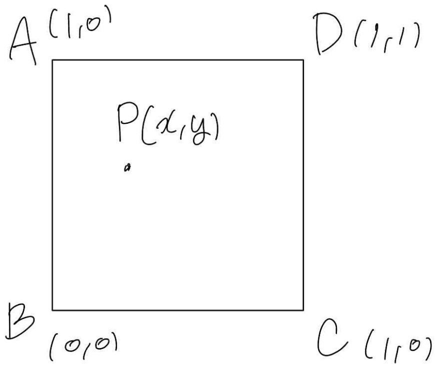
1번 해설

정사각형, 선분의 길이가 같다. 그리고 점 P가 나타내는 곡선~

이런 표현들만 보자면 고1때 한번쯤은 풀어봤던 '자취의 방정식'이란 상황이 의심되므로 그냥 좌표 잡고 식 세우는게 제일 낫겠죠?



위와 같이 좌표를 잡아버린다면, 점 P_1은 $\mathrm{P}_1(x,0)$, $\mathrm{P}_2(1,y)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PP}_1}$에 대한 식을 세워본다면 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{y^2}$이고, 논술에서는 길이나 넓이가 등장했을 때 $\sqrt{\ }$는 별로 필요가 없으므로 양 변을 제곱해서 풀어준 후, 정리하면

$\mathrm{C}_1 : y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq 1)$

를 얻습니다. 마찬가지로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PP}_2}$에 대한 식을 세워본다면 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(1-x)^2}$이므로 역시 양 변을 제곱하고 정리해주면

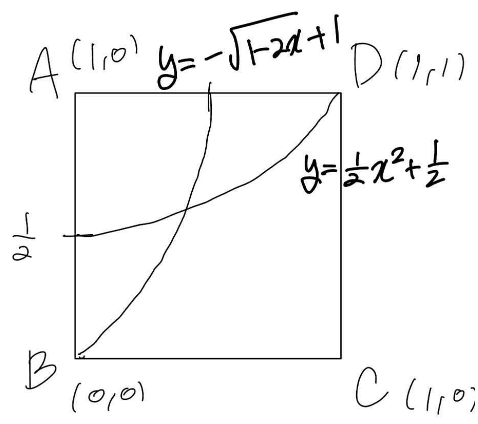
$\mathrm{C}_2 : x=-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{2} \quad (0 \leq y \leq 1)$

를 얻습니다. 여기까지만 생각하면 기하같아보이나, 기하의 내용을 전혀 몰라도 식을 구하는데에 아무런 문제가 없었죠?

그리고 직관적으로 예상했겠지만, 두 곡선은 서로 $y=1-x$대칭입니다.

이걸 이용해서 교점을 구해야하는데, 만약 이를 이용하지 못한다면 아래와 같은 시행착오를 겪게 됩니다.

$C_2 : y = -\sqrt{1-2x}+1 (\because 0 \le y \le 1)$



그러면 위와 같은 상황이 등장하고, 두 함수의 교점을 구해보기 위해 연립한다면

$-\sqrt{1-2x}+1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

$x^4 - 2x^2 + 8x - 4 = 0$이 등장합니다. 인수분해도 안되고 답이 없죠

그래서 C_2를 일반적인 함수꼴로 만들었으니 $C_1 = f(x)$, $C_2 = g(x)$라 합시다.

$y = 1-x$에 서로 대칭임을 증명해보자면

그렇다면 $f(x)$위의 한 점 $(t, f(t))$를 $y=1-x$에 대칭시킨 점을 (x', y')라 하면

이 두 점의 중점은 $y = 1-x$위에 있어야 하고 두 점으로 이루어지는 기울기가 1이면 됩니다.

이를 이용하면 $\frac{y'+f(t)}{2} = \frac{t+x'}{2} - 1$과 $\frac{f(t)-y'}{t-x'} = -1$을 얻을 수 있으므로 연립해서 x'와 y'를 t에 관한 식으로 정리해서 다시 $g(x') = y'$가 성립함을 보여주기만 하면 됩니다.

(하지만 단답형이므로 그냥 바로 직관으로 구하는걸 추천합니다 아마 상황 상 실전에선 스킵하는걸 권장하며, 고과정이므로 기억이 잘 안날 수도 있으리라 생각합니다.)

그래서 $C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$과 $y = 1-x$의 교점을 구해보면 주어진 범위에 맞는 x좌표는 $-1+\sqrt{2}$를 얻습니다. 이를 이용해준다면

둘러쌓인 넓이 S는

$S=2\int_{0}^{-1+\sqrt{2}}\left\{(1-x)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$

정리하면 $\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$을 얻습니다.

(계산상, $-1+\sqrt{2}=\alpha$라 두고, 이 α는 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=1-x$의 근이므로 대입하여 $\alpha^2=1-2\alpha$를 이용한 후 마지막에 α의 정확한 값을 대입해주는 것이 더 나을수도 있습니다.)

2번 해설

$$a_n = \sum_{m=n}^{10} \frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)}$$

인데, 분자를 처리하는 것이 상당히 거슬리므로, 적당히 분리해봅시다.

$$a_n = \sum_{m=n}^{10} \frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)} = \sum_{m=n}^{10} \frac{m}{m^3(m+1)(m+2)} + \sum_{m=n}^{10} \frac{2n-1}{m^3(m+1)(m+2)}$$

$$\sum_{m=n}^{10} \frac{1}{m^2(m+1)(m+2)} + (2n-1)\sum_{m=n}^{10} \frac{1}{m^3(m+1)(m+2)}$$

여기까지만 보자면, $\frac{1}{m^2(m+1)(m+2)}$를 분리해서 처리하는것도 가능은 합니다.

$\frac{1}{m^2(m+1)(m+2)} = \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)$이고

$\frac{1}{m^2(m+1)} = \frac{A}{m} + \frac{B}{m^2} + \frac{C}{m+1}$ 이런식으로요

그런데 너무 길고, $\sum \frac{1}{m}$이나 $\sum \frac{1}{m^2}$을 처리할 수 있는 방법이 없죠?

그래서 다르게 생각해봅시다.

우리가 구해야 하는 것이 $\sum_{n=1}^{10} a_n$임을 고려해보자는거죠.

$\sum_{n=1}^{10} \left\{ \sum_{m=n}^{10} \frac{1}{m^2(m+1)(m+2)} \right\}$을 하나씩 풀어서 이해해보자면

$$\sum_{m=1}^{10} \frac{1}{m^2(m+1)(m+2)} + \sum_{m=2}^{10} \frac{1}{m^2(m+1)(m+2)} + \cdots + \sum_{m=10}^{10} \frac{1}{m^2(m+1)(m+2)}$$

에서 $\frac{1}{10^2(10+1)(10+2)}$는 10개, $\frac{1}{9^2(9+1)(9+2)}$는 9개 $\cdots$ $\frac{1}{1^2(1+1)(1+2)}$는 1개이므로

이므로 이렇게 정리가능합니다.

$$\sum_{n=1}^{10} \left\{ \sum_{m=n}^{10} \frac{1}{m^2(m+1)(m+2)} \right\} = \sum_{n=1}^{10} \frac{n}{n^2(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11 \times 12}\right)$$

마찬가지로

$\sum_{n=1}^{10}\left\{(2n-1)\sum_{m=n}^{10}\frac{1}{m^3(m+1)(m+2)}\right\}$도 아까와 동일한 방식으로 정리해보자면

$\sum_{m=1}^{10}\frac{1}{m^3(m+1)(m+2)}+\sum_{m=2}^{10}\frac{3}{m^3(m+1)(m+2)}+\cdots\sum_{m=10}^{10}\frac{19}{m^3(m+1)(m+2)}$이고

$\frac{1}{10^3(10+1)(10+2)}$가 $1+3+\cdots+19$개, $\frac{1}{9^3(9+1)(9+2)}$가 $1+3+\cdots+17$개 $\cdots$

$\frac{1}{1^3(1+1)(1+2)}$이 1개이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\left\{(2n-1)\sum_{m=n}^{10}\frac{1}{m^3(m+1)(m+2)}\right\}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1+3+\cdots+2m-1}{m^3(m+1)(m+2)}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{11\times 12}\right)$$

따라서 정리하면

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{11\times 12}\right)=\frac{65}{132}$$

3번 문항 해설

3-1

점에 각각 이름을 붙이는게 아무래도 설명하기 좋겠죠.
3-2까지 고려하자면, $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,1)$, $\mathrm{C}(0,1)$이라 합시다.
정확하게 이 사각형 안에서 네 격자점을 포함하는 원(동전)을 찾기는 쉽습니다. 그냥 정사각형 OABC의 대각선의 교점인 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$를 지나고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 지나면 됩니다.
그러고 이렇게 된다면 아마 모든 임의의 상황에서도 죄다 가능하지 않을까요?

단답형이니 이렇게만 구해도 무난합니다. 하지만 조금만 논리적인 이유를 생각해보고 넘어가보죠

동전의 중심을 $\mathrm{P}(a,b)$라 합시다. 이때 a와 b는 $\frac{1}{2}$보다 클때와 작을때가 정사각형 내부의 존재하는 점이므로 대칭성에 의해 일반성을 잃지 않고, $0 \le a \le \frac{1}{2}$, $0 \le b \le \frac{1}{2}$라 가정합시다.
이때 동전에 의한 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
각각 네 점과 만나는 상황을 고려한다면

$a^2+b^2=R^2$

$(1-a)^2+b^2=R^2$

$a^2+(1-b)^2=R^2$

$(1-a)^2+(1-b)^2=R^2$

여기서 $0 \le a^2 \le \frac{1}{4}$, $0 \le (1-a)^2 \le \frac{1}{4}$이고 b도 마찬가지임을 고려한다면
$a=b=\frac{1}{2}$일 시, $R<\frac{\sqrt{2}}{2}$인 상황에는 격자점과 하나도 만나지 않는 상황이 생기므로

불가능

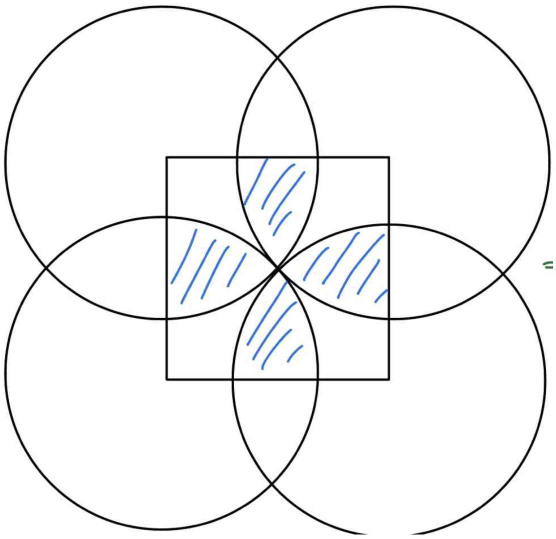
$R \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 시 최소 $a^2+b^2=R^2$에서는 동전을 덮는 것이 가능하므로

($R^2 \geq \dfrac{1}{2}$이고, $a^2+b^2=\overline{\mathrm{OP}}^2=\dfrac{1}{2}$이므로 정확하게 일치함)

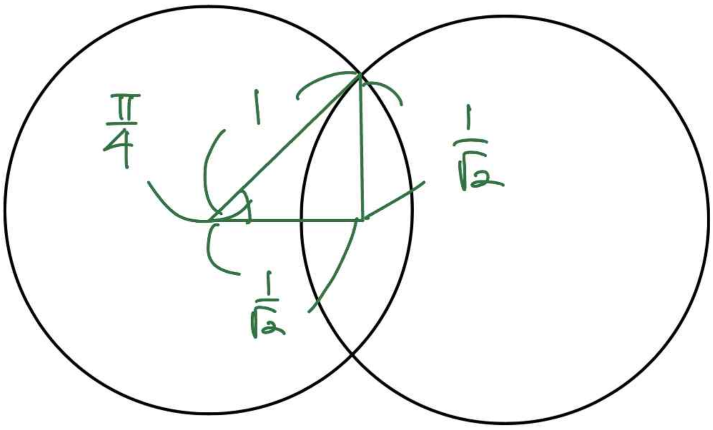
R의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$입니다.

3-2.

자 그렇다면 3-1과 동일한 R을 가지는 상황을 고려 시, 두 개만 놓인다고 생각해보면, 아마 정사각형 OABC의 경계면에 중심이 있는 경우부터 고려할것이고 이를 움직이며 관찰해본다면 아래와 같은, 원끼리 겹치는 영역을 고려해 볼 수 있습니다.



그리고이는 아래의 상황과 같은 활꼴의 넓이가 두 개 존재한다고 생각가능합니다.



따라서 넓이를 구해주면 $\frac{\pi}{2}-1$를 얻습니다.

4번 해설

정수론 관련된 문제입니다.

몰라도 푸는데 별 지장은 없으나, 정수론중 나머지에 관한 mod 개념을 알고있으면 손쉽게 풀리긴 합니다. 한번 공부해보시는것도 도움이 될거에요.

한 역에서 다음역까지 이동하는데 걸리는 시간은 6분 = 360초

그리고 한 칸씩 이동하는데 걸리는 시간은 4초이므로 이를 고려시

한 칸씩 이동하는데 걸리는 시간을 1초로 가정한다면 역간 이동시간은 90초로 단축시켜 생각가능합니다.

4-1

$n=8$일 때 아래와 같은 칸이 생기고 제일 오른쪽칸인 8번째 칸에서밖에 내릴수가 없게 됩니다.

시작							출구

여기서, 역에 도달했을 때 출구에 있으려면 m번 왕복함을 고려하더라도 처음 지점으로부터 7번 떨어져있어야 합니다. 왕복에 대한 주기성이 존재하므로 마치 삼각함수같은거죠.

여기서 왕복하는데 필요한 시간은 14초이므로 역에 도달했을 때 걸린 시간이 $14 \times m + 7$꼴이어야 합니다. (14로 나눈 나머지가 7인거죠)

이제 역간 이동거리인 90초를 계속 늘려가며 분석해봅시다.

$90 = 14 \times 6 + 6$

$180 = 14 \times () + 12$

$270 = 14 \times () + 18 = 14 \times () + 4$

꼴이므로 계속하여 나머지가 짝수꼴일 수 밖에 없습니다. 그러나, 우리가 얻어야 하는건 홀수꼴인 7이죠.

여기서 나머지에 관한 개념을 잠깐 생각해보자면

$90 = 14 \times 6 + 6$이므로

$180 = 90 \times 2 = 14 \times 12 + 12$

$270 = 90 \times 3 = 14 \times 18 + 18 = 14 \times 19 + 4$

꼴입니다.

좀 더 나열해본다면 나머지도 주기성을 가짐을 나열하여 확인하는 것이 현실적이겠네요.

따라서 내릴 수 없습니다.

4-2.

$n = 9$일때를 4-1과 같은 상황을 통해 얻은 내용을 적용해보자면

시작								출구

시작 -> 출구 이시 걸리는 시간이 8초이므로 왕복은 16초이고

$90 \times k = 16 \times () + 8$꼴이 등장해야합니다.

$90 = 16 \times 5 + 10$

$180 = 90 \times 2 = 16 \times () + 20 = 16 \times () + 4$

$270 = 90 \times 3 = 16 \times () + 30 = 16 \times () + 14$

$360 = 90 \times 4 = 16 \times () + 8$

따라서 0번째 역부터 출발했으므로 4번째 역에서 출구에 도달하여 나갈 수 있게 됩니다.

5번 해설

(여기서부턴 서술형이므로 서술이 정말 중요합니다.)

5-1.

실수 전체집합에서 미분가능한 함수가 $f(x)=cf\left(\frac{x}{c}\right)$꼴이고 아마 이거 만족하는건 일차 함수밖에 없지 않을까 하는 의심은 가능하지만, 좀 더 엄밀함이 필요하겠죠?

먼저 $x=0$ 대입을 통해 $c \neq 0$이므로 $f(0)=0$은 확인가능하고 이를 통해 현재 얻을 수 있는 함숫값은 $f(1)$, $f(0)$밖에 없겠네요.

이걸 가지고 미분계수 혹은 도함수의 정의를 사용해봐야 할텐데 그 전에 이 식을 조금만 더 다뤄봅시다.

하필 좌변에 $\frac{x}{c}$가 함수 안에 들어갔으므로 이 꼴을 활용해보기 위해 주어진 (나)에서 다시 x대신 $\frac{x}{c}$를 집어넣는다면 $f\left(\frac{x}{c}\right)=cf\left(\frac{x}{c^2}\right)$이고 이를 계속 반복해준다면

$$f(x)=cf\left(\frac{x}{c}\right)=c^2f\left(\frac{x}{c^2}\right)=\cdots=c^nf\left(\frac{x}{c^n}\right)$$

그리고 생각해보니 도함수 구하기는 쉽지 않은데, 미분계수의 정의를 이용해서 $f'(0)$정도는 얻어보려는 시도는 가능하지 않을까요?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

이걸 통해서 얻어지는 유의미한 결과는 아무것도 없네요. 다른 방법을 생각해봅시다.

$f\left(\frac{x}{c^n}\right)$에서 $n\to\infty$로 간다고 해도 $f(0)$으로 갈 것이고 이렇게되면 우미분계수밖에 못 보이겠지만, 어짜피 실수 전체집합에서 미분가능한 함수이므로 우미계 = 좌미계이므로 상관은 없죠.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{c^n}\right)-f(0)}{\frac{x}{c^n}}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

이므로 정리해주면 $f(x)=f'(0)x$입니다. $f(1)=1885$이므로 이용해주면 $f(x)=1885x$가 나

오네요. 그리고 오직 이 함수 하나 뿐입니다.

(모든 함수를 구하라했는데 너무하네요. 성균관대에서도 이런 문제가 하나 있었는데 말이죠)

5-2.

$f(x)=c^{-2}f(cx)$임을 생각해보면 5-1과 상당히 비슷하게 생겼네요. 다만 $f(x)$에 대한 적분이 필요하므로 분명 미분가능하지만, 미분하기보단 양 변을 적분을 해봅시다.

다만, 적분범위를 어떻게 해야할지 고려하면 머리아프므로 주어진 조건부터 빨리 사용해봅시다. (당연히 사용하라고 준것이고, 이게 큰 힌트겠죠?)

$$\int_c^1 f(x)dx=\frac{1}{c^2}\int_c^1 f(cx)dx=\frac{1}{c^3}\int_{c^2}^c f(x)dx=1$$

정리해보면 $\int_{c^2}^c f(x)dx=c^3$이네요.

이를 일반화시킨다면 $\int_{c^{k-1}}^{c^{k-2}} f(x)dx=\frac{1}{c^3}\int_{c^k}^{c^{k-1}} f(x)dx$ 이므로

$b_k=\int_{c^k}^{c^{k-2}} f(x)dx$ 라 한다면 $b_{k-1}=\frac{1}{c^3}b_k$이므로 b_k는 c^3이 등비고 첫째항이 1인 등비수열이므로

$a_k=b_1+b_2+\ \cdots\ +b_k$이므로

$a_k=\int_{c^k}^1 f(x)dx=\int_c^1 f(x)dx+\int_{c^3}^c f(x)dx+\ \cdots\ +\int_{c^k}^{c^{k-1}} f(x)dx=(1+c^3+c^6+\ \cdots\ +c^{3k})$

$=\frac{1-c^{3k}}{1-c^3}$

이고 $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1-c^{3k}}{1-c^3}=\frac{1}{1-c^3}$ $(\because 0<c<1,\ \lim_{n\to\infty}c^k=0)$

(주의, $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\int_{c^k}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$는 대학과정이므로 사용불가입니다. 반드시 구간

별로 끊어서 구해야 한다는 생각을 해야해요)

6번 해설

6-1 해설

문제에서 요구하는건 $f(n) \le f(n+2)$이고 주어진 식은 $f(n)+f(n+1)=f(n+2)f(n+3)-2025$인데, 2025를 건드리기는 상당히 힘들어보이므로 제일 무난한 n대신 $n+1$을 대입해서 서로 빼봅시다.

$f(n)+f(n+1)=f(n+2)f(n+3)-2025$

$f(n+1)+f(n+2)=f(n+3)f(n+4)-2025$

서로 빼고 정리해주면

$f(n+2)-f(n)=f(n+3)(f(n+4)-f(n+2))$

원하는 꼴이 나온것같은데, 우리가 무슨조건을 쓸수 있는지 다시 생각해보면, $f(x)$의 공역은 자연수라는 조건이 있네요.

$f(n+3)$은 항상 자연수, 즉 양수이므로 $f(n+2)-f(n)$와 $f(n+4)-f(n+2)$의 부호는 같아야합니다.

즉, $f(n+2) \ge f(n)$이면 $f(n+4) \ge f(n+2)$가 된다는거죠. 그러나 이를 보이긴 힘드니 $f(n+2) < f(n)$이고 $f(n+4) < f(n+2)$임부터 한번 생각해봅시다.

(! 여기서부터 어렵습니다.)

즉, $f(n+4) < f(n+2) < f(n)$이런 상황이 만들어졌는데, f의 공역이 자연수 전체집합인데 계속 감소한다면 언젠간 모순이 발생하지 않을까? 하는 의심이 듭니다. 그럼 증명해봐야죠.

최소 f의 정의역이 2만큼 차이나는 함숫값들의 차이는 1보다 크거나 같으므로 1이라 가정하고 모순이 발생하는지 확인해봅시다.(간격이 최소일 때 모순이면 간격이 그보다 크면 다 모순이므로)

$f(n) > f(n+2) = f(n)-1 > f(n+4) = f(n)-2 > \cdots > f(n+2m) = f(n)-m$

(단, m은 자연수)

이고 f의 정의역도 모든 자연수이므로

$\lim_{m \to \infty} f(n+2m) = -\infty$

모순입니다. 따라서 $f(n+2) \geq f(n)$이고 $f(n+4) \geq f(n+2)$이 성립할 수 밖에 없습니다.

6-2.

6-1에서 얻어낸 것이

$f(n+2) \geq f(n)$인데, $f(1)$을 이용해서 $f(21)$을 구하라는 것을 보면 일단 홀수에 대한 식만이 필요하므로 이를 변형시키면

$f(2k+1) \geq f(2k-1)$ (k는 자연수)

크거나 같은데, 이게 사실 경우가 두가지입니다.

① $f(2k+1)=f(2k-1)$

$f(2k+1)=f(2k-1)$이면

$f(2k+1)-f(2k-1)=f(2k+2)(f(2k+3)-f(2k-1))$에서 좌변이 0이므로 우변도 0이라 홀수번째들은 전부 다 동일합니다.

$f(2k-1)=f(2k+1)=f(2k+3)= \cdots =f(2k+2m-1)$ (m은 자연수)

따라서 $f(1)=f(3)= \cdots =f(21)=1$입니다.

② $f(2k+1)>f(2k-1)$

이때 우리는 홀수만 고려하므로 짝수번째도 생각해봐야죠?

(왜냐하면 $f(n+2) \geq f(n)$를 얻었으므로 짝수도 고려해볼만 하다는것이죠.)

그렇다면 여기서도 또 경우가 두가지로 나눠지겠네요

I) $f(2k+2)=f(2k)$

이때 얻은 식을 정리해보면

$$\frac{f(2k+1)-f(2k-1)}{f(2k+3)-f(2k+1)}=f(2k+2)$$

그런데 $f(2k+2)=f(2k)$이므로 $f(n)$의 홀수번째 함숫값들의 간격은 동일함을 알 수 있습니다.

따라서 $f(2k-1)$은 첫째항이 1이고 등차가 d(d는 자연수)인 등차수열로 고려해볼 수 있고 이를 적용시켜주면 (적용시킬 수 있는 식은 이제 원래 주어진 식말곤 없죠?)

$f(2k-1)=1+d(n-1)$, 그리고 $f(2k)=x$라 하면(x는 자연수)

$f(2k+1)-f(2k-1)=f(2k+2)(f(2k+3)-f(2k-1))$

$f(n)+f(n+1)=f(n+2)f(n+3)-2025$에서

$f(2k-1)+f(2k)=f(2k+1)f(2k+2)-2025$

$1+d(n-1)+x=(1+dn)x-2025$

정리해주면

$d(nx-n+1)=2026$

인데 임의의 x에 대하여 이 식이 성립해야 하므로 $x=1$, $d=2026$만이 가능합니다.

따라서 이때 $f(21)=20261$

ii) $f(2k+2)>f(2k)$

그럼 다시 건드릴 수 있는 식이 $f(2k+1)-f(2k-1)=f(2k+2)(f(2k+3)-f(2k-1))$인데

우리가 판단해야 하는건 $f(2k+2)$에 관한 식이니 이에 대해 정리해보면

$$\frac{f(2k+1)-f(2k-1)}{f(2k+2)}=f(2k+3)-f(2k-1)$$

이고, 이를 어떻게 쓸수있나 고민하다보면 f의 치역이 자연수였으니 $f(2k+2)\geq 1$입니다.

이때 $f(2k+2)=1$이면 I)과 동일하므로 $f(2k+2)>1$이어야 하는데 이렇게되면

$f(2k+1)-f(2k-1)$은 감소한다는 결과를 얻게됩니다.

그런데, $f(2k+1)-f(2k-1)$가 감소한다면 결국 어느순간에선 $f(2k+1)=f(2k-1)$인 순간이 등장하지 않을까요? 이는 모순인데.. 한번 증명해봅시다.

$f(1)=1$임을 고려한다면 $f(3)\geq 2$여야하므로 $f(3)-f(1)\geq 1$이어야 하고 이걸 써먹어야 하므로 이를 고려해서 식을 만들어본다면

$$\frac{f(2k+1)-f(2k-1)}{f(2k+2)}=f(2k+3)-f(2k-1)$$에서 $k=1$부터 m까지 대입 후 곱해본다면

$$\frac{f(3)-f(1)}{f(4)f(6)\cdots f(2m+2)}=f(2m+3)-f(2m+1)$$

여기서

$f(2k+2) > f(2k)$이고 f의 공역은 자연수이므로 $\lim_{m\to\infty} f(4)f(6)\cdots f(2m+2) = \infty$ 입니다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\{f(2m+3)-f(2m+1)\} = 0$이어야 하는데,

이때 적당히 큰 m에 대하여 $0 \le f(2m+3)-f(2m+1) < 1$인 순간이 존재할것이고 이는 $f(2k+1) > f(2k-1)$에 대해 모순입니다.

따라서 가능한 상황은 $f(21)=1$, $f(21)=20261$ 입니다.