$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $-k+8$ 이므로
$-3=-k+8$, 즉 $k=11$
따라서 $c+k=15$

3번 문제 해설

조건 (가)에서

$$\vec{0}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$$
$$=-\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}) \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AP}$$

이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}{2}$$

선분 BC의 중점을 M, 선분 AD의 중점을 N이라 하면

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

이므로 ㉠에서

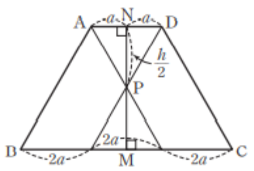
$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}}{2}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}}{2}$$

이고, 사각형 ABCD가 등변사다리꼴이므로

$\overline{AD}\perp\overline{MN}$, $\overline{BC}\perp\overline{MN}$

이다. $\overline{AD}=2a$라 하고 사다리꼴 ABCD의 높이를 h라 하면 등변사다리꼴 ABCD는 다음 그림과 같다.



$\overline{BC}=6a$이고 등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}(2a+6a)h=4ah=16,\ ah=4$$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$|\overrightarrow{AP}|^2=a^2+\frac{h^2}{4}\geq 2\times\frac{ah}{2}=4$$

이므로 $|\overrightarrow{AP}|$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

4번 문제 해설

{출제의도} 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $\angle CED=90^\circ$ 이므로 두 직선 BC, DE 는 서로 수직이다.
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AH}\perp$ (평면 BCD), $\overline{HE}\perp\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$
즉 직선 BC 와 평면 AED 는 서로 수직이므로
두 직선 BC, AD 도 서로 수직이다. $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH 는 닮음이므로
$\angle\mathrm{DAE}= \angle\mathrm{EAH}+\angle\mathrm{HAD}= 90^{\circ}$
그러므로 두 직선 AD, AE 는 서로 수직이다. $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 직선 AD 는 평면 ABC 와 서로 수직이다.
정삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 점 E 는 선분 BC 의 중점
이다. 즉 $\overline{\mathrm{AE}}= 2\sqrt{3}$
직각삼각형 AED 에서

$$\overline{\mathrm{AD}}= \sqrt{\overline{\mathrm{DE}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2}= \sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}= 2$$

직각삼각형 AED 에서 $\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{AD}}= \overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{DE}}$ 이므로
$2\sqrt{3}\times 2= \overline{\mathrm{AH}}\times 4$, $\overline{\mathrm{AH}}= \sqrt{3}$
직각삼각형 AHD 에서

$$\overline{\mathrm{DH}}= \sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}= \sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}= 1$$

삼각형 AHD 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

두 평면 ABD, AHD 가 이루는 예각의 크기를 θ 라
하면 $\theta= \angle\mathrm{BAE}= 30^{\circ}$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos 30^{\circ}= \frac{3}{4}$$

따라서 $p= 4$, $q= 3$ 이므로 $p+q= 4+3= 7$