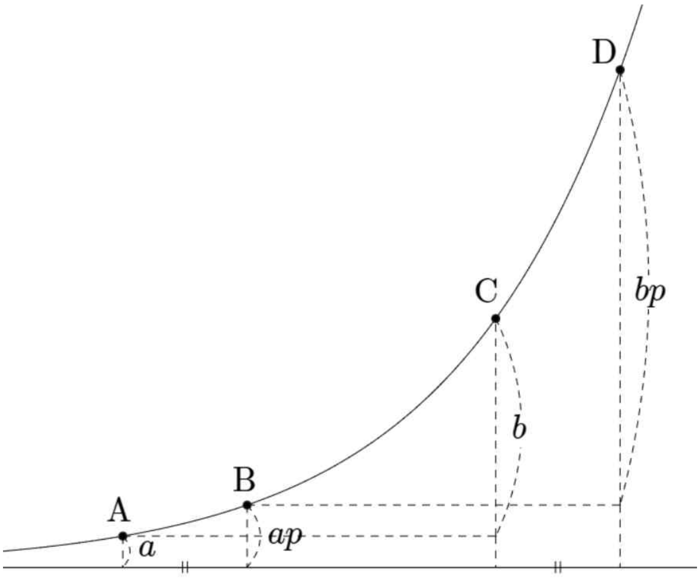
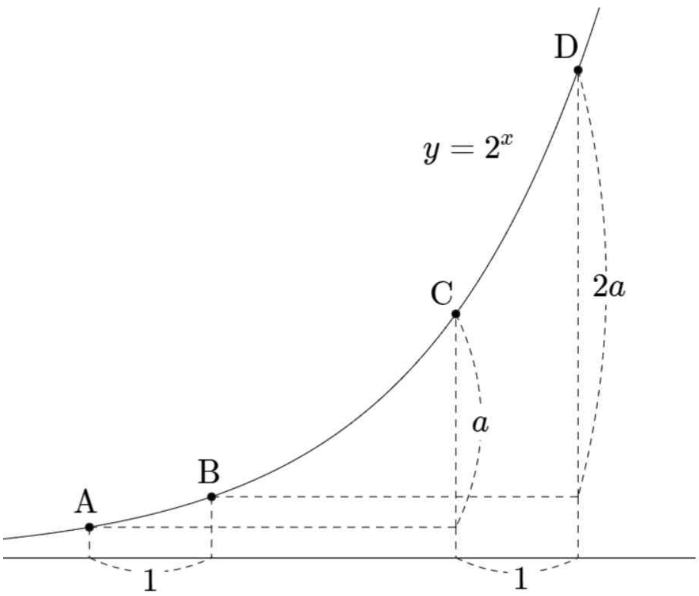
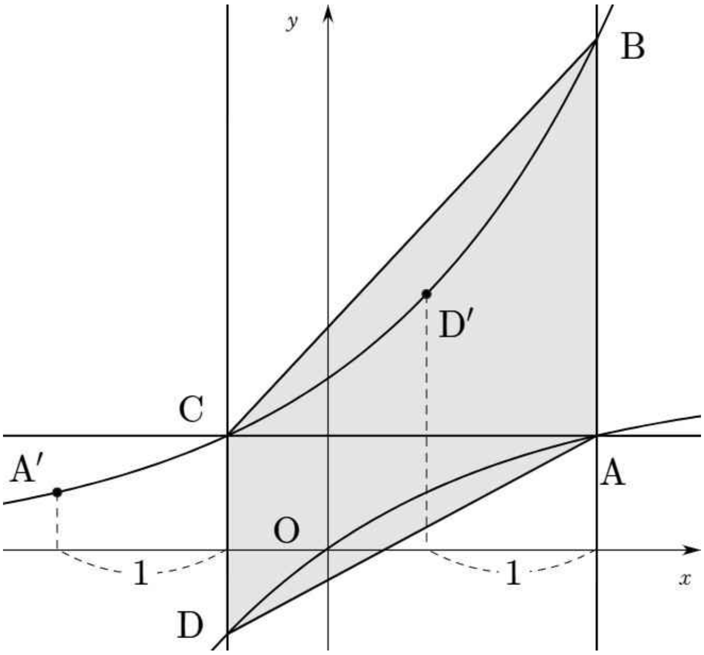
12번. # 지수함수의 성질
[배경지식]



일반적으로 지수함수에서 위와 같은 사실관계가 성립한다.
이를 증명하는 것은 어렵지 않으므로 생략하도록 하겠다.



그렇다면 지수함수 $y=2^x$에서 위와 같은 사실관계가 성립한다는 것도 알 수 있다.



주어진 문제에 적용해보면 다음과 같은 사실을 확인 할 수 있다.

$y=2^x$와 $y=1-2^{-x}$의 그래프는 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 대해 대칭이다.

그렇다면 점 A와 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 대해 대칭인 점을 A'이라 하자.

그럼 위 사실관계에 의해 A'은 점 C와 x좌표가 1 차이남을 알 수 있다.
따라서 $\mathrm{C}=(-a, 2^{-a})$로 놓으면 $\mathrm{A}'=(-a-1, 2^{-a-1})$이고, $\mathrm{A}=(a+1, 1-2^{-a-1})$를 얻을 수 있다.

조건에 의해 $2^{-a}=1-2^{-a-1}$이므로, 정리하면 $a=\log_2\frac{3}{2}$을 얻는다.

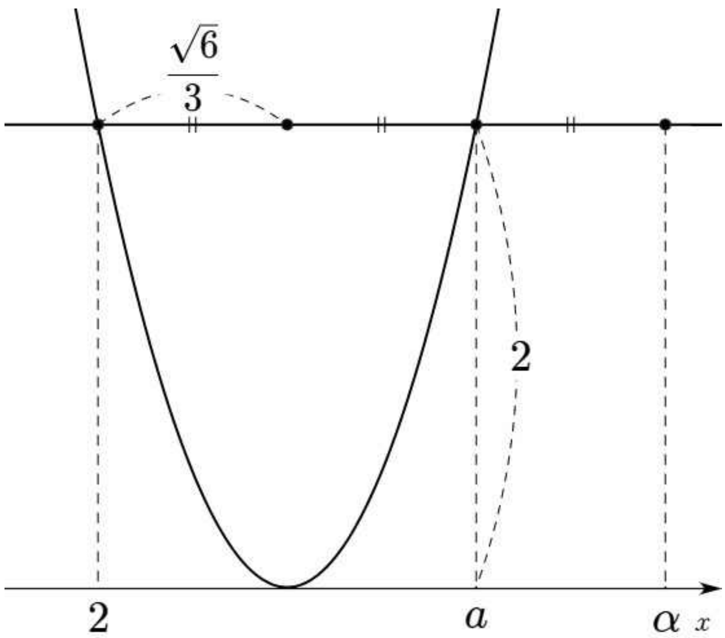
15번. # 거리곱과 비율관계

$k=2$임을 추론하는 과정은 생략. 여기서는 계산을 간단하게 하는 방법만 언급하겠다.

$k=2$임을 추론하면, 남은 계산은 $f(x)=(x-2)^2(x-\alpha)+2x-2$가 실수 전체 집합에서 증가할 때, $f(3)$의 최솟값을 계산하는 것이다.
이는 곧 α의 최댓값을 구하는 것과도 같다.

따라서 $f'(x)=3(x-2)(x-a)+2\geq 0$을 만족하는 a의 최댓값을 구해야 한다.
(a와 α가 비례함을 생각하면 자명하다.)

접하는 상황이 답이므로 접하게 그래프를 그리면 아래와 같다.



거리곱을 이용해 대칭축이 $x=2$에서 $\frac{\sqrt{6}}{3}$만큼 떨어져 있음을 알 수 있고,
비율관계에 의해 $\alpha=2+\sqrt{6}$임을 빠르게 확인할 수 있다.

나머지는 대입하면 끝.

21번. # 넓이공식을 이용한 적분.

역시 마지막 계산만 보자.

$4\int_0^2 (x-1)(x-2)(x-k)dx = \frac{8}{3}$를 만족하는 k를 구하면 된다.

넓이공식을 활용하면 다음과 같이 적분할 수 있다.

$\int_0^2 (x^2-(k+1)x+k)(x-2)dx = \int_0^2 x^2(x-2)-(k+1)x(x-2)+k(x-2)dx$.

넓이공식을 활용해주면, $-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}(k+1)-2k=\frac{2}{3}$로 정리할 수 있고,

$k=-1$을 얻는다.