제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=2x+1$

$f'(2)=5$

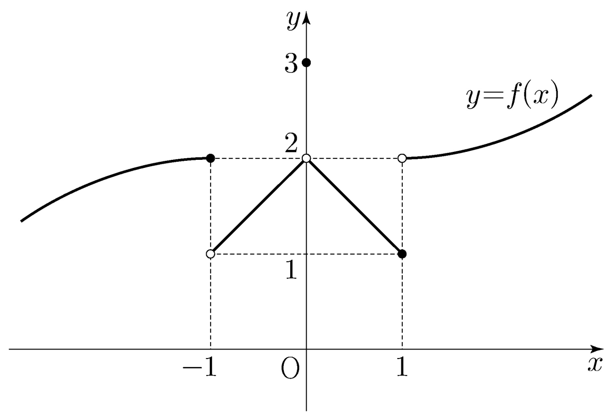
3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum\limits_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$ 이고 $a_6=4$ 일 때, $\sum\limits_{k=1}^{6}a_k$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\sum\limits_{1}^{5}a_k=4$

$\sum\limits_{1}^{6}a_k=4+4=8$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+1=3$

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

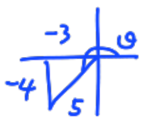
$f(x) = \cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+2x+2)$

$f'(1) = (1+1)(1+2+2) = 10$

6. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$



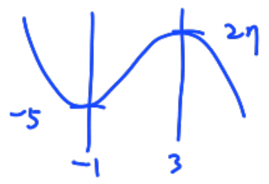
$\sin\theta = \frac{-4}{5}$

7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

$k = -x^3+3x^2+9x$

$-3x^2+6x+9 = -3(x-3)(x+1)$



$k = 27, -5$

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$r<0$

$$a_6=16, \quad 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$2(16r^2)-3(16r)=32$

$2r^2-3r=2$

$2r^2-3r-2=0$

$2r \quad +1$
$r \quad -2$ $\quad r=-\frac{1}{2}, 2 \quad r=-\frac{1}{2}$

$a_9+a_{11}=16r^3+16r^5$

$=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$f(0^-)=-\frac{1}{2}, \ f(0^+)=3$

$(-\frac{1}{2}+a)^2=(3+a)^2$

$2a+\frac{5}{2}=0, \ a=-\frac{5}{4}$

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

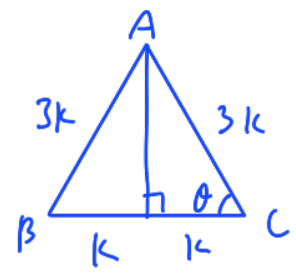
$R=3$

(가) $3\sin A=2\sin B$ (나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

(가) $\frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R} \Rightarrow b=\frac{3}{2}a$

(나) $b=c \qquad a=2k, b=3k, c=3k$



$\cos\theta=\frac{1}{3}, \ \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{3k}{\sin\theta}=2R=6, \ k=2\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3k\cdot 2k\cdot\sin\theta$

$=3k^2\sin\theta=3\cdot\frac{32}{9}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{64}{9}\sqrt{2}$

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(a)=1$, $f'(a)=3$

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=3(x-a)+1$

$(0,4) \to 4=-3a+1,\ a=-1$

$f(-1)=1$, $f'(-1)=3$, $f(0)=0$ $\Rightarrow$ $f(x)=(x+1)^3+p(x+1)^2+3(x+1)+1$

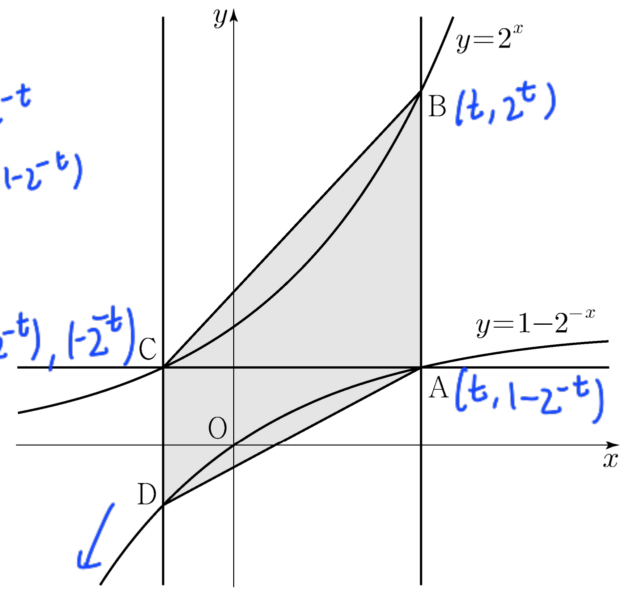
$f(0)=1+p+3+1=0,\ p=-5$

$\therefore f(1)=8+4p+6+1=-5$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

$2^x=1-2^{-t}$

$x=\log_2(1-2^{-t})$



$B\ (t, 2^t)$

$(\log_2(1-2^{-t}), 1-2^{-t})$ C

A $(t, 1-2^{-t})$

$\left(\log_2(1-2^{-t}),\ 1-\frac{1}{1-2^{-t}}\right)$

① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$ ④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

$\overline{AB}=2\overline{CD}$

$2^t-1+2^{-t}=2\left(\frac{1}{1-2^{-t}}-2^{-t}\right)$

$2^t-1+\frac{1}{2^t}=2\left(\frac{2^t}{2^t-1}-\frac{1}{2^t}\right),\ 2^t=A$

$A-1+\frac{1}{A}=\frac{2A}{A-1}-\frac{2}{A}$

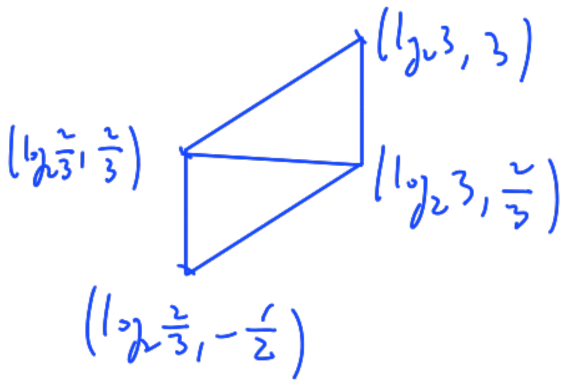
$A(A-1)^2+(A-1)=2A^2-2(A-1)$

$A^3-2A^2+2A-1=2A^2-2A+2$

$A^3-4A^2+4A-3=0$

$(A-3)(A^2-A+1)=0$

$A=3\quad \therefore 2^t=3,\ t=\log_2 3$



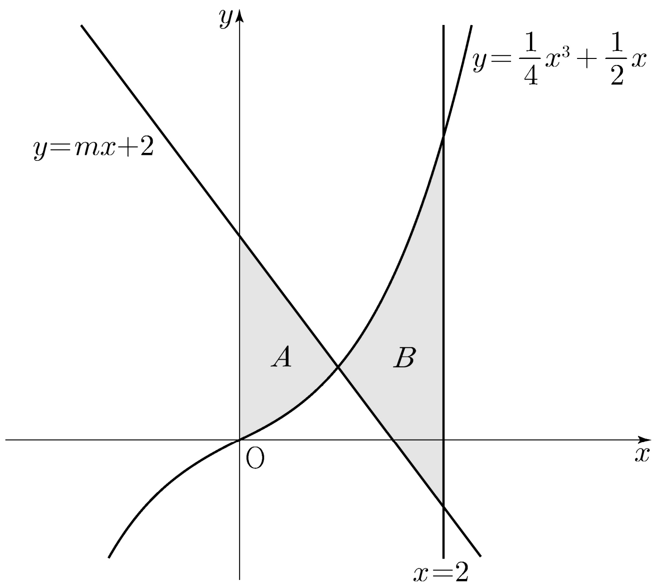
$S=\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{9}{2}\right)\times\left(3+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{7}{4}(2\log_2 3-1)$

$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



$B-A=\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-m\right)x^2-2x\right]_0^2$

$=1+1-2m-4=\frac{2}{3}$, $m=-\frac{4}{3}$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$-n^2+10n+75>0$

$(n-15)(n+5)<0$

$-5<n<15$

$0<n<15$

$75-kn>0$

$0<n<\frac{75}{k}$

$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$

$-n^2+10n+75>75-kn$

$n^2-(k+10)n<0$

$0<n<k+10$

n이 12개 $\Rightarrow$ $1\le n\le 12$

$12<\frac{75}{k}\le 13$

$k=6$

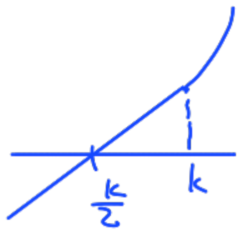
$\therefore k=3, 6$

$0<n<13$

$0<n<\frac{75}{6}=12.5$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$



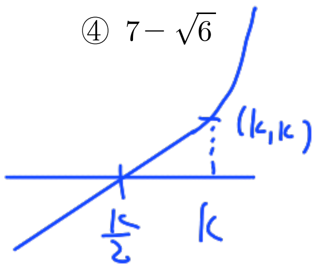
가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt \geq 0$이고 $A(t)$
> $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt \geq 0$이다. $B(t)$

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$ ④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

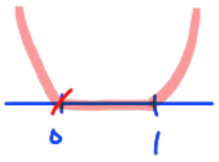
$g(x)$



$|A(x)|+A(x) = \begin{cases} 2A(x) & (A(x) \geq 0) \\ 0 & (A(x) < 0) \end{cases}$

$|A(x)|-A(x) = \begin{cases} 0 & (A(x) \geq 0) \\ -2A(x) & (A(x) < 0) \end{cases}$

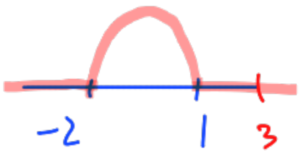
$|t(t-1)|+t(t-1)$



$\int_0^x g(t)A(t)dt \geq 0$

$0 \leq \frac{k}{2} \leq 1$, $0 \leq k \leq 2$

$|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)$



$\int_3^x g(t)B(t)dt \geq 0$

$1 \leq \frac{k}{2}$, $k \geq 2$

$k=2$

$\begin{cases} g(2)=2 \\ g'(2)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} f(2)=2 \\ f'(2)=2 \end{matrix}$

$f(x) = (x-2)^3+a(x-2)^2+2(x-2)+2$

$f'(x) = 3(x-2)^2+2a(x-2)+2$

$= 3x^2+2(a-6)x+14-4a$

$x \geq 2 \rightarrow f'(x) \geq 0$

$D/4 = (a-6)^2-42+12a = a^2-6$

f'

$D \leq 0$ $\frac{6-a}{3}$

$-\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$ $D>0$

$(\circ)$ $\frac{6-a}{3} < 2$

$f'(2)=2>0$

$a > \sqrt{6}$ $\therefore a \geq -\sqrt{6}$

$g(k+1) = f(3) = a+5 \geq 5-\sqrt{6}$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5 = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{5}$

$x>3$, $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$

$\log_2(x+1)(x-3)=5$

$x^2-2x-3=2^5=32$

$x^2-2x-35=0$

$x=7, -5$ $\therefore x=5$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{23}$

$f(x) = 2x^3+2x+3$

$f(2) = 16+4+3 = 23$

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{2}$

$a\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}-10\cdot\frac{9\cdot10}{2}$

$=285a-450=120$

$285a=570$

$a=2$

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

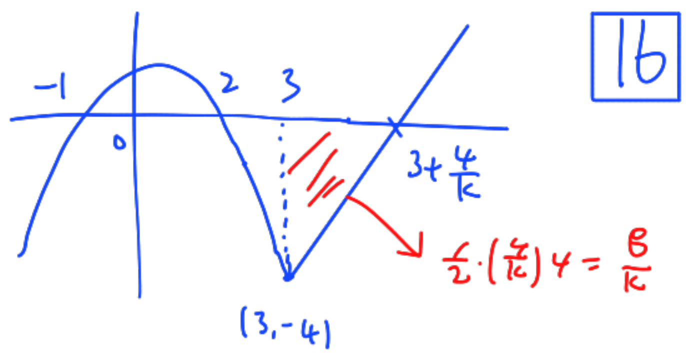
$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

$-(t-2)(t+1)$

$t=3+\frac{4}{k}$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{16}$



$\int_0^3(-t^2+t+2)\,dt-\frac{8}{k}=1$

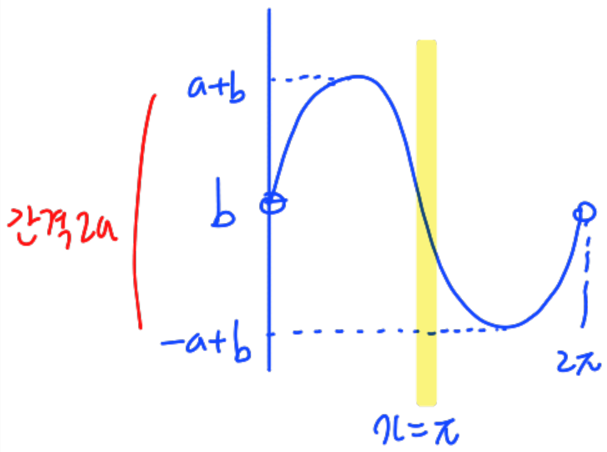
$-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\Big|_0^3-\frac{8}{k}$

$=-9+\frac{9}{2}+6-\frac{8}{k}=1$

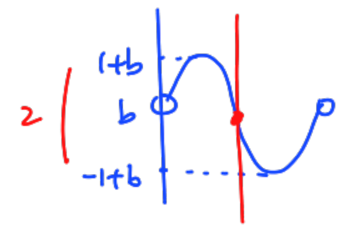
$\frac{8}{k}=\frac{1}{2}$, $k=16$

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{24}$

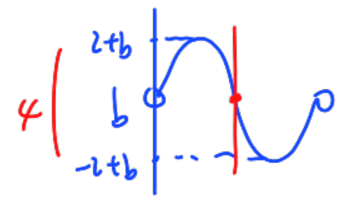


$a=1$



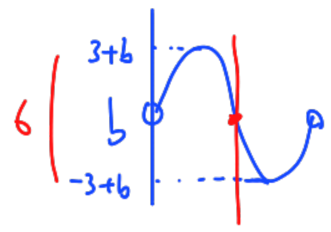
$b=2$

$a=2$



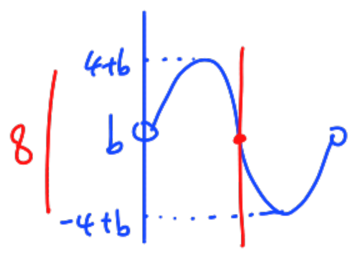
$b=4$

$a=3$



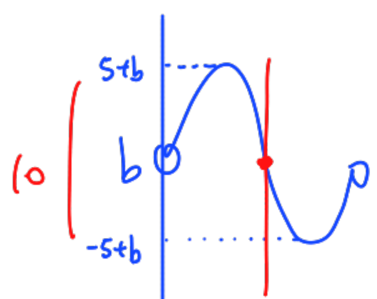
$b=1, 3, 5$

$a=4$



$b=1, 3$

$a=5$



$b=1, 3$

$a+b$ $\left.\begin{matrix}M=8\\ m=3\end{matrix}\right\}$ $Mm=24$

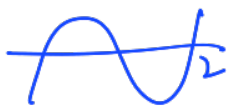
21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

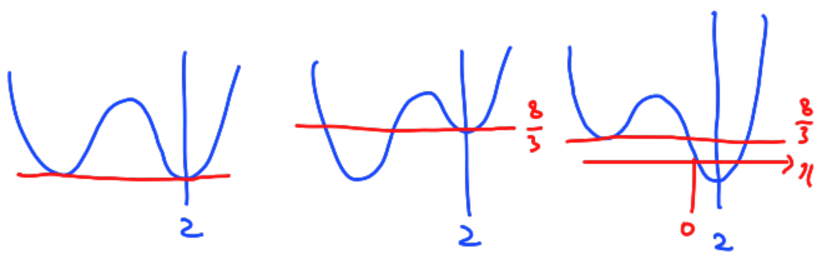
(가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

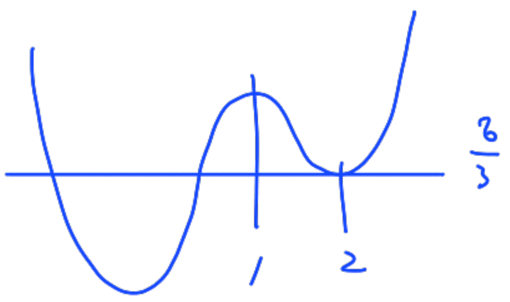
$\boxed{15}$

(나) $f(x)=k$ 가 3개이상 $\Rightarrow$ f 

f' 

f 

(나) X (○) $f'(1)=0$ (X)

f 

$f(x) = (x-2)^2(x^2+ax+b) + \frac{8}{3}$

$f'(x) = 2(x-2)(x^2+ax+b) + (x-2)^2(2x+a)$

$f(0) = 4b + \frac{8}{3} = 0,\ b = -\frac{2}{3}$

$f'(1) = -2(1+a+b) + 2 + a = 0$

$-\frac{2}{3} + 2 - a = 0,\ a = \frac{4}{3}$

$f(x) = (x-2)^2\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) + \frac{8}{3}$

$f(3) = \left(9 + 4 - \frac{2}{3}\right) + \frac{8}{3} = 15$

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

$n = 4, 9$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

$\boxed{231}$

$a_1 = \alpha$

$a_2 = -\alpha$

$a_3 = -\alpha + 1$

$a_4 = -\alpha + 2$

$\alpha < 2$: $a_5 = a_4 - 2a_2 = \alpha + 2$, ⋮, $a_9 = \alpha + 6$

$\alpha \ge 2$: $a_5 = -\alpha + 3$, ⋮, $a_9 = -\alpha + 7$

$-6 < \alpha < 2$: $a_{10} = a_9 - 3a_3 = 4\alpha + 3$, ⋮, $a_{15} = 4\alpha + 8 = 1$, $\alpha = -\frac{7}{4}$

$\alpha \le -6$: $a_{10} = \alpha + 7$, ⋮, $a_{15} = \alpha + 12 = 1$, $\alpha = -11$

$2 \le \alpha < 7$: $a_{10} = a_9 - 3a_3 = 2\alpha + 4$, ⋮, $a_{15} = 2\alpha + 9 = 1$, $\alpha = -4$ (X)

$\alpha \ge 7$: $a_{10} = -\alpha + 8$, ⋮, $a_{15} = -\alpha + 13 = 1$, $\alpha = 12$

$\therefore \left(-\frac{7}{4}\right)(-11)(12) = 231$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 네 개의 숫자 1, 1, 2, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$P(A^C)=\frac{5}{6},\quad P(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

일 때, $P(B^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

$P(A)=\frac{1}{6}$ $P(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$

$\therefore P(B^c)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

25. 다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① -50 ② -20 ③ 10 ④ 40 ⑤ 70

$_5C_3(x^2)^3(-2)^2$

$=40x^6$

26. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

전체 : 4^4

a 1개 a _ _ _ $4\times3^3=108$

b 1개 b _ _ _ $4\times3^3=108$

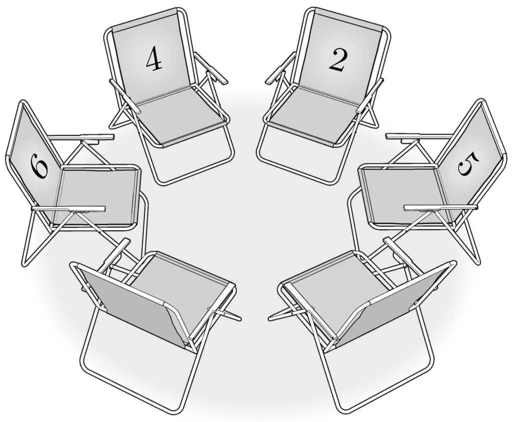
a 1개&b 1개 abcc 12, abdd 24, abcd 12 | 48

$\frac{108+108-48}{4^4}$

$=\frac{42}{64}=\frac{21}{32}$

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



5&6 이웃 X

① ② ③ ④

$3! \times {}_4P_2 = 72$

28. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$

앞면 앞면 앞면 뒷면

A B C D

전체 4^5

ABC D

모두 앞면

AAAA BBBB CCCC	1	$3 \times \frac{5!}{4!} = 15$	
AABB AACC BBCC	1	${}_3C_2 \times \frac{5!}{2!2!} = 90$	136
AA	3	$3 \times \frac{5!}{3!2!} = 30$	
	5	1	

모두 뒷면

ABC	2	$\frac{5!}{2!} = 60$	120
AAABC BBBAC CCCAB	0	$3 \times \frac{5!}{3!} = 60$	

$\frac{136}{136+120} = \frac{17}{17+15} = \frac{17}{32}$

단답형

29. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자. $p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [4점]

$\boxed{6}$

흰 : x 개

검 : $40-x$ 개

$p=\dfrac{{}_{x}C_2}{{}_{40}C_2}$, $q=\dfrac{({}_{x}C_1)\times({}_{40-x}C_1)}{{}_{40}C_2}$, $r=\dfrac{{}_{40-x}C_2}{{}_{40}C_2}$

$p=q \Rightarrow \dfrac{x(x-1)}{2}=x(40-x)$

$x-1=80-2x$, $x=27$

$\therefore r=\dfrac{{}_{13}C_2}{{}_{40}C_2}=\dfrac{13\cdot 12}{40\cdot 39}=\dfrac{1}{10}$

30. 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

$\boxed{108}$

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x) \in X$이다.
> (나) $x=-2, -1, 0, 1$일 때 $f(x) \geq f(x+1)$이다.

(가) $f(-2)$: 0, 1, 2 (2, −1)

$f(-1)$: −1, 0, 1, 2 (−2)

$f(0)$: −2, −1, 0, 1, 2

$f(1)$: −2, −1, 0, 1 (1)

$f(2)$: −2, −1, 0 (1, 2)

(나) $f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$

${}_5H_5 = {}_9C_5 = 126$

(가) 여사건 ⇒ $f(-2)=-2$, $f(-2)=-1$, $f(-1)=-2$ or $f(1)=2$, $f(1)=1$, $f(1)=2$

⇓ ⇓

$f(-2)=-2 \Rightarrow 1$

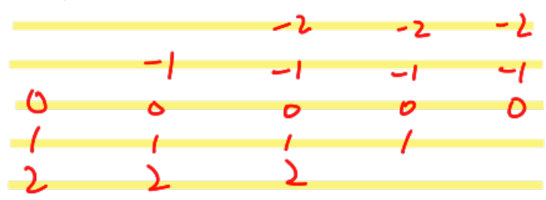
$f(-2)=-1 \Rightarrow {}_2H_4=5$ 9가지 ⇒ 9가지

$f(-1)=-2 \Rightarrow f(-2)=0, 1, 2$ 3가지

($f(-2)\neq -1$, $f(-2)\neq -2$)

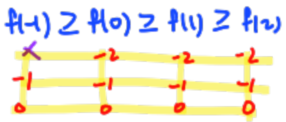
$\therefore 126-(9+9)=108$

$f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$



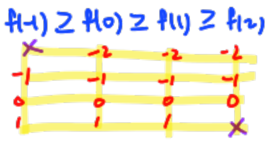
i) $f(-2)=0 \Rightarrow {}_3H_4 - 1 = 14$ ($f(-1)=-2$)

$f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$

0 

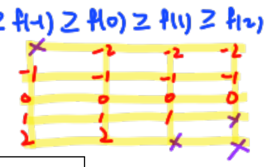
ii) $f(-2)=1 \Rightarrow {}_4H_4 - 1 - 1 = 33$ ($f(-1)=-2$, $f(2)=1$)

$f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$

1 

iii) $f(-2)=2 \Rightarrow {}_5H_4 - 1 - 5 - 3$ ($f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(2)=1$ ($f(1)\neq 2$))

$f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$

2 

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 곡선 $x\sin 2y + 3x = 3$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\sin 2y + x(2\cos 2y)\, y' + 3 = 0$

$\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \quad -2y' + 3 = 0, \quad y' = \frac{3}{2}$

25. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

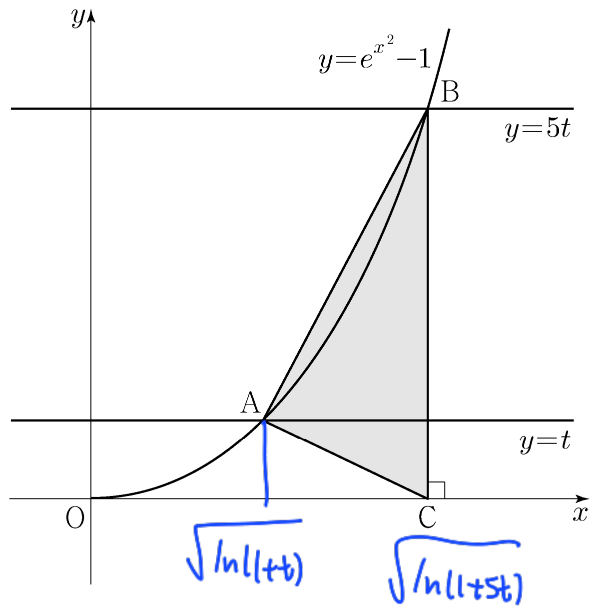
$\lim a_n = \frac{3}{2}$

$\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x\ge 0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$

④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



$\sqrt{\ln(1+t)}$ $\sqrt{\ln(1+5t)}$

$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)\times 5t$

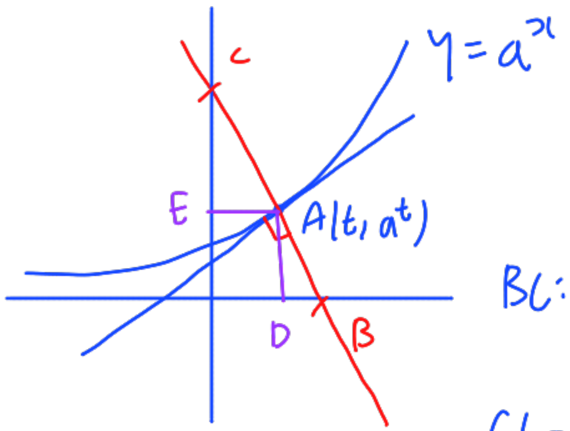
$\lim_{t\to 0+}\frac{5t}{2t\sqrt{t}}\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{5}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$

$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

27. 상수 $a(a>1)$과 실수 $t(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $A(t, a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e



$y'=a^x \ln a$

$BC: y=-\frac{1}{a^t \ln a}(x-t)+a^t$

$C\left(0, \frac{t}{a^t \ln a}+a^t\right)$

$B\left(t+a^{2t}\ln a, 0\right)$

$\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{BD}=\frac{t}{a^{2t}\ln a}=\frac{1}{\ln a}\left(\frac{t}{a^{2t}}\right)$

$\left(\frac{t}{a^{2t}}\right)'=\frac{a^{2t}-t(2a^{2t}\ln a)}{a^{4t}}=\frac{1-2t\ln a}{a^{2t}}=0,\ t=\frac{1}{2\ln a}=1$

$t=1 \rightarrow$ 최대 $\rightarrow \ln a=\frac{1}{2}$

$a=\sqrt{e}$

28. 함수 $f(x)$가

$f'=2(x-a-2)e^x+(x-a-2)^2e^x$

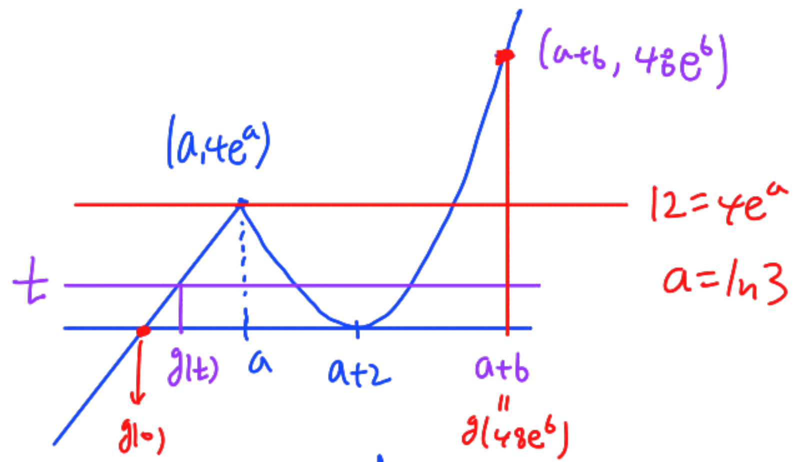
$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

$(a, 4e^a)$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$



$a=\ln 3$

$f(g(t))=t$

$f(a+2)=0$

$f(a+6)=16e^{a+6}=48e^6$

$g'(t)=\frac{1}{f'(g(t))}$ 구간 역함수

$\frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=\frac{f'(g(f(a+6)))}{f'(g(f(a+2)))}=\frac{f'(g(48e^6))}{f'(g(0))}$

$=\frac{f'(a+6)}{e^{2a}}=\frac{24e^{a+6}}{e^{2a}}$

$=24e^{6-a}=8e^6$

단답형

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

$\boxed{55}$

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>b) \\ -f'(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

$x=b$ 미분가능 $\Rightarrow \begin{cases} f(b)=-f(b-c) \\ f'(b)=-f'(b-c) \end{cases}$

$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{x^4-2x^3+x^2-2x+2x}{1+x^2}=\frac{x^2(x-1)^2}{1+x^2}\geq 0$

$f'(x)\geq 0$ 인데, $f'(b)=-f'(b-c)$

$\therefore f'(b)=f'(b-c)=0$

$f'(0)=f'(1)=0$, b, c는 양수이므로 $f'(b)=0 \to b=1$

$f'(1-c)=0 \to c=1$

$f(b)=-f(b-c) \to f(1)=-f(0)$

$f(1)+f(0)=0$

$\therefore \left(\frac{1}{3}-1+\ln 2+a\right)+(a)=0$

$a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$

$a+b+c=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2 \qquad p=\frac{7}{3}, q=-\frac{1}{2}$

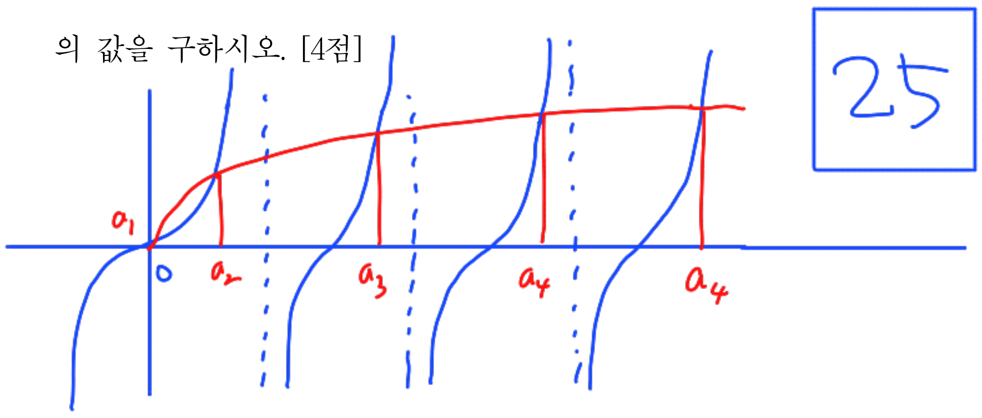
$30(p+q)=70-15=55$

30. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{25}$



$\frac{\sqrt{a_n}}{10}=\tan a_n$,

$\tan^2(a_{n+1}-a_n)=\left(\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}\right)^2=\left(\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\frac{\sqrt{a_n}}{10}}\right)^2$

$=100\left(\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{a_n}}\right)^2=100\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}\right)^2$

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-(a_n+\pi))=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

$\frac{1}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$

$=\frac{100\pi^2}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n\sqrt{a_n}}{(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}\right)^2$

$=100\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{100}{a_n}+\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+\sqrt{\frac{a_n}{a_n}}\right)}\right)^2$

$=100\left(\frac{1}{2}\right)^2=25$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}+3(\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}-3\vec{b}$$

이다. 실수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3, \sqrt{5})$에서의 접선의 y절편은? (단, b는 양수이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{5}$

$\frac{9}{18}+\frac{5}{b^2}=1$, $b^2=10$, $b=\sqrt{10}$

$\frac{3x}{18}+\frac{\sqrt{5}y}{10}=1$

$x=0 \rightarrow y=2\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}=(-3,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$에 대하여 벡터 $\vec{p}$가

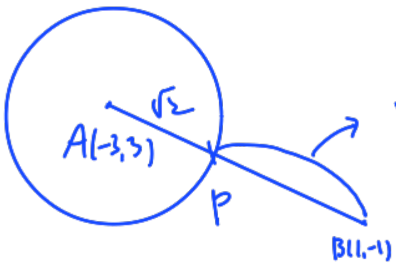
$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}| \quad =\sqrt{2}$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{b}|$의 최솟값은? [3점]

$|\overrightarrow{BP}|$

① $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

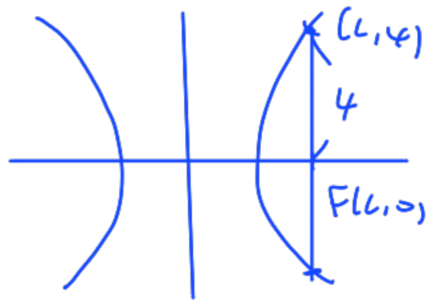
$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{2}$



$\sqrt{16+16}-\sqrt{2}$
$=3\sqrt{2}$

26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)\ (c>0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=x$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72



$\frac{b}{a}=1,\ b=a$

$c^2=a^2+b^2$

$c=\sqrt{2}a$

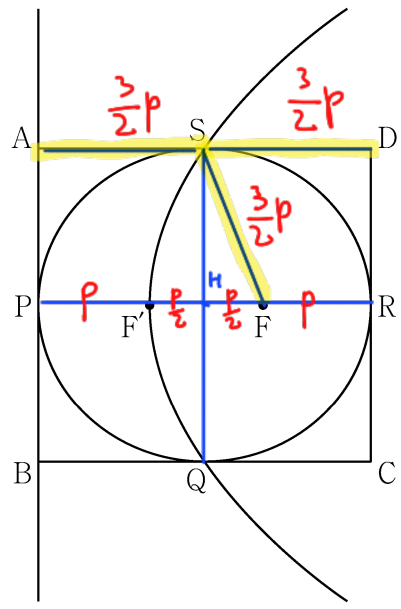
$(c,4)\rightarrow \frac{c^2}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$

$2-\frac{16}{a^2}=1,\ a^2=16$

$b^2=16$

$c^2=32$

27. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 네 변의 중점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 타원의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 초점, 직선 AB를 준선으로 하는 포물선이 세 점 F′, Q, S를 지난다. 직사각형 ABCD의 넓이가 $32\sqrt{2}$일 때, 선분 FF′의 길이는? [3점]



① $\frac{7}{6}\sqrt{3}$ ② $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ④ $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}\sqrt{3}$

$\overline{SH} = \sqrt{\frac{9}{4}p^2 - \frac{p^2}{4}} = \sqrt{2}p$

$S = 3p \times 2\sqrt{2}p = 6\sqrt{2}p^2 = 32\sqrt{2}$

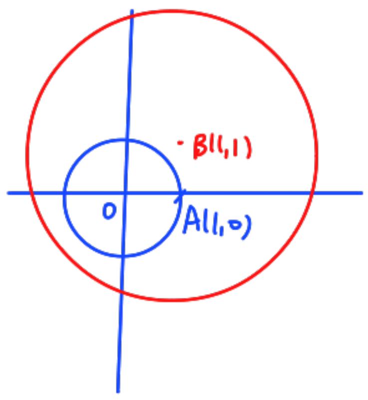
$p^2 = \frac{16}{3},\ p = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \overline{FF'}$

28. 좌표평면에서 두 점 A(1, 0), B(1, 1)에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{OP}| = 1,\quad |\overrightarrow{BQ}| = 3,\quad \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP}) = 0$$

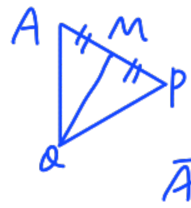
을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 값은? (단, O는 원점이고, $|\overrightarrow{AP}| > 0$이다.) [4점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{18}{5}$



P: $x^2+y^2=1$ 위의 점

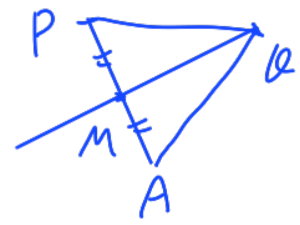
Q: $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ 위의 점



$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{QM}$

$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{AP} \cdot 2\overrightarrow{QM} = 0$

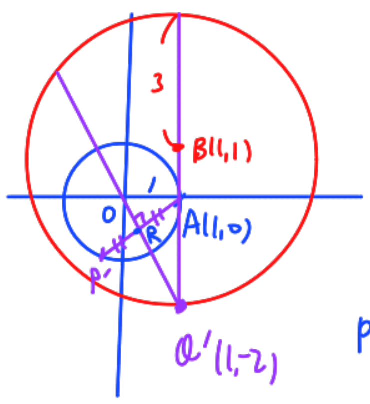
$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$

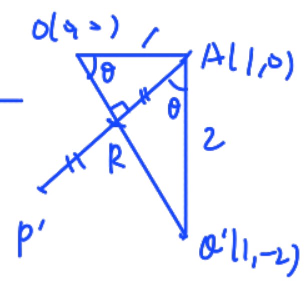


Q: $\overline{AP}$의 수직이등분선 위

$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{AQ}|$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$ 최소 ⇒ $|\overrightarrow{AQ}|$ 최소

$= |\overrightarrow{AQ'}|$





$\overline{OQ'} = \sqrt{5},\ \overline{AR} = \frac{2}{\sqrt{5}}\quad \therefore \overline{AP'} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\overrightarrow{AP'} \cdot \overrightarrow{BQ'} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}$

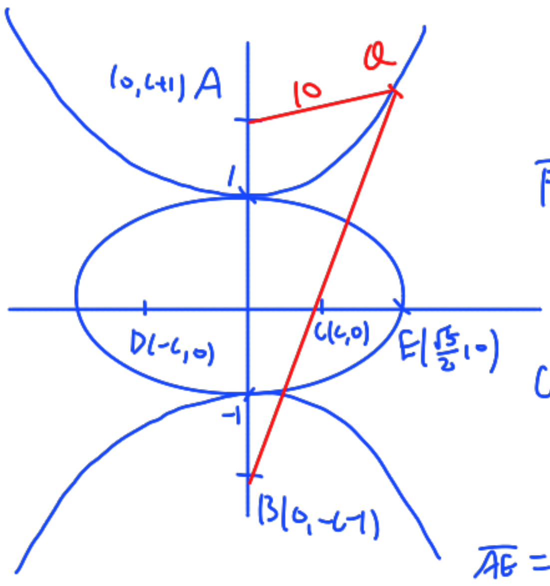
단답형

29. 좌표평면에 곡선 $|y^2-1| = \frac{x^2}{a^2}$과 네 점 $A(0,\ c+1)$, $B(0,\ -c-1)$, $C(c,\ 0)$, $D(-c,\ 0)$이 있다. 곡선 위의 점 중 y좌표의 절댓값이 1보다 작거나 같은 모든 점 P에 대하여 $\overline{PC}+\overline{PD}=\sqrt{5}$이다. 곡선 위의 점 Q가 제1사분면에 있고 $\overline{AQ}=10$일 때, 삼각형 ABQ의 둘레의 길이를 구하시오. (단, a와 c는 양수이다.) [4점]

$\boxed{25}$

$y^2 \ge 1$, $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = -1$

$y^2 < 1$, $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$



E($\frac{\sqrt5}{2}$, 0)

$\overline{PC}+\overline{PD}=\sqrt5$

$2a=\sqrt5,\ a=\frac{\sqrt5}{2}$

$c^2=a^2-1=\frac14,\ c=\frac12$

$\frac45x^2+y^2=1,\ E(\frac{\sqrt5}{2},0)$

$\overline{AE}=\sqrt{\frac54+\frac94}=\frac{\sqrt{14}}{2}<10$ 이므로

Q는 쌍곡선 위의 점

$QB-QA=2$

$QB=12$

$AB=2c+2=3$

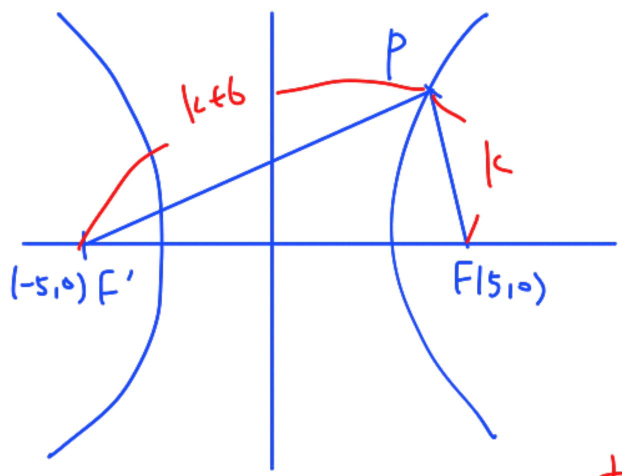
$\therefore QA+AB+BQ$

$=10+3+12=25$

30. 두 초점이 $F(5,\ 0)$, $F'(-5,\ 0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 쌍곡선 위의 $\overline{PF}<\overline{PF'}$인 점 P에 대하여 점 Q가

$$(|\overrightarrow{FP}|+1)\overrightarrow{F'Q}=5\overrightarrow{QP}$$

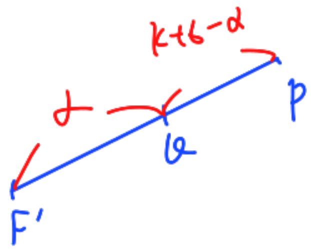
를 만족시킨다. 점 $A(-9,\ -3)$에 대하여 $|\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값을 구하시오. [4점] $\boxed{10}$



$c=5$
$a=3$
$b=4$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

$|\overrightarrow{FP}|=k$, $(k+1)\overrightarrow{F'Q}=5\overrightarrow{QP}$

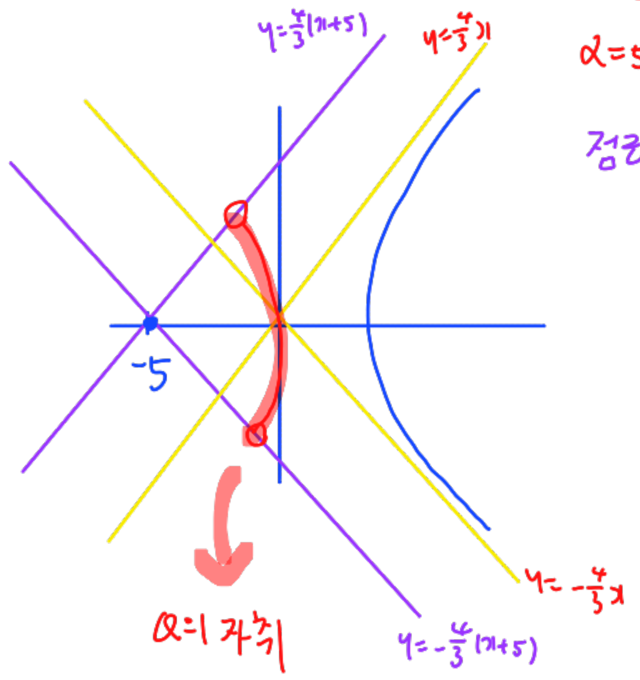


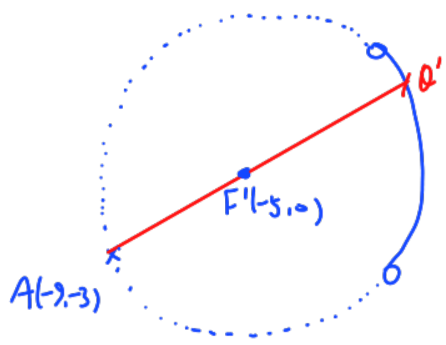
$(k+1)d=5(k+6-d)$

$kd+d=5k+30-5d$, $(k+6)d=5(k+6)$

$d=5$, $|\overrightarrow{F'Q}|=5$

점근선 : $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac43x$





$\overline{AF'}=5$

AF' 기울기 $\frac34<\frac43$

$\therefore |\overrightarrow{AQ}|$ 최대 $=|\overrightarrow{AQ'}|=10$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.